ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 94-100.

УДК 519.2+531.19

УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Г. ХАЛИУЛЛИН

Аннотация. Изучение ультрапроизведений для различных пространств мотивировано интересом к методам нестандартного математического анализа, который оперирует бесконечно малыми (или бесконечно большими) последовательностями, как если бы они были числами. С одной стороны, пространство, которое получается как теоретико-множественное ультрапроизведение последовательности пространств, становится очень «богатым». Но, с другой стороны, оно теряет некоторые привлекательные свойства своих сомножителей. В частности, у него нет естественной хаусдорфовой топологии, порожденной его сомножителями, и естественная σ-алгебра измеримых подмножеств не является счетно-порожденной.

Если пространство удается «вложить» в свою ультрастепень с сохранением требуемых свойств, то использование метода ультрапроизведений дает некоторые преимущества в доказательстве многих «стандартных» утверждений.

Чтобы сохранить различные свойства сомножителей, необходимо изменить конструкцию ультрапроизведения. Например, при изменении этой конструкции становится возможным сохранить хаусдорфову топологию, структуру нормированного пространства, структуру операторных алгебр, алгебр фон Неймана и так далее.

В этой статье мы обсуждаем стохастические свойства так называемых квантово-механических систем в довольно абстрактной форме. Такие системы (структуры) встречаются в теории вероятностей, в теории операторных алгебр и в теории топологических векторных пространств. Также определены ультрапроизведения для последовательностей таких структур и исследованы определенные свойства этих ультрапроизведений.

Понятие наблюдаемого в структуре событий является аналогом случайной величины, определенной в вероятностном пространстве. Наблюдаемое естественным образом задается в ультрапроизведении квантово-механических систем, которое определено в настоящей статье. Мы изучаем его вероятностные характеристики.

Более того, ультрапроизведения квантовых логик также рассматриваются в рамках ультрапроизведений квантово-механических систем.

Ключевые слова: структуры событий, ультрапроизведения, квантовые логики.

Mathematics Subject Classification: 81Qxx+46M07

1. Введение

В работе события некоторой физической системы рассматриваются как простые аксиоматические элементы. События соответствуют физическим явлениям, которые могут

S.G. Haliullin, Ultraproducts of quantum mechanical systems.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Поступила 1 января 2021 г.

происходить или не происходить с некоторой вероятностью. Мы будем исследовать стохастические свойства квантово-механических систем как свойства некоторой абстрактной структуры, которая может охватывать многие хорошо известные структуры в различных областях математики. В частности, квантовые логики, описывающие квантово-механические системы, будут рассмотрены в работе как структура событий, наделенная дополнительной, вполне естественной структурой.

Пусть далее всюду $\mathcal{E}$ — произвольный набор элементов, называемых событиями. Событие $a \in \mathcal{E}$ происходит или не происходит в зависимости от состояния системы $s \in S$, где S — множество состояний системы. Поскольку в квантовой механике можно предсказать только вероятность того, что событие a произойдет, то состояния s можно рассматривать как функции, действующие из $\mathcal{E}$ на единичный отрезок $[0, 1]$, а значение $s(a)$ интерпретировать как вероятности того, что событие a произойдет в том случае, когда система находится в состоянии s. Если при этом $s(a) = 1$, то событие a обязательно произойдет, если система будет находиться в соответствующем состоянии.

Работа посвящена определению и исследованию ультрапроизведений таких абстрактных структур. Техника ультрапроизведений позволяет рассматривать некоторые свойства пространств с различными структурами как свойства «сомножителей», если удается вложить эти пространства в некоторое ультрапроизведение с сохранением основных структур.

2. Структуры событий. Предварительные сведения

Определение 2.1 (см., например, [3]). *Пусть $\mathcal{E}$ — непустое множество, S — множество функций из $\mathcal{E}$ на единичный интервал $[0, 1]$. Пара $(\mathcal{E}, S)$ называется структурой событий, если выполняются следующие две аксиомы:*

A1. Если $s(a) = s(b)$ для каждого $s \in S$, то $a = b$;

A2. Если $a_1, a_2, \dots \in \mathcal{E}$ удовлетворяют условию $s(a_i) + s(a_j) \leqslant 1$, $i \neq j$ для каждого $s \in S$, то существует такой элемент $b \in \mathcal{E}$, что

$$s(b) + s(a_1) + s(a_2) + ... = 1$$

для каждого $s \in S$.

Пусть $(\mathcal{E}, S)$ является структурой событий. Будем называть элементы множества $\mathcal{E}$ событиями, а элементы множества S — состояниями. Для $a, b \in \mathcal{E}$, определим соотношение $a \leqslant b$, если $s(a) \leqslant s(b)$ для каждого $s \in S$. Легко показать, что $\leqslant$ является отношением частичного порядка, поэтому $(\mathcal{E}, S)$ является частично упорядоченным множеством. Если $a \in \mathcal{E}$, то поскольку $s(a) \leqslant 1$ для каждого $s \in S$, по аксиоме $A2$ существует элемент $b \in \mathcal{E}$ такой, что $s(b) = 1 - s(a)$ для каждого $s \in S$. Далее будем писать $b = a'$ и называть событие b ортодополнением события a. Мы можем интерпретировать a' как событие, которое происходит тогда и только тогда, когда событие a не происходит. Будем обозначать через $\mathbf{0}$ событие, которое никогда не происходит и через $\mathbf{1}$ — событие, которое всегда происходит. Если $a \leqslant b'$, мы скажем, что события a и b ортогональны, и будем писать $a \perp b$.

Легко видеть, что если операция $a \to a'$ является ортодополнением на $(\mathcal{E}, S)$, то $a'' = a$ для каждого $a \in \mathcal{E}$; если $a \leqslant b$, то $b' \leqslant a'$; и $a \vee a' = \mathbf{1}$ для каждого $a \in \mathcal{E}$, где $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Будем писать $a \wedge b$ вместо $\inf\{a, b\}$. Такое частично упорядоченное множество $(\mathcal{E}, S)$ будем называть частично упорядоченным множеством с ортодополнением и обозначать $(\mathcal{E}, \leqslant, ')$.

Частично упорядоченное множество с ортодополнением $(\mathcal{P}, \leqslant, ')$ называется σ-полным, если для любой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_i \in \mathcal{P}$, $a_i \perp a_j$, $i \neq j$, существует точная верхняя грань $\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Частично упорядоченное множество с ортодополнением $(\mathcal{P}, \leqslant, ')$ называется ортомодулярным, если $a \leqslant b$ влечет $b = a \vee (b \wedge a')$.

Определение 2.2. *Говорят, что два события $a, b \in \mathcal{E}$ совместимы ($a \leftrightarrow b$), если существуют такие взаимно ортогональные события $a_1, b_1, c \in \mathcal{E}$, что $a = a_1 \vee c, b = b_1 \vee c$.*

Заметим, что если $a \perp b$, то $a \leftrightarrow b$, и что $\mathbf{0} \leftrightarrow a$, $\mathbf{1} \leftrightarrow a$ для всех $a \in \mathcal{E}$.

Определение 2.3. *Квантовой логикой называется σ-полное ортомодулярное частично упорядоченное множество с ортодополнением.*

Определение 2.4. *Говорят, что система вероятностных мер $\mathcal{M}$ на σ-полном частично упорядоченном множестве с ортодополнением $(\mathcal{P}, \leqslant, ')$ определяет порядок, если $m(a) \leqslant m(b)$ для каждого $m \in \mathcal{M}$ означает, что $a \leqslant b$.*

Замечание 2.1. *Легко видеть, что если квантовую логику наделить системой вероятностных мер, определяющих порядок, то мы получим структуру событий.*

Аналогом измеримой функции, связанной со структурой событий, является понятие наблюдаемой.

Определение 2.5. *Пусть $(\mathcal{E}, S)$ — структура событий, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — борелевская прямая. Отображение $x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}$ называется наблюдаемой, если выполнены следующие условия:*
1. $x(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$;
2. Если $E \cap F = \emptyset$, то $x(E) \perp x(F)$;
3. Если $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}$, — взаимно не пересекающиеся множества, то

$$x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} x\left(B_n\right).$$

Наблюдаемые x и y совместимы, если события $x(E)$ и $y(F)$ совместимы для всех $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определение 2.6. *Спектром $\sigma(x)$ наблюдаемой x называется наименьшее замкнутое подмножество $\Lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $x(\Lambda) = 1$. Наблюдаемое x называется ограниченным, если его спектр является ограниченным множеством в $\mathbb{R}$, то есть, содержится в некотором конечном интервале. Наименьшее положительное число N такое, что $|t| \leqslant N$ для всех $t \in \sigma(x)$, называется нормой наблюдаемой x и обозначается через $\|x\|$.*

Естественным образом каждая ограниченная наблюдаемая x индуцирует на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ числовой прямой распределение вероятностей для произвольного состояния $s \in S$:

$$s_x(B) = s(x(B)),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Следовательно, мы можем определить математическое ожидание $m_s(x)$ для наблюдаемой x в состоянии s:

$$m_s(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} t ds_x(t).$$

Этот интеграл существует, поскольку s_x — вероятностная мера, сосредоточенная на конечном интервале.

Предположим теперь, что в нашей системе выполняется следующее условие:

Условие М. Если $m_s(x) = m_s(y)$ для всех состояний s, то $x = y$.

Тогда для двух заданных ограниченных наблюдаемых x и y будет существовать не более одной наблюдаемой z, такой, что $m_s(z) = m_s(x) + m_s(y)$ для всех состояний s. Если наблюдаемая z существует, то ее естественно назвать суммой $x + y$ наблюдаемых x и y.

Известно (см., например, [3], [5]), что если наблюдаемые x и y совместимы и ограничены, то сумма существует. Нетрудно видеть, что тогда ограниченные наблюдаемые образуют линейное нормированное пространство. Обозначим это пространство $O_b(\mathcal{E})$.

Приведем простейший пример структуры событий, обобщающий классическую теорию вероятностей.

Пример 2.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — некоторое измеримое пространство, а S — набор вероятностных мер на $\mathcal{F}$. Легко проверить, что $(\mathcal{F}, S)$ является структурой событий.*

Пусть x является наблюдаемой. Тогда из теоремы Сикорского-Варадараяна следует, что существует случайная величина ξ такая, что $x(E) = \xi^{-1}(E)$ для каждого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Поскольку верно и обратное, то существует естественное соответствие между наблюдаемыми и случайными величинами. Легко проверить, что все события и все наблюдаемые в этом случае совместимы.

3. Ультрапроизведения

Определение 3.1. *Пусть $A_n\,(n \in \mathbb{N})$ — произвольные непустые множества, $\mathcal{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$. Фактор-множество декартова произведения множеств A_n по отношению эквивалентности*

$$(a_n) \sim_{\mathcal{U}} (b_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$$

называется теоретико-множественным ультрапроизведением семейства множеств (A_n) и обозначается $(A_n)_{\mathcal{U}}$, элементы ультрапроизведения обозначаются $(a_n)_{\mathcal{U}}$.

Отметим здесь, что если в сомножителях заданы соответствующие структуры, то ультрапроизведение замкнуто относительно отношения порядка, ортодополнения и конечных операций взятия точных верхней и нижней граней, но не замкнуто относительно счетных операций. Точнее,

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} (a_n^k)_{\mathcal{U}} \leqslant \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k \right)_{\mathcal{U}}, \qquad \bigwedge_{k=1}^{\infty} (a_n^k)_{\mathcal{U}} \geqslant \left(\bigwedge_{k=1}^{\infty} a_n^k \right)_{\mathcal{U}}.$$

Теоретико-множественное ультрапроизведение не всегда сохраняет те структуры, которыми наделены сомножители. Поэтому конструкция ультрапроизведения претерпевает некоторые изменения. Подробнее можно посмотреть в работах [1], [2], [4], [6], [8].

Определение 3.2. *Пусть $(\mathcal{E}_n, S_n)$ — последовательность структур событий, $\mathcal{U}$ — произвольный нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Пусть $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ — декартово произведение последовательности $(\mathcal{E}_n)$. Положим*

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{\mathcal{U}} s_n(a_n) = \lim_{\mathcal{U}} s_n(b_n) \quad \text{для всех} \quad (s_n), \quad s_n \in S_n.$$

В фактор-множестве $(\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}$ декартова произведения по данному отношению эквивалентности определим множество состояний следующим образом:

$$S_{\mathcal{U}} = \{s_{\mathcal{U}} : s_{\mathcal{U}}(a_n)_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} s_n(a_n),\ s_n \in S_n\}.$$

Пару $((\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}, S_{\mathcal{U}})$ назовем ультрапроизведением последовательности структур событий.

Теорема 3.1. *Пусть $(\mathcal{E}_n, S_n)_{n \geqslant 1}$ — последовательность структур событий, $\mathcal{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Тогда ультрапроизведение $((\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}, S_{\mathcal{U}})$ есть структура событий.*

Доказательство. Покажем вначале, что если $(\mathcal{E}, S)$ является структурой событий, то каждое состояние $s \in S$ является вероятностной мерой, то есть

$$s\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} s(a_i), \quad s \in S.$$

Рассмотрим такую последовательность событий (a_i), что $s(a_i) + s(a_j) \leqslant 1$, $i \neq j$. Легко видеть, что в этом случае $a_i \perp a_j$, $i \neq j$. Действительно, $s(a_i) \leqslant 1 - s(a_j) = s(a_j')$, $i \neq j$, значит, $a_i \leqslant a_j'$, то есть $a_i \perp a_j$, $i \neq j$. Теперь из аксиомы A2 следует, что существует такой элемент $b \in \mathcal{E}$, что $s(b) + s(a_1) + s(a_2) + ... = 1$ для каждого $s \in S$. Тогда

$1 - s(b) = s(b') = \sum s(a_i)$, следовательно, $b' \geqslant a_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Это означает, что событие b' является верхней гранью семейства (a_i). Покажем, что событие b' является точной верхней гранью семейства (a_i): $b' = \bigvee\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Легко видеть, что если b_1 — другая верхняя грань (a_i), т.е. $b_1 \geqslant a_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $b_1 \geqslant b'$. Значит, $b' = \bigvee\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $s(\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} a_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} s(a_i)$, $s \in S$.

Проверим выполнение аксиом структуры событий для ультрапроизведения $((\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}, S_{\mathcal{U}})$. Первая аксиома выполняется автоматически по определению 3.2. Для проверки аксиомы $A2$ покажем вначале, что $s_{\mathcal{U}}$ является вероятностной мерой на $(\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}$.

Пусть $a^k \in (\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $a^k \perp a^l$, $k \neq l$, и пусть $a = \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} a^k$. Достаточно показать, что

$$s_{\mathcal{U}}(a) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_{\mathcal{U}}(a^k) + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть события a^k имеют следующее представление: $a^k = (a_n^k)_{\mathcal{U}}$. Тогда существует такой элемент $U_0 \in \mathcal{U}$, что

$$s_n(a_n^k) \leqslant s_{\mathcal{U}}(a^k) + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad n \in U_0.$$

В представлении a^k положим $a_n^k = 0$, если $n \notin U_0$. Отсюда

$$s_n\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_n(a_n^k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_{\mathcal{U}}(a^k) + \varepsilon.$$

Значит,

$$s_{\mathcal{U}}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right)_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} s_n\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_{\mathcal{U}}(a^k) + \varepsilon.$$

С другой стороны, по свойствам теоретико-множественного ультрапроизведения

$$a = \bigvee_{k=1}^{\infty} a^k \leqslant \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right)_{\mathcal{U}}.$$

Тогда

$$s_{\mathcal{U}}(a) \leqslant s_{\mathcal{U}}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right)_{\mathcal{U}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_{\mathcal{U}}(a^k) + \varepsilon.$$

Значит,

$$s_{\mathcal{U}}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{\mathcal{U}}(a^k).$$

Таким образом, состояние $s_{\mathcal{U}}$ является вероятностной мерой. Отсюда же следует, что

$$s_{\mathcal{U}}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a^k\right) = s_{\mathcal{U}}\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right)_{\mathcal{U}}.$$

А, значит,

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} (a_n^k)_{\mathcal{U}} = \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right)_{\mathcal{U}}.$$

Возьмем теперь последовательность $(a^k) = ((a_n^k)_{\mathcal{U}}), (k = 1, 2, \ldots)$ элементов $(\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}$, удовлетворяющую условиям аксиомы $A2$: $s(a^k) + s(a^l) \leqslant 1$, $k \neq l$. Покажем, что тогда $a^k \perp a^l$, $k \neq l$ для всех пар событий. Предположим, что это не так, то есть существует пара событий со свойством $a^i \not\perp a^j$. Тогда существует такое $U \in \mathcal{U}$, что для всех $n \in U$: $a_n^i \not\perp a_n^j$, или, что то же самое, $s_n(a_n^i) + s_n(a_n^j) > 1$. Значит, $s_{\mathcal{U}}(a^i) + s_{\mathcal{U}}(a^j) \geqslant 1$. При этом в случае строгого неравенства это противоречит нашему предположению, в случае же равенства события a^i и a^j исчерпывают заданную последовательность событий $(a^k), k = 1, 2, \ldots$.

Для каждого k существует такое b_n, что $b_n' = \bigvee\limits_{i=1}^{\infty} a_n^k$. Рассмотрим

$$b' = (b_n')_{\mathcal{U}} = \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} a_n^k\right)_{\mathcal{U}} = \bigvee_{i=1}^{\infty} a^k.$$

Значит, $b = \mathbf{1} - b'$ и есть такое событие, что $s(b) + s(a^1) + s(a^2) + \cdots = 1$. □

Из определения 2.2 сразу следует, что совместимость событий устойчива относительно ультрапроизведения.

Теорема 3.2. *Определим отображение* $x_{\mathcal{U}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to (\mathcal{E}_n)_{\mathcal{U}}$*:*

$$x_{\mathcal{U}}(B) = (x_n(B))_{\mathcal{U}},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

где $x_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_n \quad (n \in \mathbb{N})$ *— такие наблюдаемые, что* $\sup_n \|x_n\| < \infty$*. Тогда отображение* $x_{\mathcal{U}}$ *является ограниченной наблюдаемой.*

Доказательство. Первые два свойства наблюдаемой в определении 2.5 выполняются автоматически. Возьмем последовательность $(B_k)_{k\geqslant 1}$ взаимно не пересекающихся борелевских множеств числовой прямой. Тогда, используя результаты теоремы 3.1, получим

$$x_{\mathcal{U}}\left(\bigcup_{k\geqslant 1} B_k\right) = \left(x_n\left(\bigcup_{k\geqslant 1} B_k\right)\right)_{\mathcal{U}} = \left(\bigvee_{k\geqslant 1} x_n(B_k)\right)_{\mathcal{U}}$$
$$= \bigvee_{k\geqslant 1} (x_n(B_k))_{\mathcal{U}} = \bigvee_{k\geqslant 1} x_{\mathcal{U}}\left(B_k\right).$$

Легко видеть, что при этом наблюдаемая $x_{\mathcal{U}}$ ограничена:

$$\|x_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| < \infty.$$

□

Замечание 3.1. *Пространство* $\{x_{\mathcal{U}} : x_n \in O_b(\mathcal{E}_n)\}$ *назовем ультрапроизведением последовательности пространств наблюдаемых* $O_b(\mathcal{E}_n)$*.*

Поскольку наблюдаемая $x_{\mathcal{U}}$ ограничена, то она индуцирует на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ числовой прямой распределение вероятностей для произвольного состояния $s_{\mathcal{U}} \in S_{\mathcal{U}}$:

$$(s_{\mathcal{U}})_{x_{\mathcal{U}}}(B) = \lim_{\mathcal{U}} s_n(x_n(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Определим математическое ожидание для наблюдаемой $x_{\mathcal{U}}$ в состоянии $s_{\mathcal{U}}$:

$$m_{s_{\mathcal{U}}}(x_{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} \int\limits_{\mathbb{R}} t d(s_n)_{x_n}(t).$$

Теорема 3.3. *Условие M выполнено в ультрапризведении пространств наблюдаемых тогда и только тогда, когда существует такой элемент* $U \in \mathcal{U}$*, что для всех* $n \in U$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *из того, что*

$$|m_{s_n}(x_n) - m_{s_n}(y_n)| < \varepsilon,$$

следует, что наблюдаемые $x_{\mathcal{U}}$ *и* $y_{\mathcal{U}}$ *равны.*

Доказательство. Очевидно следует из определения математического ожидания для $x_{\mathcal{U}}$. □

Замечание 3.2. *Условие* $|m_{s_n}(x_n) - m_{s_n}(y_n)| < \varepsilon$ *в теореме 3.3 можно трактовать как условие возмущения наблюдаемой* x_n*:* y_n *есть возмущение* x_n.

Совместимость наблюдаемых в ультрапроизведении сразу следует из определения совместимости наблюдаемых и того, что совместимость событий устойчива относительно ультрапроизведения. Поэтому в ультрапроизведении пространств наблюдаемых сохраняется структура линейного нормированного пространства.

Теорема 3.4. *Ультрапроизведение последовательности квантовых логик с заданной системой вероятностных мер, определяющих порядок, есть квантовая логика.*

Доказательство. Результат теоремы следует из того, что квантовая логика, наделенная системой вероятностных мер, определяющих порядок, является структурой событий и теоремы 3.1. В свою очередь структура событий является σ-полным ортомодулярным частично упорядоченным множеством с ортодополнением, т.е. является квантовой логикой. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Ando, U. Haagerup. *Ultraproducts of von Neumann algebras* // J. Funct. Anal. **266**:12, 6842–6913 (2014).
2. U. Groh. *Uniform ergodic theorems for identity preserving Schwarz maps on* W^**-algebras* // J. Operator Theory. **11**:2, 395–404 (1984).
3. S. Gudder. *Stochastic Methods in Quantum Mechanics.* Dover Publications, 2014. 219 p.
4. S. Heinrich. *Ultraproducts in Banach space theory* // J. für die reineund angewandte Math. **313**, 72–104 (1980).
5. Дж. Макки. *Лекции по математическим основам квантовой механики.* М.: Редакция литературы по математическим наукам, 1965. 129 с.
6. D.H. Mushtari, S.G. Haliullin. *Linear spaces with a probability meassure, ultraproducts and contiguity* // Lobachevskii J. Math. **35**:2, 138–146 (2014).
7. A. Ocneanu. *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras.* // Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, New York/Berlin, **1138**, 1985.
8. Y. Raynaud. *On ultrapowers of noncommutative* L_p*-spaces* // J. Operator Theory. **48**:1, 41–68 (2002).

Самигулла Гарифуллович Халиуллин,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: Samig.Haliullin@kpfu.ru