ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 43-53.

УДК 517.968

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БОРА

И.Ш. ДЖАББАРОВ, Н.Э. АЛЛАХЯРОВА

Аннотация. В настоящей работе рассматривается вопрос о таком расширении понятия интегрального уравнения Фредгольма, или интегрального уравнения второго рода, чтобы можно было рассмотреть вопрос о существовании решений в пространстве почти-периодических функций. Почти-периодические функции определены на всей действительной прямой. Поэтому представляется трудным описать их по некоторым характеристикам в конечных интервалах.

Известно, что уравнения Фредгольма тесно связаны с дифференциальными уравнениями первого порядка. В некоторых частных случаях ставились вопросы о нахождении их решений в разных классах почти-периодических функций. Известны случаи, когда в классе Бора отсутствуют решения для таких уравнений с почти периодическими коэффициентами.

Известны примеры таких почти-периодических функций (в смысле Безиковича), которые не могут быть решениями для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений. Естественно ожидать, что и интегральные уравнения, в общем случае, не окажутся разрешимыми в классе почти-периодических функций Бора. Поэтому, в пространстве почти-периодических функций к задаче нужен более специфический подход.

Ключевые слова: почти-периодические функции, классы Бора, уравнение Фредгольма, интегральные уравнения, дифференциальное уравнение.

Mathematics Subject Classification: 45B05

1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о таком расширении понятия интегрального уравнения Фредгольма, или интегрального уравнения второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{1.1}$$

чтобы можно было утверждать, что видоизмененное уравнение (1.1) имеет решение в классе почти-периодических функций Бора (здесь параметр λ может принимать, для простоты, действительные значения). Естественно, что для этого нужно, чтобы на все функции, входящие в (1.1), были наложены определенные условия. Нужно выбрать соответствующими и границы интегрирования, т.к. почти-периодические функции определены на всей числовой прямой.

I.Sh. Jabbarov, N.E. Allakhyarova, On integral equations of Fredholm kind in Bohr space of almost periodic functions.

Поступила 11 января 2022 г.

Прежде, чем переходить к постановке вопроса, сделаем некоторые вполне естественные замечания. Известно, что уравнения вида (1.1) тесно связаны с дифференциальными уравнениями первого порядка

$$y' = f(x, y).$$

В теории почти-периодических функций рассматривались различные частные случаи этого уравнения и ставились вопросы о нахождении его решений в разных классах почти-периодических функций. Изучались вопросы о том, когда можно утверждать существование решений. Известны случаи, когда в классе Бора отсутствуют решения даже для уравнений вида (см. [1])

$$y' + A(x)y = f(x),$$

где функции $f(x)$ и $A(x)$ являются почти-периодическими.

Хорошо известны также примеры таких почти-периодических функций (в смысле Безиковича), которые не могут быть решениями достаточно широкого класса дифференциальных уравнений. Так, в своей хорошо известной работе [8] С.М. Воронин доказал, что дзета-функция Римана $y = y(t) = \zeta(\sigma+it)$, $t \in \mathbb{R}$ не может быть, ни при каком $0,5 < \sigma < 1$, решением никакого дифференциального уравнения вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ является непрерывной. Функция $y(t) = \zeta(\sigma + it)$, $t \in \mathbb{R}$ является почти-периодической в смысле Безиковича, а при $\sigma > 1$ — в смысле Бора. На самом деле, таких примеров можно привести сколько угодно.

Естественно также ожидать, что и интегральные уравнения вида (1.1), в общем случае, не окажутся разрешимыми в обычном смысле в классе почти-периодических функций Бора. Так как почти-периодические функции определены на всей числовой прямой, можно рассмотреть вместо уравнения (1.1), при фиксированных a и b, уравнение с растущим параметром T, полагая $a = 0$, $b = T > 0$:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^T K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Однако, в пространстве почти-периодических функций к задаче нужен более специфический подход, исходя из того, что ищутся функции, определенные на всей числовой прямой. Интеграл в правой части (1.1) заменим более подходящим средним значением. Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{1.2}$$

Говоря об интегральном уравнении типа Фредгольма в пространстве почти-периодических функций в смысле Бора (а также, в более общем смысле), мы будем подразумевать уравнение вида (1.2). Ядро $K(x, \xi)$ уравнения также предполагается принадлежащим пространству почти-периодических функций от двух переменных из соответствующего класса. Предел в правой части (1.2) может быть заменен, при необходимости, верхним пределом. Основная цель настоящей статьи — доказать, что уравнение (1.2) имеет решение при достаточно естественных условиях над ядром и функцией $f(x)$. Будем применять известные методы теории Фредгольма, с некоторыми видоизменениями, связанными со спецификой рассматриваемого пространства. Отметим также, что здесь рассматривается случай симметричного ядра. Мы установим связь между уравнениями (1.1) и (1.2), и таким образом будем сводить вопрос об исследовании и решении уравнения (1.2) к аналогичным вопросам для некоторого уравнению вида (1.1).

2. Необходимые сведения и леммы

Сначала напомним определение почти-периодических функций Г. Бора (см. [9, с. 41]). Пусть задана действительная функция $f(x)$ на всей числовой оси (заметим, что можно рассмотреть также и произвольную функцию$f : \mathbb{R} \to X$, где X — некоторое нормированное пространство).

Число τ называется ε-почти периодом, если для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Пусть $E \in \mathbb{R}$ — некоторое счетное подмножество в $\mathbb{R}$. Множество E называется относительно плотным, если найдется $L > 0$ такое, что каждый интервал вида

$$a < x < a + L, \quad a \in \mathbb{R}$$

длиной L содержит хотя бы одну точку из множества E.

Функция $f(x)$, непрерывная на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, называется почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ множество всех ε-почти периодов функции$f(x)$ относительно плотно в $\mathbb{R}$.

Существует тесная связь между почти-периодическими и периодическими функциями многих переменных.

Определение 2.1. *Пусть $F_1, F_2, \ldots$ — последовательность непрерывных периодических функций $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Если $F_k \to F$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, то предел этой последовательности, т.е. функция F называется предельно-периодической функцией.*

Из определения ясно, что предельно-периодические функции непрерывны. Аналогично определяется предельно-периодическая функция от счетного числа переменных. Обозначим через $\mathbb{R}^\infty$ множество всех последовательностей действительных чисел вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots)$. Всякую функцию от конечного числа переменных вида $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ можно рассмотреть как функцию $\Phi' : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ от счетного числа переменных, полагая $\alpha_k = 0$ при всех $k > m$.

Определение 2.2. *Пусть задана последовательность непрерывных периодических функций $F_k : \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$, $m_1 < m_2 < \cdots$, $m_k \to \infty$. Если $F_k \to F$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^\infty$, то предел этой последовательности, т.е. функция $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ называется предельно-периодической от счетного числа переменных.*

Нам удобно ввести в $\mathbb{R}^\infty$ (т.е. во множестве всех последовательностей действительных чисел) метрику, превращая его в метрическое пространство. Эта метрика известна под названием метрики Тихонова. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^\infty$ и $x = (x_1, x_2, \ldots,\ x_k, \ldots)$. Введем метрику Тихонова равенством (см. [14]):

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{1-n} \left| x_n - y_n \right|.$$

Мы можем, не нарушая общности, распространить все введенные выше определения, связанные с бесконечномерным случаем, на случай введенного метрического пространства.

Подставляя равные значения $x = x_1 = \ldots = x_m$ вместо независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$, мы получаем диагональную функцию $f(x) = F(x, \ldots, x)$ (или функцию на главной диагонали пространства). Таким же образом, определяется диагональная функция в бесконечномерном случае. Один из основных результатов Бора относительно почти-периодических функций состоит в следующем:

Лемма 2.1 (Г. Бор). *Каждая почти-периодическая функция является диагональной функцией некоторой предельно-периодической функции конечного или счетного числа переменных.*

Сделаем теперь несколько необходимых замечаний о почти-периодических функциях от двух переменных.

Пару действительных чисел (τ, η) назовем парой ε-почти периодов для функции $f(x, y)$, если для любой пары действительных чисел (x, y) имеют место соотношения:

$$|f(x+\tau, y) - f(x, y)| \leq \varepsilon,$$
$$|f(x, y+\eta) - f(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Определение 2.3. *Непрерывная на всей плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ функция называется почти-периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой пары $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ найдется хотя бы одна пара (τ, η) ε-почти периодов в открытом квадрате $(x, x + l) \times (y, y + l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Хорошо известно, что почти-периодическая функция во всей плоскости равномерно приближается тригонометрическими полиномами. Соответствующий результат формулируется следующим образом (см. [3, с. 66]).

Лемма 2.2. *Пусть непрерывная функция $f(x, y)$ почти-периодична в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральные N_ε и L_ε такие, что*

$$\left| f(x, y) - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \sum_{r=1}^{L_\varepsilon} a_{n,r} e^{2\pi i(\tau_n x + \mu_r y)} \right| < \varepsilon$$

для всех $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (здесь числа $a_{n,r}, \tau_n, \mu_r$ являются вещественными).

Из этой леммы в частности следует

Лемма 2.3. *Каждая почти-периодическая функция $f(x, y)$ является диагональной функцией некоторой предельно-периодической функции от двух (конечной или бесконечной) систем переменных.*

Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ является предельно-периодической функцией от двух систем переменных. Это означает, что

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = \lim_{k\to\infty} G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

равномерно в $\mathbb{R}^{n+m}$, причем $G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — периодические функции. Тогда, взяв значение функции G_k на главной диагонали пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, получим почти-периодическую функцию от двух переменных.

В бесконечномерном случае можно переформулировать сказанное и так: найдутся две системы переменных $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ и $y_1, \ldots, y_s, \ldots$ и последовательность периодических по каждой переменной функций $G_k(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что равномерно (в метрике, введенной выше)

$$G(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots) = \lim_{k\to\infty} G_k(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots),$$

при этом

$$K(x, \xi) = G(x, x, \ldots; \xi, \xi, \ldots).$$

В настоящей работе мы рассматриваем простейший случай симметрического ядра, когда обе системы переменных конечные. Тогда, функция

$$G(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$$

будет предельно-периодической от $2m$ переменных, при этом периоды по парам переменных x_i и y_i совпадают.

В работах Г. Бора [9] изучаются средние вида (1.2) на основе теоремы Кронекера о равномерном распределении (mod 1) некоторых кривых в многомерном единичном кубе ([12]). Теорема Кронекера ([7, стр. 345]) состоит в следующем.

Лемма 2.4. *Пусть действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ линейно независимы над полем рациональных чисел, γ — некоторая прямоугольная область в единичном N-мерном кубе. Пусть далее, $I_\gamma(T)$ — мера тех точек $t \in (0, T)$, для которых*

$$(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_N t) \in \gamma(mod 1).$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{I_\gamma(T)}{T} = \Gamma,$$

где Γ обозначает объем области γ.

Нам понадобится следующее определение из [10].

Определение 2.4. *Семейство F функций f, определенных на подмножестве E метрического пространства X, называется равностепенно непрерывным на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, когда $d(x, y) < \delta$, $x \in E$, $y \in E$, $f \in F$; здесь d обозначает расстояние в X.*

Ясно, что каждая функция из равностепенно непрерывного семейства равномерно непрерывна [10]. Следующая лемма доказана в [7, стр. 348].

Лемма 2.5. *Пусть кривая $\gamma(t)$ равномерно распределена по модулю 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть D — замкнутая подобласть единичного куба, измеримая в смысле Жордана; Φ — семейство комплекснозначных непрерывных функций, определенных на D. Если Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то равномерно по $f \in \Phi$ выполняется*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T f(\{\gamma(t)\}) dt = \int_D f dx_1 \ldots dx_N,$$

где в левой части интегрирование берется по таким $t \in (0, T)$, для которых

$$\gamma\,(t) \in D(mod 1)$$

и

$$\{\gamma(t)\} = (\{\gamma_1(t)\}, \ldots, \{\gamma_N(t)\})\,.$$

В частности, лемма 2.5 справедлива для произвольной непрерывной функции f на D. Для приложений полезна следующая лемма [10].

Лемма 2.6. *Пусть K — компактное множество.*

а) если $\{f_n\}$ равномерно сходящаяся последовательность функций, непрерывных на K, то $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K;

б) если $\{f_n\}$ поточечно ограничена и равностепенно непрерывна на K, то $\{f_n\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность и равномерно ограничена на K.

Следующая лемма известна под названием теоремы Гурвица (см. [13, с. 128]).

Лемма 2.7. *Пусть $f_1(z), f_2(z), \ldots$ — последовательность функций, аналитических в некоторой области D, ограниченной простым замкнутым контуром, и пусть $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в D. Предположим, что функция $f(z)$ не равна тождественно нулю. Тогда точка z_0, лежащая внутри D, в том и только в том случае является нулем функции $f(z)$, если в D имеется такая сходящаяся к z_0 последовательность точек z_1, $z_2 \ldots$, что z_n есть нуль функции $f_n(z)$ при $n > n_0 = n_0(z_0)$.*

3. Основные результаты

Основные результаты настоящей статьи выражены в двух теоремах. Для формулировки и доказательства этих теорем нам нужны некоторые подготовительные замечания. Пусть ядро интегрального (или более точно, предельно-интегрального) уравнения (1.2) является равномерной почти-периодической функцией в смысле Г. Бора от двух переменных. Предположим, что уравнение (1.2) имеет почти-периодическое решение $\varphi(x)$. Подставляя в (1.2), рассмотрим равенство:

$$\varphi(x) - f(x) = \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{3.1}$$

Правая часть равенства является почти-периодической по x и имеет почти периоды, совпадающие с почти периодами функции $K(x,\xi)$ по x (в силу симметрии и по ξ). Поэтому, представляя $K(x,y)$ в виде диагональной функции некоторой предельно-периодической функции, мы можем записать:

$$K(x,y) = \lim_{m\to\infty} K_m(x,x,\ldots,x;y,y,\ldots,y), \tag{3.2}$$

где $K_m(x_1,x_2,\ldots,x_{s(m)};y_1,y_2,\ldots,y_{s(m)})$ — периодическая функция с периодами $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s(m)}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s(m)}$. Поскольку функции $K_m(x_1,x_2,\ldots,x_{s(m)};y_1,y_2,\ldots,y_{s(m)})$ периодические с периодами, указанными выше, и непрерывны, то они имеют следующего вида разложение в ряд Фурье

$$\begin{aligned} &K_m(x_1,x_2,\ldots,x_{s(m)};y_1,y_2,\ldots,y_{s(m)}) \\ &\sim \sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{i_{s(m)}=-\infty}^{\infty}\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{j_{s(m)}=-\infty}^{\infty} a_{i_1\cdots j_m} \\ &\times e^{2\pi i(i_1\theta_1 x_1+\cdots+i_{s(m)}\theta_{s(m)}x_{s(m)}+j_1\theta_1 y_1+\cdots+j_{s(m)}\theta_{s(m)}y_{s(m)})}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\theta_1,\ldots,\theta_{s(m)}$ являются обратными значениями периодов.

Перейдем к диагональной функции в (3.3), подставляя вместо переменных одни и те же значения $x = x_1 = \ldots = x_{s(m)}$ и $y = y_1 = \ldots = y_{s(m)}$. Положим

$$\begin{aligned} &K_m(x,x,\ldots,x;y,y,\ldots,y) \\ &\quad = K_m(x_1,x_2,\ldots,x_{s(m)};y_1,y_2,\ldots,y_{s(m)})|_{x=x_1=\cdots=x_{s(m)},y=y_1=\cdots=y_{s(m)}}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются функции $H_m(x,x,\ldots,x)$. Возвращаясь к (3.1), заменим ядро и решение уравнения их выражениями через предельно-периодические функции, введенные выше:

$$K(x,\xi) = G(x,x,\ldots;\xi,\xi,\ldots), \qquad \varphi(\xi) = (\xi,\xi,\ldots),$$

где

$$\begin{aligned} G(x,x,\ldots;\xi,\xi,\ldots) &= \lim_{m\to\infty} G_m(x,x,\ldots,x;\xi,\xi,\ldots,\xi), \\ \varphi(\xi) = (\xi,\xi,\ldots) &= \lim_{m\to\infty} H_m(\xi,\xi,\ldots,\xi). \end{aligned}$$

В правых частях этих равенств стоят предельно-периодические функции от $2s(m)$ и $s(m)$ переменных, соответственно. Мы получим интеграл

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T G(x,x,\ldots;\xi,\xi,\ldots)H(\xi,\xi,\ldots)d\xi.$$

Поскольку две функции, стоящие под интегралом, являются равномерным пределом периодических функций, то мы можем под последним интегралом заменить предельно-периодические функции периодическими функциями, допуская погрешность, которая равномерно будет стремиться к нулю (при $m \to \infty$):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_m(x, x, \dots; \xi, \xi, \dots) H_m(\xi, \xi, \dots) d\xi. \tag{3.4}$$

Как известно ([2]), можно предполагать обратные значения $\theta_1, \dots, \theta_{s(m)}$ периодов линейно независимыми (в противном случае, выражая некоторый из них рациональным образом через остальные, мы можем заменить периодическую функцию K_m на другую, зависящую от меньшего числа неизвестных, которая на главной диагонали пространства дает ту же самую периодическую функцию). Рассмотрим кривую $\gamma(t)$, определенную равенством $\gamma(t) = \left(2\pi t \lambda_1^{-1}, \dots, 2\pi t \lambda_{s(m)}^{-1}\right)$. Тогда последний интеграл (3.1) является интегралом леммы 2.5, взятым по этой кривой, равномерно распределенной в кубе $\Delta_{s(m)} = \Delta$ со сторонами, равными 1. Применяя лемму 2.5, получим:

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T f(\{\gamma(t)\}) dt = \int_\Delta f dy_1 \dots dy_{s(m)},$$

где $N = n$, $f(y_1, \dots, y_{s(m)}) = G_m(x_1, \dots, x_{s(m)}; y_1, \dots, y_{s(m)}) H_m(y_1, \dots, y_{s(m)})$. В первых $s(m)$ компонентах значения переменных произвольные, и мы можем при необходимости заменить их значением x (чтобы получить вектор $(x, \dots, x)$). Таким образом, наше интегральное уравнение превращается в обычное уравнение Фредгольма:

$$H_k(\bar{x}) - f_k(\bar{x}) = \lambda \int_\Delta G_k(\bar{x}, \bar{\xi}) H_k(\bar{\xi}) d\bar{\xi};\ \bar{x} \in \Delta. \tag{3.5}$$

Следовательно, предполагая существование решений, мы пришли к уравнению (3.5). Поэтому, разрешимость уравнения (3.5) является необходимым условием для существования решения данного уравнения (1.2).

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (3.5) *разрешимо при всех рассматриваемых k и имеет периодическое решение, с периодами по всем переменным равными 1. Если последовательность решений равномерно ограничена в единичном кубе, то уравнение* (1.2) *имеет почти-периодическое решение.*

Доказательство. Продолжим найденные решения $H_k(\bar{x})$ уравнения (3.5), при каждом k, периодически по всем переменным вектора $\bar{x} \in \Delta$, до функции, определенной во всем пространстве $\mathbb{R}^{s(m)}$, и обозначим полученные функции снова как $H_k(\bar{x})$. Произведем подстановку, заменяя x_i числом $\theta_i x_i$. Тогда мы получим последовательность функций

$$Y_k(\bar{x}) = H_k(\theta_1 x_1, \dots, \theta_{s(m)} x_{s(m)}),$$

которые непрерывны и имеют периоды $\lambda_1, \dots, \lambda_{s(m)}$. Докажем, что эта последовательность равномерно сходится к некоторой предельно-периодической функции $Y(\bar{x})$, и что соответствующая диагональная функция, будучи почти-периодической, является решением уравнения (1.2). Поскольку, существует равномерный предел

$$\tilde{K}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{m\to\infty} G_m(x_1, x_2, \dots, x_{s(m)}; y_1, y_2, \dots, y_{s(m)}), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Delta,$$

то по лемме 2.1, a) эта последовательность равностепенно непрерывна. Докажем, что последовательность решений также равностепенно непрерывна. По условию, множество решений равномерно ограничено:

$$|Y_k(\bar{x})| \le L, \quad \bar{x} \in \Delta, \quad k \ge 1,$$

при некоторой постоянной L. Тогда,

$$|H_k(\bar{x}) - H_k(\bar{x}')| \le |f_k(\bar{x}) - f_k(\bar{x}')| + L\,|\lambda| \int_\Delta \left|G_k(\bar{x},\bar{\xi}) - G_k(\bar{x}',\bar{\xi})\right| d\bar{\xi}$$
$$\le \varepsilon(1 + L\,|\lambda|),$$

как только $|\bar{x} - \bar{x}'| < \delta$. Из этого соотношения, в силу произвольности ε, следует требуемое утверждение. Тогда, по лемме 2.6, б), последовательность решений содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Переходя равномерно к пределу по такой подпоследовательности, мы получаем, что предельно-периодическая функция, определяемая этой подпоследовательностью, дает на главной диагонали пространства некоторую почти-периодическую функцию. Тогда это решение будет удовлетворять уравнению (1.2). Теорема 3.1 доказана. □

Исследуем теперь разрешимость уравнения (3.5), и установим условия, при которых (3.5) имеет равномерно ограниченную последовательность решений относительно k.

Введем аналоги известных понятий из теории интегральных уравнений Фредгольма ([11], [13]). Аналоги функций Фредгольма $D(\lambda)$ и $D(x,y;\lambda)$ определим следующим образом.

Пусть

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \lambda^n}{n!},$$

где

$$b_n = (-1)^n \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \times \int_0^T \cdots \int_0^T \begin{vmatrix} K(x_1,\xi_1) & K(x_1,\xi_2) & \cdots & K(x_1,\xi_n) \\ K(x_2,\xi_1) & K(x_2,\xi_2) & \cdots & K(x_2,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n,\xi_1) & K(x_n,\xi_2) & \cdots & K(x_n,\xi_n) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n.$$

Аналогичным образом, мы полагаем:

$$D_k(x,y;\lambda) = \lambda D(\lambda) K(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{Q_n(x,y)\lambda^{n+1}}{n!}, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

где

$$Q_n(x,y) = -\lim_{T\to\infty} \frac{n}{T^n} \int_0^T \cdots \int_0^T P_n(x,\xi,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) K(\xi,y) d\xi d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1},$$

при этом

$$[P_n(x,\xi,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) = \begin{vmatrix} K(x,\xi) & K(x,\xi_1) & \cdots & K(x,\xi_{n-1}) \\ K(\xi_1,\xi) & K(\xi_1,\xi_1) & \cdots & K(\xi_1,\xi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\xi_{n-1},\xi) & K(\xi_{n-1},\xi_1) & \cdots & K(\xi_{n-1},\xi_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Аналогично рассуждениям, проведенным в [11], [13], можно показать, что аналоги функций Фредгольма являются целыми функциями, и в силу симметричности ядра уравнение $D(\lambda) = 0$ имеет только действительные корни [1, стр. 319]. И в нашем случае, эти корни имеют большое значение для уравнения (1.2). Здесь мы рассмотрим только случай, когда λ — действительное число, не являющееся корнем уравнения $D(\lambda) = 0$.

Теорема 3.2. *Пусть λ — действительное число, $D(\lambda) \ne 0$. Тогда уравнение* (1.2) *имеет единственное почти-периодическое решение и это решение дается формулой*

$$\varphi(x) = f(x) + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi) \frac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)} d\xi. \tag{3.6}$$

Доказательство. Проводя рассуждения доказательства теоремы 3.1, рассмотрим уравнение (3.5) при фиксированном k. Как известно ([11, с. 303]) применение соображений теории систем линейных уравнений приводит к выражению для функции Фредгольма $D_k(\lambda)$:

$$D_k(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n!},$$

причем

$$a_n = (-1)^n \int_{\Delta} \cdots \int_{\Delta} \begin{vmatrix} G_k(\bar{x}_1, \bar{\xi}_1) & G_k(\bar{x}_1, \bar{\xi}_2) & \cdots & G_k(\bar{x}_1, \bar{\xi}_n) \\ G_k(\bar{x}_2, \bar{\xi}_1) & G_k(\bar{x}_2, \bar{\xi}_2) & \cdots & G_k(\bar{x}_2, \bar{\xi}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k(\bar{x}_n, \bar{\xi}_1) & G_k(\bar{x}_n, \bar{\xi}_2) & \cdots & G_k(\bar{x}_n, \bar{\xi}_n) \end{vmatrix} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \cdots d\bar{\xi}_n;$$

интегрирование проводится в единичном кубе Δ. Интеграл в правой части последнего равенства имеет кратность $ns(k)$. Функция Фредгольма $D_k(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$ представляется сходящейся на всей комплексной плоскости рядом ([11, с. 304]):

$$D_k(\bar{x}, \bar{y}; \lambda) = \lambda D(\lambda) K(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{Q_n(\bar{x}, \bar{y}) \lambda^{n+1}}{n!}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Delta,$$

где

$$Q_n(\bar{x}, \bar{y}) = -n \int_{\Delta} \cdots \int_{\Delta} P_n K(\bar{\xi}, \bar{y}) d\bar{\xi} d\bar{\xi}_1 \cdots d\bar{\xi}_{n-1},$$
$$d\bar{\xi}_j = d\xi_{j1} \cdots d\xi_{js(k)}, \quad \xi_{ji} \in \Delta,$$

при этом

$$P_n = P_n(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}) = \begin{vmatrix} G_k(\bar{x}, \bar{\xi}) & G_k(\bar{x}, \bar{\xi}_1) & \cdots & G_k(\bar{x}, \bar{\xi}_{n-1}) \\ G_k(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}) & G_k(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_1) & \cdots & G_k(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k(\bar{\xi}_{n-1}, \bar{\xi}) & G_k(\bar{\xi}_{n-1}, \bar{\xi}_1) & \cdots & G_k(\bar{\xi}_{n-1}, \bar{\xi}_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Докажем, что в любой замкнутой области комплексной плоскости равномерно по z имеют место предельные соотношения:

$$D(z) = \lim_{k \to \infty} D_k(z), \quad D(x, y, z) = \lim_{k \to \infty} D_k(x, \ldots, x, y, \ldots, y; z).$$

Не нарушая общности, можем предполагать, что $|z| \le M$, при достаточно большом M. Поскольку функция $K(x, y)$ является почти периодической, то она ограничена на всей числовой прямой, т.е. найдется положительная постоянная L, такая, что $|K(x, y)| \le L$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число, а N натуральное число, определяемое ниже. Оценим N-й остаток ряда для $D(\lambda)$. По неравенству Адамара ([11], [13]), имеем:

$$|b_n| \le L^n n^{n/2}.$$

Поэтому,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n \lambda^n}{n!} \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(|\lambda|\, L\sqrt{n})^n}{n!} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{eLM}{\sqrt{N}} \right)^n.$$

Тогда, взяв N достаточно большим, можно добиться выполнения неравенства

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n \lambda^n}{n!} \right| \le 0.25\varepsilon.$$

Далее, согласно соотношениям, полученным выше

$$|D(\lambda)-D_k(\lambda)| \leq 0.5\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n-a_n|\, M^n}{n!} \leq 0.5\varepsilon + eM^N \max_{n\leq N} |b_n-a_n|\,.$$

Теперь заметим, что если раскрыть определитель в выражении для b_n, и затем почленно интегрировать полученную сумму, применяя рассуждения, проведенные выше, мы заметим, что для достаточно больших k выражение для a_n будет сколь угодно мало отличаться от b_n, т.к. при $n \leq N$ соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} a_n \to b_n$ выполняется равномерно на главной диагонали. Поэтому, при достаточно больших k имеем:

$$|D(\lambda)-D_k(\lambda)| \leq \varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость

$$D(z) = \lim_{k\to\infty} D_k(z)$$

в круге $|z| \leq M$. Аналогично доказывается равномерная сходимость

$$D(x,y;z) = \lim_{k\to\infty} D_k(x,\dots,x,y,\dots,y;z).$$

Для завершения доказательства теоремы 3.2 мы должны установить разрешимость уравнения (1.2) и единственность, и доказать формулу для решения уравнения (1.2).

Пусть λ — действительное число, такое, что $D(\lambda) \neq 0$. Возьмем ближайший к числу λ нуль λ_0 функции $D(\lambda)$ и $|\lambda_0-\lambda| = r$. По теореме Гурвица ([4, с. 128]), в окрестности $|\lambda - z| \leq r/2$ числа λ могут находиться нули не более чем конечного числа функций $D_k(\lambda)$. Поэтому, для достаточно больших k имеем: $D_k(\lambda) \neq 0$ (при этом, $D_k(\lambda)$ достаточна близка к $D(\lambda)$). Для таких значений k уравнение (3.5) имеет единственное решение задаваемое формулой:

$$H_k(\bar{x}) = f_k(\bar{x}) + \int_{\Delta} f_k(\bar{\xi}) \frac{D_k(\bar{x},\bar{\xi};\lambda)}{D_k(\lambda)} d\bar{\xi}, \quad d\bar{\xi} = d\xi_1 \cdots d\xi_{s(k)}, \quad \xi_j \in \Delta_j.$$

Поскольку сходимость по k равномерна, то из проведенных выше оценок и рассуждений следует равномерная ограниченность этих решений. Тогда, по теореме 3.1, уравнение (1.2) имеет почти-периодическое решение. Подставляя вместо переменных $\bar{x}$ вектор $\bar{x}' = (x,x,\dots,x)$ под знаком интеграла, получаем

$$\begin{aligned} H_k(\bar{x}') &= f_k(\bar{x}') + \int_{\Delta} f_k(\bar{\xi}) \frac{D_k(\bar{x}',\bar{\xi};\lambda)}{D_k(\lambda)} d\bar{\xi} \\ &= f_k(\bar{x}') + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_k(\bar{\xi}') \frac{D_k(\bar{x}',\bar{\xi}';\lambda)}{D_k(\lambda)} d\xi. \end{aligned}$$

В силу равномерной сходимости можно под интегралом переходить к пределу по k, переставляя также и порядки перехода к пределу. Действительно, вычитая последнее выражение из правой части (3.6), получаем следующее выражение

$$f(x) - f_k(\bar{x}') + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(\xi) \frac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)} - f_k(\bar{\xi}') \frac{D_k(\bar{x}',\bar{\xi}';\lambda)}{D_k(\lambda)} \right) d\xi.$$

При достаточно больших k, эта разность по модулю может быть произвольно малой. Это доказывает вышесказанное. Поэтому, мы получаем решение (3.6) уравнения (1.2). Единственность решения следует из единственности решений уравнения (3.5). Теорема 3.2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б.М. Левитан. *Почти-периодические функции.* Москва: ГИТТЛ. 1953. 396 с.
2. Б.М. Левитан, В.В. Жиков. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* Москва: изд.-во Московского Университета. 1978. 205 с.
3. A.S. Besicovitch. *Almoct periodic functions.* Cambridge. 1932. 180 pp.
4. Е. Титчмарш. *Теория функций.* Москва: Наука, ГФМЛ. 1980. 463 с.
5. В.В. Жиков. *О разрешимости линейных уравнений в классах почти-периодических функций Безиковича А. и Бора Г.* // Мат. заметки, **18**:4, 553–560 (1975).
6. J. Favar. *Sur les equation differentielles a coefficients presqueperiodiques* // Acta-Mathematika. **51**, 31–81 (1927).
7. С.М. Воронин, А.А. Карацуба. *Дзета-функция Римана.* Москва: Физматлит. 1994. 376 с.
8. С.М. Воронин. *О дифференциальной независимости ζ-функций* // Докл. АН СССР. **209**:6, 1264–1266 (1973).
9. Г. Бор. *Почти-периодические функции.* Москва: Книжный дом «Либроком». 2009. 128 с.
10. У. Рудин. *Основы математического анализа.* Москва: Мир. 1976. 320 с.
11. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. *Курс современного анализа, ч.I, изд. второе.* Москва: ГИФМЛ. 1963. 344 с.
12. К. Чандрасекхаран. *Введение в аналитическую теорию чисел.* Москва: Мир. 1974. 189 с.
13. И.И. Привалов. *Интегральные уравнения.* М.-Л: НТИ. 1935. 248 с.
14. I.Sh. Jabbarov. *On a new measure on infinite dimensional unite cube* // Chebyshevskii Sb., **15**:2, 122–133 (2014).

Ильгар Шикар оглы Джаббаров,
Гянджинский государственный университет,
пр. Г. Алиева, 459,
AZ2000, г. Гянджа, Азербайджан
E-mail: ilgar_js@rambler.ru

Нигяр Элман кызы Аллахярова,
Гянджинский государственный университет,
пр. Г. Алиева, 459,
AZ2000, г. Гянджа, Азербайджан