

УДК 517.984.46

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО ДВУХЧАСТИЧНОГО РЕШЕТЧАТОГО ГАМИЛЬТониАНА

Ю.Х. ЭШКАБИЛОВ, Д.Ж. КУЛТУРАЕВ

Аннотация. Линейные самосопряженные операторы в модели Фридрикса возникают в различных областях, например, в теории возмущения спектра самосопряженных операторов, в квантовой теории поля, в теории двухчастичных и трехчастичных дискретных операторов Шредингера, в гидродинамике и т.д. Оператор H в модели Фридрикса представляется суммой двух операторов в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. $H = H_0 + \varepsilon K$, $\varepsilon > 0$, где H_0 – оператор умножения функции, K – компактный интегральный оператор. Для операторов в модели Фридрикса необходимо решить следующие задачи: 1) при каких условиях дискретный спектр является пустым множеством? 2) при каких условиях дискретный спектр является непустым множеством? 3) найти условия, достаточные для того, чтобы у оператора в модели Фридрикса дискретный спектр был конечным множеством; 4) найти условия, достаточные для того, чтобы у оператора в модели Фридрикса дискретный спектр был бесконечным множеством. Известно, что если ядро интегрального оператора в модели вырожденное, то дискретный спектр соответствующего оператора в модели Фридрикса является конечным множеством. Следовательно, для того, чтобы у оператора в модели Фридрикса дискретный спектр был бесконечным множеством необходимо, чтобы интегральный оператор в модели был невырожденным. В статье рассматриваются линейные ограниченные самосопряженные операторы в модели Фридрикса, у которых интегральный оператор в модели с невырожденным ядром. Настоящая работа посвящена изучению первого и четвертого вопросов. Получен один признак бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрикса. Исследован дискретный спектр одного двухчастичного дискретного оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$ (где ν – мерная целочисленная решетка), в котором преобразование Фурье оператора $Q(\varepsilon)$ представляется в виде $H = H_0 + \varepsilon K$, $\varepsilon > 0$. Показано, что структура дискретного спектра оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ сильно зависит от размерности ν решетки. Доказано, что в случае $\nu = 1, 2$ при всех $\varepsilon > 0$ дискретный спектр оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ бесконечен, а в случае $\nu \geq 3$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ дискретный спектр оператора Шредингера $Q(\varepsilon)$ – пустое множество.

Ключевые слова: модель Фридрикса, двухчастичный гамильтониан, самосопряженный оператор, спектр, существенный спектр, дискретный спектр, невырожденное ядро.

Mathematics Subject Classification: 47A10, 47A11, 47A13, 47A25, 47B38

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение спектра является основной задачей в теории операторов Шредингера. Пусть $u(x)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_\nu = [0, 1]^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. K – интегральный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu)$ с ядром $k(x, s) \in L_2(\Omega_\nu^2)$, где $k(x, s) = \overline{k(s, x)}$. Ряд вопросов квантовой механики и статистической физики (см. [1]–[5])

Yu.Kh. Eshkabilov, D.J. Kulturaev, ON DISCRETE SPECTRUM OF ONE TWO-PARTICLE LATTICE HAMILTONIAN.

© ЭШКАБИЛОВ Ю.Х., КУЛТУРАЕВ Д.Ж. 2022.

Поступила 21 мая 2021 г.

приводит к исследованию дискретного спектра оператора H в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu)$, действующего по формуле

$$H = H_0 - K, \quad (1.1)$$

где

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad (Kf)(x) = \int_{\Omega_\nu} k(x, s)f(s)d\mu(s).$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега, $\mu()$ – мера Лебега на \mathbb{R}^ν . Из классической теоремы Вейля о компактном возмущении [6] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(H)$ оператора H состоит из множества значений функции $u(x)$, т.е. $\sigma_{ess}(H) = [u_{min}, u_{max}]$, где $u_{min} = \min_{x \in \Omega_\nu} u(x)$, $u_{max} = \max_{x \in \Omega_\nu} u(x)$.

Оператор вида (1.1) называется оператором в модели Фридрихса. Надо отметить, что модель Фридрихса применяется в разных областях науки. В 1937 году в работе [7] К. Фридрихс предложил рассмотреть данную модель в теории возмущений существенных спектров самосопряженных операторов. Затем К. Фридрихс показал [8], что исследование одночастичного оператора Шредингера сводится к изучению оператора в модели Фридрихса. В статье [2] при исследовании спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа, использованы свойства операторов в модели Фридрихса. Кроме того, решение задач, связанных с распространением волн и проблемой цунами, приводится к исследованию спектра операторов в модели Фридрихса [9]. Более того, спектральные свойства самосопряженных операторов в модели Фридрихса широко используются в исследовании спектров двухчастичных и трехчастичных дискретных операторов Шредингера [5], [10]–[12] и т.д.

Изучению спектра операторов в модели Фридрихса посвящен ряд публикаций (см., например, [13]–[20] и др.).

Пользуясь принципом минимакса и максимина, доказано [14], что, если ядро интегрального оператора K вырожденное, то дискретный спектр в модели Фридрихса (1.1) является конечным. Отсюда следует, что для того, чтобы оператор в модели (1.1) имел бесконечный дискретный спектр, необходимо, чтобы ядро интегрального оператора K было невырожденным.

В данной статье рассматривается двухчастичный гамильтониан $Q(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$, где \mathbb{Z}^ν – ν мерная целочисленная решетка. Преобразование Фурье гамильтониана $Q(\varepsilon)$ является самосопряженным оператором в модели Фридрихса с невырожденным ядром. В случае $\nu = 1, 2$ при всех $\varepsilon > 0$ доказано существование бесконечного числа отрицательных собственных значений гамильтониана $Q(\varepsilon)$. В случае $\nu \geq 3$ доказано, что при достаточно малых ε в гамильтониане $Q(\varepsilon)$ отсутствует отрицательное собственное значение.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть \mathcal{H} – сепарабельное гильбертово пространство, $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ линейный ограниченный самосопряженный оператор. Через $\sigma(A)$, $\sigma_{ess}(A)$ и $\sigma_{disc}(A)$ обозначим, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр оператора A (см. [21]).

Введем также следующие обозначения

$$E_{min}(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\}, \quad E_{max}(A) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\}.$$

Число $E_{min}(A)$ (число $E_{max}(A)$) будем называть нижним краем (верхним краем) существенного спектра оператора A .

Через $\{\mu_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ обозначим ограниченную возрастающую последовательность вещественных чисел, построенную по принципу минимакса для заданного самосопряженного

оператора A (см. [14]). Тогда каждое число $\mu_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = E_{\min}(A)$, т.е.

$$\{\mu_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}} = \sigma_{\text{disc}}(A) \cap (-\infty, E_{\min}(A)),$$

либо существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что каждое число $\mu_k(A)$, $k \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ является собственным значением оператора A и $\mu_k(A) = E_{\min}(A)$ при всех $k > n_0$, т.е.

$$\{\mu_1(A), \mu_2(A), \dots, \mu_{n_0}(A)\} = \sigma_{\text{disc}}(A) \cap (-\infty, E_{\min}(A)).$$

Линейный ограниченный самосопряженный оператор A называется положительным и пишется $A \geq 0$ или $0 \leq A$, если $(Ax, x) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$.

Лемма 2.1 ([6], [14]). Пусть $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейные ограниченные самосопряженные операторы, $E_{\min}(A) = E_{\min}(B)$ и $A \leq B$. Тогда $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$, $n \in \mathbb{N}$, здесь

$$\mu_k(A) = \sup_{L \subset \mathcal{H}, \dim L = k-1} \inf_{\|x\|=1, x \perp L} (Ax, x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_\nu \times \Omega_\nu)$ рассмотрим оператор H_1 в модели Фридрихса

$$H_1 = H_0 - K, \tag{2.1}$$

где

$$(H_0 f)(x, y) = u(x, y)f(x, y), \quad (Kf)(x, y) = \int_{\Omega_\nu} \int_{\Omega_\nu} k(x, y; s, t)f(s, t)d\mu(s)d\mu(t).$$

Здесь $u(x, y) \in C(\Omega_\nu \times \Omega_\nu)$ – неотрицательная и $0 \in \text{Ran}(u)$, $k(x, y; s, t) \in L_2(\Omega_\nu^2 \times \Omega_\nu^2)$ и $k(x, y; s, t) = \overline{k(s, t; x, y)}$.

Пусть оператор K имеет бесконечное количество положительных собственных значений $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_n > \dots$, $\eta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ и $\{g_n(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}}$, соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. Из самосопряженности оператора H_1 (2.1) следует, что $\sigma(H_1) \subset \mathbb{R}$, а из положительности оператора K вытекает, что $\sigma(H_1) \cap (u_{\max}, \infty) = \emptyset$, поэтому дискретный спектр оператора H_1 может лежать только в полуоси $(-\infty, 0)$.

Для любого $\xi < 0$ определим интегральные операторы

$$P(\xi) = K^{\frac{1}{2}}r_0(\xi)K^{\frac{1}{2}}, \quad R(\xi) = K^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1}{2}}(\xi),$$

где $r_0(\xi)$ – резольвента мультипликатора H_0 . Из представления $P(\xi) = R(\xi)(R(\xi))^*$ следует положительность оператора $P(\xi)$. Решение f_0 уравнения $H_1 f = \xi f$ и неподвижные точки φ оператора $P(\xi)$ связаны соотношением

$$f_0 = r_0(\xi)K^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad \varphi = K^{\frac{1}{2}}f_0. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2 ([20]). Число $\xi < 0$ является собственным значением оператора H_1 тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ есть собственное значение оператора $P(\xi)$.

Из леммы 2.2 следует, что $\dim \text{Ker}(H_1 - \xi I) = \dim \text{Ker}(P(\xi) - I)$, $\xi < 0$.

Положим

$$\Phi(\xi) = \int_{\Omega_\nu} \int_{\Omega_\nu} \frac{dx dy}{u(x, y) - \xi}, \quad \xi < 0.$$

Теорема 2.1. Пусть $u(x, y) = u_0(y)$ и $k(x, y; s, t) = k_0(x, s)$ в модели H_1 (2.1).

Если $\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi(\xi) = M < +\infty$, и для некоторого индекса $n_0 \in \mathbb{N}$ выполняется условие $M\eta_{n_0} > 1$, то оператор H_1 (2.1) имеет n_0 количество отрицательных собственных

значений: $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ и соответствующие собственные функции имеют следующий вид

$$f_k(x, y) = \frac{g_k^0(x)}{u_0(y) - \xi_k}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n_0\}. \quad (2.3)$$

Доказательство. В случае $\xi < 0$ для ядра $p(\xi, x; s)$ интегрального оператора $P(\xi)$ справедливо равенство $p(\xi; x, s) = \Phi(\xi)k_0(x, s)$. Следовательно,

$$P(\xi) = \Phi(\xi)K. \quad (2.4)$$

Это означает, что собственные функции оператора K также являются собственными функциями оператора $P(\xi)$. При условии теоремы 2.1 ненулевыми собственными значениями оператора K являются числа η_n , $n \in \mathbb{N}$, им соответствуют собственные функции $g_n(x, y) = g_n^0(x) \in L_2(\Omega_\nu)$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда из (2.4) следует, что числа

$$\lambda_n(\xi) = \eta_n \Phi(\xi), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

являются собственными значениями оператора $P(\xi)$.

В силу леммы 2.2 получим

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\eta_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Ясно, что функция $\Phi(\xi)$ положительна и возрастает на $(-\infty, 0)$, так как

$$\Phi'(\xi) = \int_{\Omega_\nu} \frac{dy}{(u_0(y) - \xi)^2} \geq 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi(\xi) = M, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \Phi(\xi) = 0.$$

Если $M\eta_{n_0} > 1$, то уравнение (2.6) имеет n_0 количества отрицательных решений $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n_0} < 0$. Из леммы 2.2 следует, что каждое из чисел ξ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ являются собственными значениями оператора H_1 . Так как оператор $P(\xi)$ имеет собственные функции $g_k(x, y) = g_k^0(x)$, $k \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, то из соотношения (2.2) заключаем, что собственному значению ξ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ оператора H_1 соответствуют собственные функции $f_k(x, y)$ вида (2.3). □

В силу теоремы 2.1 вытекает следующее предложение.

Предложение 2.1. Пусть $u(x, y) = u_0(y)$ и $k(x, y; s, t) = k_0(x, s)$ в модели (2.1).

a) Если $\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi(\xi) = +\infty$, то оператор H_1 имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений ξ_n , $n \in \mathbb{N}$.

b) Если $\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi(\xi) = M < \infty$ и $M\eta_{n_1} < 1$, то у оператора H_1 отсутствует отрицательное собственное значение.

На $(-\infty, 0)$ определим следующие функции

$$\Phi_1(\nu; \xi) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_\nu}{\sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k) - \xi}, \quad \text{где } \mathbb{T} = [-\pi, \pi].$$

Пользуясь свойствами тригонометрической функции $\cos y$, можно доказать

Лемма 2.3. a) Если $\nu = 1, 2$, то $\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi_1(\nu; \xi) = +\infty$.

b) Если $\nu \geq 3$, то $\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi_1(\nu; \xi) < \infty$.

3. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО РЕШЕТЧАТОГО ГАМИЛЬТониАНА $Q(\varepsilon)$
НА РЕШЕТКЕ $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$

Рассмотрим двухчастичный решетчатый гамильтониан [22]

$$Q(\varepsilon) = Q_0 - \varepsilon Q_1, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

действующий в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu)$ ($\nu \in \mathbb{N}$), здесь кинетическая энергия Q_0 задается сверткой с функцией общего вида:

$$(Q_0\phi)(m, n) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^\nu} v_0(m - k, n - l)\phi(k, l),$$

а потенциальная энергия Q_1 равна

$$(Q_1\phi)(m, n) = v_1(m, n)\phi(m, n).$$

Пусть кинетическая энергия имеет вид $v_0(m, n) = u_1(m)u_2(n)$, где

$$u_1(m) = \begin{cases} -2a_1\nu, & \text{если } m = 0, \\ a_1, & \text{если } |m| = 1, \\ 0, & \text{для других значений } m \in \mathbb{Z}^\nu, \end{cases}$$

$$u_2(n) = \begin{cases} -2a_2\nu, & \text{если } n = 0, \\ a_2, & \text{если } |n| = 1, \\ 0, & \text{для других значений } n \in \mathbb{Z}^\nu, \end{cases}$$

где $a_1, a_2 > 0$ и $|m| = |m_1| + |m_2| + \dots + |m_\nu|$, $m \in \mathbb{Z}^\nu$.

Определим потенциальную функцию

$$v_1(m, n) = \begin{cases} \alpha_0, & \text{если } m = n = 0, \\ \beta_q, & \text{если } m = 0, n \in \{\pm qe_j\}, q \in \mathbb{N}, \\ \alpha_p, & \text{если } m \in \{\pm pe_j\}, n = 0, p \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{для других значений } m, n \in \mathbb{Z}^\nu, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_p, \beta_q > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_p < \infty$, $\sum_{q \in \mathbb{N}} \beta_q < \infty$, $e_j = (\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{j}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^\nu$.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ и $\mathcal{F} : l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$ -преобразование Фурье, при котором функции $\phi(m, n)$ на решетке $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$ переходят в функции $f(x, y)$ на $\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$ по правилу

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \phi(p^{(1)}, q^{(1)}) \exp(i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]).$$

Лемма 3.1. Преобразование Фурье $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ оператора $Q(\varepsilon)$ (3.1) действует в $L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$ по формуле

$$\tilde{H}_2(\varepsilon)f(x, y) = H_0^{(2)}f(x, y) - \varepsilon K_2f(x, y), \quad (3.2)$$

здесь

$$H_0^{(2)}f(x, y) = u_0^{(2)}(x, y)f(x, y), \quad K_2f(x, y) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} k_2(x, y; s, t)f(s, t)dsdt$$

и

$$u_0^{(2)}(x, y) = 4a_1a_2 \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos x_k) \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k),$$

ядро $k_2(x, y; s, t)$ – невырожденное:

$$\begin{aligned} k_2(x, y; s, t) &= \lambda_0 \varphi_0(x, y) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_p^{(1)}(x_i) \varphi_p^{(1)}(s_i) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_p^{(2)}(x_i) \varphi_p^{(2)}(s_i) \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q^{(2)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_q^{(1)}(y_i) \varphi_q^{(1)}(t_i) + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q^{(2)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_q^{(2)}(y_i) \varphi_q^{(2)}(t_i), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (2\pi)^\nu \alpha_0, \quad \lambda_p^{(1)} = (2\pi)^{2\nu} \alpha_p, \quad \lambda_q^{(2)} = (2\pi)^{2\nu} \beta_q; \\ \varphi_0(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^\nu}, \quad \varphi_p^{(1)}(x_i) = \frac{\cos px_i}{\sqrt{2^{2\nu-1}\pi^\nu}}, \quad \varphi_p^{(2)}(x_i) = \frac{\sin px_i}{\sqrt{2^{2\nu-1}\pi^\nu}}, \quad i = 1, 2, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Доказательство. I. Сначала рассмотрим преобразование Фурье оператора Q_0 :

$$\mathcal{F} : Q_0 \rightarrow H_0^{(2)}.$$

Положим

$$Q_0 \phi(m, n) = \psi_1(m, n), \quad \psi_1(m, n) \in l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu), \quad \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) = e^{i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \psi_1(m, n) &\rightarrow g_1(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \psi(p^{(1)}, q^{(1)}) e^{i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \left[\sum_{k, l \in \mathbb{Z}^\nu} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \phi(k, l) \right] \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \\ &= \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^\nu} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \left(\int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} f(s, t) \overline{\zeta_{k, l}(s, t)} ds dt \right) \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} f(s, t) \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^\nu} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \overline{\zeta_{k, l}(s, t)} ds dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} f(s, t) \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{\substack{p^{(1)} - k = 0 \\ q^{(1)} - l = 0 \\ k, l \in \mathbb{Z}^\nu}} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \overline{\zeta_{k, l}(s, t)} ds dt \\ &+ \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} f(s, t) \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{\substack{|p^{(1)} - k| = 1 \\ q^{(1)} - l = 0 \\ k, l \in \mathbb{Z}^\nu}} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \overline{\zeta_{k, l}(s, t)} ds dt \\ &+ \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} f(s, t) \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{\substack{p^{(1)} - k = 0 \\ |q^{(1)} - l| = 1 \\ k, l \in \mathbb{Z}^\nu}} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \overline{\zeta_{k, l}(s, t)} ds dt \\ &+ \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} f(s, t) \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{\substack{|p^{(1)} - k| = 1 \\ |q^{(1)} - l| = 1 \\ k, l \in \mathbb{Z}^\nu}} v_0(p^{(1)} - k, q^{(1)} - l) \zeta_{p^{(1)}, q^{(1)}}(x, y) \overline{\zeta_{k, l}(s, t)} ds dt \\ &= T_1 f(x, y) + T_2 f(x, y) + T_3 f(x, y) + T_4 f(x, y), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu). \end{aligned}$$

Здесь через T_1, T_2, T_3, T_4 обозначены операторы, которые участвуют в последнем выражении по порядкам в слагаемых. Для каждого оператора $T_k, k = 1, 2, 3, 4$ имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} T_1 f(x, y) &= 4a_1 a_2 \nu^2 f(x, y), & T_2 f(x, y) &= -4a_1 a_2 \nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k f(x, y), \\ T_3 f(x, y) &= -4a_1 a_2 \nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k f(x, y), & T_4 f(x, y) &= 4a_1 a_2 \left(\sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k \right) f(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \left(4a_1 a_2 \nu^2 - 4a_1 a_2 \nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k - 4a_1 a_2 \nu \sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k \right. \\ &\quad \left. + 4a_1 a_2 \sum_{k=1}^{\nu} \cos x_k \sum_{k=1}^{\nu} \cos y_k \right) f(x, y) \\ &= 4a_1 a_2 \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos x_k) \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k) f(x, y). \end{aligned}$$

II. Теперь рассмотрим преобразование Фурье оператора Q_1 :

$$\mathcal{F} : Q_1 \rightarrow K_2.$$

Положим, $Q_1 \phi(m, n) = \psi_2(m, n), \psi_2(m, n) \in l_2(\mathbb{Z}^{\nu} \times \mathbb{Z}^{\nu})$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \psi_2(m, n) &\rightarrow g_2(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu}} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^{\nu}} \psi(p^{(1)}, q^{(1)}) e^{i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu}} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^{\nu}} v_1(p^{(1)}, q^{(1)}) \phi(p^{(1)}, q^{(1)}) e^{i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]} \\ &= \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^{\nu}} v_1(p^{(1)}, q^{(1)}) \left(\int_{\mathbb{T}^{\nu}} \int_{\mathbb{T}^{\nu}} f(s, t) e^{-i[(p^{(1)}, s) + (q^{(1)}, t)]} ds dt \right) e^{i[(p^{(1)}, x) + (q^{(1)}, y)]} \\ &= \int_{\mathbb{T}^{\nu}} \int_{\mathbb{T}^{\nu}} \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^{\nu}} v_1(p^{(1)}, q^{(1)}) e^{-i(p^{(1)}, s-x) - i(q^{(1)}, t-y)} f(s, t) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^{\nu}} \int_{\mathbb{T}^{\nu}} k_2(x, y; s, t) f(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Для ядра $k_2(x, y; s, t)$ интегрального оператора K_2 получим

$$\begin{aligned} k_2(x, y; s, t) &= \sum_{p^{(1)}, q^{(1)} \in \mathbb{Z}^{\nu}} v_1(p^{(1)}, q^{(1)}) e^{-i(p^{(1)}, s-x) - i(q^{(1)}, t-y)} \\ &= \alpha_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q e^{-i(\pm q e_j, t-y)} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p e^{-i(\pm p e_j, s-x)} \\ &= \alpha_0 + I_1(y, t) + I_2(x, s), \end{aligned}$$

где

$$I_1(y, t) = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q e^{-i(\pm q e_j, t-y)} = 2 \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q \sum_{i=1}^{\nu} \cos q y_i \cos q t_i + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q \sum_{i=1}^{\nu} \sin q y_i \sin q t_i,$$

$$I_2(x, s) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p e^{-i(\pm p e_j, s-x)} = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \sum_{i=1}^{\nu} \cos p x_i \cos p s_i + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \sum_{i=1}^{\nu} \sin p x_i \sin p s_i.$$

Следовательно имеем,

$$k_2(x, y; s, t) = \lambda_0 \varphi_0(x, y) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_p^{(1)}(x_i) \varphi_p^{(1)}(s_i) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_p^{(2)}(x_i) \varphi_p^{(2)}(s_i) \\ + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q^{(2)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_q^{(1)}(y_i) \varphi_q^{(1)}(t_i) + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q^{(2)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_q^{(2)}(y_i) \varphi_q^{(2)}(t_i).$$

Таким образом, преобразование Фурье $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ оператора $Q(\varepsilon) : l_2(\mathbb{Z}^{\nu} \times \mathbb{Z}^{\nu}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}^{\nu} \times \mathbb{Z}^{\nu})$ действует в $L_2(\mathbb{T}^{\nu} \times \mathbb{T}^{\nu})$ по формуле (3.2). Лемма 3.1 доказана. \square

4. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ГАМИЛЬТониАНА $\tilde{H}_2(\varepsilon)$

Согласно лемме 3.1, дискретный оператор Шредингера $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ (3.2) является оператором в модели Фридрихса с невырожденным ядром. Имеем $\sigma_{ess}(\tilde{H}_2(\varepsilon)) = [0, 16a_1a_2\nu^2]$.

Теорема 4.1. Пусть $\nu = 1, 2$. При всех $\varepsilon > 0$ двухчастичный гамильтониан $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ (3.2) имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений.

Доказательство. Пусть β – произвольное положительное число, для которого $\beta \geq 8\nu a_1 a_2$. В пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\nu} \times \mathbb{T}^{\nu})$ определим оператор $\tilde{H}_1(\varepsilon)$ в модели Фридрихса следующим образом

$$\tilde{H}_1(\varepsilon) = H_0^{(1)} - \varepsilon K_1. \quad (4.1)$$

Здесь

$$H_0^{(1)} f(x, y) = \beta \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k) f(x, y), \quad K_1 f(x, y) = \int_{\mathbb{T}^{\nu}} \int_{\mathbb{T}^{\nu}} k_1(x; s) f(s, t) ds dt,$$

где

$$k_1(x; s) = \lambda_0 \varphi_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_p^{(1)}(x_i) \varphi_p^{(1)}(s_i) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_p^{(2)}(x_i) \varphi_p^{(2)}(s_i).$$

Пусть $\nu = 1, 2$. Очевидно, что $E_{min}(\tilde{H}_1(\varepsilon)) = E_{min}(\tilde{H}_2(\varepsilon)) = 0$. Согласно лемме 2.3 и в силу предложения 2.1, оператор $\tilde{H}_1(\varepsilon)$ (4.1) имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений, так как

$$\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \int_{\mathbb{T}^{\nu}} \frac{dy}{\beta \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k) - \xi} = +\infty$$

и $\dim \text{Ran } K_1 = \infty$. С другой стороны, $\tilde{H}_2(\varepsilon) \leq \tilde{H}_1(\varepsilon)$. Отсюда и из леммы 2.1 вытекает утверждение теоремы 4.1. \square

Для каждого $\xi < 0$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$ определим интегральный оператор $W(\xi)$:

$$W(\xi)f(x, y) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} k_\xi(x, y; s, t)f(s, t)dsdt, \quad \text{где} \quad k_\xi(x, y; s, t) = \frac{k_2(x, y; s, t)}{u_0^{(2)}(s, t) - \xi}.$$

Рассмотрим уравнение для собственных значений $\xi < 0$:

$$u_0^{(2)}(x, y)f(x, y) - \varepsilon \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} k_2(x, y; s, t)f(s, t)dsdt = \xi f(s, t), \quad f(s, t) \neq 0.$$

Определим функцию $g(x, y) = \frac{f(x, y)}{u_0^{(2)}(x, y) - \xi} \in L_2(\Omega_\nu^2)$. Получим

$$\varepsilon W(\xi)g(x, y) = g(x, y),$$

т.е. число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $\varepsilon W(\xi)$.

Определим последовательность непрерывных функций на $(\mathbb{T}^\nu)^{4n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$F_n \left(\xi \left| \begin{array}{ccc} x_1, x_2 \dots, x_n, & y_1, y_2 \dots, y_n \\ s_1, s_2 \dots, s_n, & t_1, t_2 \dots, t_n \end{array} \right. \right) = \left| \begin{array}{ccc} k_\xi(x_1, y_1; s_1, t_1) & \dots & k_\xi(x_1, y_1; s_n, t_n) \\ k_\xi(x_2, y_2; s_1, t_1) & \dots & k_\xi(x_2, y_2; s_n, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ k_\xi(x_n, y_n; s_1, t_1) & \dots & k_\xi(x_n, y_n; s_n, t_n) \end{array} \right| \quad (4.2)$$

и положим

$$d_n(\xi) = \int_{(\mathbb{T}^\nu)^n} \int_{(\mathbb{T}^\nu)^n} F_n \left(\xi \left| \begin{array}{ccc} s_1, s_2 \dots, s_n, & t_1, t_2 \dots, t_n \\ s_1, s_2 \dots, s_n, & t_1, t_2 \dots, t_n \end{array} \right. \right) ds_1 ds_2 \dots ds_n dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Следующее выражение

$$\Delta(\varepsilon; \xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} d_n(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\tilde{H}_2(\varepsilon)) \quad (4.3)$$

является детерминантом Фредгольма для оператора $I - \varepsilon W(\xi)$, где I – тождественный оператор.

Лемма 4.1 ([23]). Число $\xi \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\tilde{H}_2(\varepsilon))$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\varepsilon; \xi) = 0$.

При $\xi \in (-\infty, 0)$ определим следующие функции

$$\Phi_2(\nu; \xi) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dxdy}{4a_1 a_2 \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos x_k) \sum_{k=1}^{\nu} (1 - \cos y_k) - \xi}, \quad \text{где} \quad \mathbb{T} = [-\pi, \pi].$$

Пусть $\nu \geq 3$. Тогда, пользуясь леммой 2.3, можно доказать, что $\lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi_2(\nu; \xi) < \infty$.

Положим,

$$M_\nu = \frac{2\nu}{2^{2\nu-1} \pi^{2\nu}} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{(1)} + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_q^{(2)} \right), \quad A_\nu = \lim_{\xi \rightarrow 0-0} \Phi_2(\nu; \xi).$$

Тогда имеем $\Phi_2(\nu; \xi) \leq A_\nu$ при всех $\xi < 0$.

Теорема 4.2. Пусть $\nu \geq 3$. Если $\varepsilon < \frac{1}{2A_\nu M_\nu}$, то отсутствует дискретный спектр оператора $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ (3.2).

Доказательство. Пусть $\xi < 0$. Имеем

$$\Delta(\varepsilon; \xi) = 1 + \tilde{\Delta}(\varepsilon; \xi), \quad \text{где} \quad \tilde{\Delta}(\varepsilon; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} d_n(\xi).$$

Для ядра $k_2(x, y; s, t)$ оператора K_2 выполняется неравенство

$$k_2(x, y; s, t) \leq M_\nu, \quad \forall x, y, s, t \in \mathbb{T}^\nu. \quad (4.4)$$

Пользуясь неравенством Адамара и неравенством (4.4), получим

$$\left| F_n \left(\xi \left| \begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_n \end{array} \right. \right) \right| \leq \frac{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}{\prod_{k=1}^n (u_0^{(2)}(s_k, t_k) - \xi)} \leq \frac{(M_\nu \sqrt{n})^n}{\prod_{k=1}^n (u_0^{(2)}(s_k, t_k) - \xi)},$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{k_2^2(x_i, y_i; s_1, t_1) + k_2^2(x_i, y_i; s_2, t_2) + \dots + k_2^2(x_i, y_i; s_n, t_n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |d_n(\xi)| &\leq \int_{(\mathbb{T}^\nu)^n} \int_{(\mathbb{T}^\nu)^n} \frac{(M_\nu \sqrt{n})^n}{\prod_{k=1}^n (u_0^{(2)}(s_k, t_k) - \xi)} ds_1 ds_2 \dots ds_n dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &= (M_\nu \sqrt{n})^n \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{ds_1 dt_1}{u_0^{(2)}(s_1, t_1) - \xi} \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{ds_2 dt_2}{u_0^{(2)}(s_2, t_2) - \xi} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{ds_n dt_n}{u_0^{(2)}(s_n, t_n) - \xi} \\ &\leq (M_\nu \sqrt{n} A_\nu)^n. \end{aligned}$$

Для числовой последовательности $c_n = \frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$ справедливо неравенство $1 \geq c_n \geq c_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Используя последнее неравенство, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon A_\nu M_\nu \sqrt{n})^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon A_\nu M_\nu)^n.$$

Пусть $\varepsilon < \frac{1}{2A_\nu M_\nu}$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon A_\nu M_\nu)^n$ представляет сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon A_\nu M_\nu)^n = \frac{\varepsilon A_\nu M_\nu}{1 - \varepsilon A_\nu M_\nu} < 1.$$

Таким образом,

$$\left| \tilde{\Delta}(\varepsilon; \xi) \right| < 1, \quad \forall \xi \in (-\infty, 0).$$

Отсюда вытекает, если $\varepsilon < \frac{1}{2A_\nu M_\nu}$, то $\Delta(\varepsilon; \xi) \neq 0$ при всех $\xi < 0$. Тогда, согласно лемме 4.1, у оператора $\tilde{H}_2(\varepsilon)$ отсутствуют отрицательные собственные значения. Теорема 4.2 доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Фаддеев. *О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра*. В. кн.: Труды МИ АН СССР, **73**, М.: Наука, 292–313 (1964).
2. Р.А. Минлос, Я.Г. Синай. *Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа* // ТМФ. **4:2**, 230–243 (1970).
3. К.О. Фридрихс. *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве*. М.: Мир, 1972.
4. С.Н. Лакаев, Р.А. Минлос. *О связанных состояниях кластерного оператора* // ТМФ. **39:1**, 83–93 (1979).

5. С.Н. Лакаев. *Об Эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц* // Функ. анализ и его прил. **27**:3, 15–28 (1993).
6. М. Рид, Б. Саймон. *Методы современной математической физики*. Том 4: Анализ операторов. – М.: Мир, 1982.
7. К.О. Friedrichs. *Über die Spectralzerlegung eines Integral operators* // Math. Ann. **115**:2, 249–300 (1938).
8. К.О. Friedrichs. *On the perturbation of continuous spectra* // Comm. Pure appl. Math. **1**:4, 361–406 (1948).
9. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. М.: Наука. 1973.
10. Ш.С. Маматов, Р.А. Минлос. *Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора* // ТМФ. **79**:2, 163–179 (1989).
11. Ю.Х. Эшкабилов. *Об одном дискретном "трехчастичном" операторе Шредингера в модели Хаббарда* // ТМФ. **149**:2, 228–243 (2006).
12. М.Э. Муминов, А.М. Хуррамов. *Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерной решетке* // Уфимск. матем. журн. **6**:4, 102–110 (2014).
13. Ю.Х. Эшкабилов. *Об одном оператора в модели Фридрикса* // УзМЖ. **3**, 85–93 (1999).
14. Ю.Х. Эшкабилов. *О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрикса* // Мат. труды. **14**:1, 195–211 (2011).
15. Ю.Х. Эшкабилов. *О бесконечности числа отрицательных собственных значений модели Фридрикса* // Наносистемы: физика, химия, математика. **3**:6, 16–24 (2012).
16. Ю.Х. Эшкабилов, Д.Ж. Култураев. *О бесконечности дискретного спектра операторов в многомерной модели фридрикса* // ЎзМУ Хабарлари. **1**, 83–89 (2014).
17. С.А. Имомкулов, С.Н. Лакаев. *Дискретный спектр одномерной модели Фридрикса* // Докл. АН УзССР. **7**, 9–11 (1988).
18. С.Н. Лакаев. *О дискретном спектре обобщенной модели Фридрикса* // Докл. АН УзССР. **4**, 9–10 (1979).
19. С.Н. Лакаев. *Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрикса* // Тр. семинара Н.Г. Петровского. **11**, 210–238 (1986).
20. Ж.И. Абдуллаев. *Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке* // Узбек. матем. журн. **1**, 3–11 (2005).
21. К. Pankrashkin. *Introduction to the spectral theory*. Lecture notes of the course given at the University Paris-Sud. Orsay, France. 2014.
22. Ю.В. Жуков. *Теорема Иордо-О'Кэррола для N-частичного решетчатого гамильтониана* // ТМФ. **107**:1, 75–85 (1996).
23. Ф. Дж. Трикоми. *Интегральные уравнения*. ИЛ, М. 1960.

Юсуп Халбаевич Эшкабилов,
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17,
180100, г. Карши, Узбекистан
E-mail: yusup62@mail.ru

Даврон Жураевич Култураев,
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17,
180100, г. Карши, Узбекистан