ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 70-82.

УДК 512.533.72, 517.986

ТРИВИАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛУГРУПП И ПОЛУГРУППОВЫЕ C^*-АЛГЕБРЫ

Е.В. ЛИПАЧЕВА

Аннотация. Предметом исследования в статье являются приведенные полугрупповые C^*-алгебры для полугрупп, обладающих свойством левого сокращения. Такая алгебра представляет собой очень естественный объект, так как она порождается изометрическими операторами сдвига, принадлежащими образу левого регулярного представления полугруппы с левым сокращением. Эти операторы действуют в гильбертовом пространстве всех квадратично суммируемых комплекснозначных функций, заданных на полугруппе. Изучается вопрос о функториальности инволютивных гомоморфизмов полугрупповых C^*-алгебр, то есть вопрос о существовании канонического вложения полугрупповых C^*-алгебр, индуцированного вложением соответствующих полугрупп. Для этого мы исследуем приведенные полугрупповые C^*-алгебры, которые соответствуют полугруппам, участвующим в построении нормальных расширений полугрупп с помощью групп. При этом в статье рассматривается один из простейших классов расширений полугрупп, а именно, класс так называемых тривиальных расширений. Показывается, что если полугруппа L является тривиальным расширением полугруппы S с помощью группы G, то существует вложение приведенной полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(S)$ в C^*-алгебру $C_r^*(L)$, индуцированное вложением S в L.

Также в работе вводится и изучается структура банахова $C_r^*(S)$-модуля на подлежащем пространстве приведенной полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(L)$. Для этого используется топологическая градуировка C^*-алгебры $C_r^*(L)$ над группой G. В случае, когда полугруппа L является тривиальным расширением полугруппы S с помощью конечной группы, доказывается, что на подлежащем банаховом пространстве приведенной полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(L)$ существует структура свободного банахова модуля над C^*-алгеброй $C_r^*(S)$.

Для более полной характеризации рассматриваемых вопросов и выявления связей с полученными ранее результатами в статье приводятся примеры расширений полугрупп и редуцированных полугрупповых C^*-алгебр.

Ключевые слова: полугруппа с сокращением, нормальное расширение полугруппы, тривиальное расширение полугруппы, приведенная полугрупповая C^*-алгебра, вложение полугрупповой C^*-алгебры, банахов модуль, свободный модуль.

Mathematics Subject Classification: 46H25, 47L30, 20M15

Введение

Статья посвящена изучению нормальных расширений полугрупп с сокращением и соответствующих полугрупповых C^*-алгебр.

Приведенные полугрупповые C^*-алгебры – это операторные алгебры, порожденные левыми регулярными представлениями полугрупп с сокращением. Впервые такие алгебры

E.V. Lipacheva, Trivial extensions of semigroups and semigroup C^*-algebras.

© Липачева Е.В. 2022.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Поступила 2 декабря 2021 г.

изучались в работах Кобурна [1], [2] и Дугласа [3]. Они рассмотрели приведенные полугрупповые C^*-алгебры для полугрупп, являющихся положительными конусами упорядоченных подгрупп в аддитивной группе всех вещественных чисел. Свое дальнейшее изучение эти алгебры получили в работах Мерфи [4], [5], Ники [6], Лаки и Рэйберна [7], Ли [8] и др.

Настоящая работа является продолжением исследований приведенных полугрупповых C^*-алгебр, начатых в [9]– [13]. При этом мы рассматриваем полугрупповые C^*-алгебры, соответствующие полугруппам, участвующим в построении расширений полугрупп.

Теория расширений полугрупп играет важную роль при изучении структуры и характеристик полугрупп, в частности, их когомологий (см., например, [14]). В исследованиях по полугруппам рассматриваются различные виды расширений: идеальные расширения [15], шрайеровы [16], нормальные расширения [17], [18]. В [19] изучалось действие функтора стоун-чеховской компактификации на нормальных расширениях полугрупп.

Данная статья нацелена на выявление связей между расширениями полугрупп и соответствующими полугрупповыми C^*-алгебрами и дополняет исследования, проведенные в работах [20]– [22]. В ней рассматривается один из простейших типов нормальных расширений, а именно, тривиальные расширения. Если L является тривиальным расширением S с помощью конечной группы, то подлежащее пространство C^*-алгебры $C^*_r(L)$ можно наделить структурой свободного банахова модуля над C^*-алгеброй $C^*_r(S)$. При доказательстве этого факта использовалась топологическая градуировка C^*-алгебры $C^*_r(L)$, построение которой описано в [12]. Напомним, что понятие топологически градуированной C^*-алгебры было введено Экселем [23] с целью распространения понятий гармонического анализа на некоммутативный случай.

Статья состоит из введения и трех разделов. В разделе 1 приводятся необходимые сведения из теории расширений полугрупп, теории полугрупповых C^*-алгебр и банаховых модулей. Раздел 2 посвящен вопросу о функториальности морфизмов полугрупповых C^*-алгебр, который в общем виде был поднят в работе [8] и изучался в [22] применительно к приведенным полугрупповым C^*-алгебрам, построенным по полугруппам, одна из которых является нормальным расширением другой. В разделе 3 на подлежащем пространстве C^*-алгебры $C^*_r(L)$ вводится и исследуется структура банахова $C^*_r(S)$-модуля при условии, что полугруппа L является тривиальным расширением S с помощью группы.

1. Предварительные сведения

Пусть S и L – дискретные полугруппы с левым сокращением, а G – группа с единицей e. Пусть имеется инъективный гомоморфизм полугрупп $\tau : S \longrightarrow L$ и сюръективный полугрупповой гомоморфизм $\sigma : L \longrightarrow G$. Тройку (L, τ, σ) назовем *нормальным расширением* полугруппы S с помощью группы G, если $\tau(S)$ является полным прообразом единицы группы G, т.е.

$$\sigma^{-1}(e) = \tau(S).$$

Саму полугруппу L тоже будем называть расширением полугруппы S с помощью группы G. Общие определения расширений полугрупп можно найти в [17], [24].

Пусть множество X такое, что $X \subset L \setminus \tau(S)$ и $X \cap \sigma^{-1}(g) = \{x_g\}$ для любого $g \in G$, $g \neq e$. Будем говорить, что расширение (L, τ, σ) полугруппы S *порождается множеством* X, если каждый элемент $y \in L \setminus \tau(S)$ единственным образом представляется в виде $y = \tau(a)x_g$ для некоторых $a \in S$ и $g \in G$. В этом случае каждое подмножество $\sigma^{-1}(g)$, $g \neq e$, имеет вид

$$\sigma^{-1}(g) = \tau(S)x_g := \{\tau(a)x_g \mid a \in S\}.$$

Отметим, что расширения, обладающие порождающими множествами, являются шрайеровыми расширениями (см. [14]).

Два расширения (L,τ,σ) и (L',τ',σ') полугруппы S с помощью группы G называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм полугрупп $\psi : L \longrightarrow L'$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, "\psi"] & \\ S \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & & G. \\ & L' \arrow[ur, "\sigma'"'] & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим декартово произведение $S \times G$ полугруппы S и группы G. Оно является полугруппой с операцией умножения

$$(a,g)\cdot(b,h) = (ab, gh), \tag{1.1}$$

где $a,b \in S,\ g,h \in G$. Расширение вида $(S\times G,\tau,\sigma)$, где $\tau(a) = (a,e)$ и $\sigma(a,g) = g$ для любых $a \in S,\ g \in G$, или любое, ему эквивалентное, называется *тривиальным* расширением полугруппы S с помощью группы G.

Напомним далее определение приведенной полугрупповой C^*-алгебры. Пусть P – дискретная полугруппа с левым сокращением. Введем в рассмотрение гильбертово пространство на этой полугруппе. Это пространство есть пространство $l^2(P)$ квадратично суммируемых комплекснозначных функций на P. Обозначим через e_p, $p \in P$, функцию пространства $l^2(P)$, определяемую формулой

$$e_p(q) := \begin{cases} 1, & \text{если } p = q\,; \\ 0, & \text{если } p \neq q\,, \end{cases}$$

где $q \in P$. Тогда множество функций $\{e_p \mid p \in P\}$ представляет собой ортонормированный базис гильбертова пространства $l^2(P)$.

В алгебре всех ограниченных линейных операторов $B(l^2(P))$ на пространстве $l^2(P)$ рассмотрим C^*-подалгебру $C_r^*(P)$, порожденную множеством изометрий $\{T_p \mid p \in P\}$, где $T_p(e_q) = e_{pq},\ p,q \in P$. Она называется *приведенной полугрупповой C^*-алгеброй*. Единичный элемент этой алгебры будем обозначать через I.

Если $P = \mathbb{N}$ – аддитивная полугруппа натуральных чисел, то приведенная полугрупповая C^*-алгебра $C_r^*(\mathbb{N})$ называется *алгеброй Теплица* и обозначается символом $\mathcal{T}$.

Опишем плотную подалгебру в C^*-алгебре $C_r^*(P)$. Для каждого элемента $p \in P$ рассмотрим символы T_p^{-1} and T_p^1. Обозначим через $\mathcal{F}(P)$ свободную полугруппу слов, составленных из букв алфавита $\{T_p^{-1}, T_p^1 \mid p \in P\}$. Полугруппа $\mathcal{F}(P)$ является инволютивной полугруппой. Произвольный элемент этой полугруппы – это слово *(моном)* вида

$$V_{\overline{p}} := T_{p_1}^{i_1} T_{p_2}^{i_2} ... T_{p_k}^{i_k}, \tag{1.2}$$

где $\overline{p} = (p_1,...,p_k)$ – элемент k-кратного декартова произведения $P^{\times k} := P \times ... \times P$, $i_1,...,i_k \in \{-1,1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Число k в записи (1.2) назовем *длиной* монома.

Операция инволюции на полугруппе $\mathcal{F}(P)$ задается формулой

$$V_{\overline{p}}^* = T_{p_k}^{-i_k} T_{p_{k-1}}^{-i_{k-1}} ... T_{p_1}^{-i_1}.$$

Каждый моном $V_{\overline{p}}$ определяет ограниченный линейный оператор $\widehat{V_{\overline{p}}}$ на гильбертовом пространстве $l^2(P)$ следующим образом:

$$\widehat{T}_p^1 := T_p, \quad \widehat{T}_p^{-1} := T_p^*,$$

и для любого монома $V_{\overline{p}}$ вида (1.2) положим

$$\widehat{V}_{\overline{p}} := \widehat{T}_{p_1}^{i_1}\widehat{T}_{p_2}^{i_2}...\widehat{T}_{p_k}^{i_k}. \tag{1.3}$$

Назовем $\widehat{V}_{\overline{p}}$ *операторным мономом.*

Конечные линейные комбинации операторов вида (1.3)

$$A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{V}_{\overline{p}_i} \tag{1.4}$$

образуют плотную инволютивную подалгебру в C^*-алгебре $C_r^*(P)$, которую будем обозначать $\mathcal{P}(P)$.

Далее мы напомним необходимые определения из книги [25], связанные с модулями. Под модулем мы будем понимать левый модуль.

Пусть $\mathfrak{A}$ – унитальная C^*-алгебра. Модуль $\mathfrak{M}$ над C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ называется *банаховым $\mathfrak{A}$-модулем*, если он является банаховым пространством с нормой, удовлетворяющей неравенству: $\|A \cdot M\| \leqslant \|A\|\|M\|$, где $A \in \mathfrak{A}$, $M \in \mathfrak{M}$.

Элемент M в банаховом $\mathfrak{A}$-модуле $\mathfrak{M}$ называется *циклическим*, если выполняется равенство

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cdot M := \{A \cdot M \mid A \in \mathfrak{A}\}.$$

Банахов модуль, обладающий циклическим элементом, называется *циклическим модулем.*

Пусть E – банахово пространство. На проективном тензорном произведении $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}E$ существует структура унитального левого банахова $\mathfrak{A}$-модуля, которая однозначно задается формулой

$$A \cdot (B \otimes X) = AB \otimes X, \quad A, B \in \mathfrak{A}, \quad X \in E.$$

Банахов модуль называется *свободным унитальным банаховым $\mathfrak{A}$-модулем*, если он топологически изоморфен модулю $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}E$ для некоторого банахова пространства E.

Например, сама C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ является свободным унитальным банаховым $\mathfrak{A}$-модулем. Также банахова прямая l_1-сумма n копий модуля $\mathfrak{A}$ является свободным банаховым $\mathfrak{A}$-модулем, поскольку имеет место топологический изоморфизм унитальных банаховых $\mathfrak{A}$-модулей

$$\bigoplus_{1} \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathbb{C}^n.$$

2. Вложения полугрупповых C^*-алгебр, индуцированные тривиальными расширениями полугрупп

В этом параграфе мы дополним результаты, полученные в работе [22], о вложении полугрупповых C^*-алгебр, соответствующих полугруппам, образующим нормальное расширение полугрупп.

Теорема 2.1. *Пусть S – полугруппа с левым сокращением и (L, τ, σ) – тривиальное расширение полугруппы S с помощью группы G. Тогда существует единственный изометрический $*$-гомоморфизм $\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$, такой, что $\varphi(T_a) = T_{\tau(a)}$.*

Доказательство. Поскольку (L, τ, σ) – тривиальное расширение, то с точностью до изоморфизма полугрупп, мы имеем равенство

$$L = S \times G.$$

При этом $\tau(a) = (a, e)$ и $\sigma(a, g) = g$ для любых $a \in S$, $g \in G$.

Существует канонический изоморфизм C^*-алгебр [8, лемма 2.16]:

$$\psi : C_r^*(S \times G) \longrightarrow C_r^*(S) \otimes_{\min} C_r^*(G) : T_{(a,g)} \mapsto T_a \otimes T_g.$$

Зададим отображение

$$\theta : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(S) \otimes_{\min} C_r^*(G) : A \mapsto A \otimes I.$$

Очевидно, θ – инъективный *-гомоморфизм C^*-алгебр. Тогда отображение

$$\varphi := \psi^{-1} \circ \theta : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(S \times G)$$

является инъективным *-гомоморфизмом. Осталось проверить, что $\varphi(T_a) = T_{\tau(a)}$. Действительно, поскольку $\psi(T_{(a,e)}) = T_a \otimes I$, то $\varphi(T_a) = T_{(a,e)} = T_{\tau(a)}$. □

Заметим, что теорема 2.1 может быть доказана и без использования леммы 2.16 из [8]. Это можно сделать таким же способом, которым доказывалась теорема 3.1 в [22].

Приведем набросок доказательства. Представим гильбертово пространство $l^2(S \times G)$ в виде прямой суммы своих подпространств

$$l^2(S \times G) = \bigoplus_{g \in G} H_g,$$

где базисом подпространства H_g является множество $\{e_{(a,g)} \mid a \in S\}$. Каждое подпространство H_g инвариантно относительно любого оператора $T_{(a,e)}$ и $T^*_{(a,e)}$, $a \in S$, и относительно любого операторного монома вида

$$\widehat{V}_{(\overline{a},\overline{e})} := \widehat{T}^{i_1}_{(a_1,e)} \widehat{T}^{i_2}_{(a_2,e)} ... \widehat{T}^{i_k}_{(a_k,e)},$$

где $\overline{a} = (a_1, ..., a_k) \in S^{\times k},\ \overline{e} = (e, ..., e) \in G^{\times k},\ i_1, ..., i_k \in \{-1, 1\},\ k \in \mathbb{N}$.

Затем зададим отображение φ равенствами $\varphi(T_a) = T_{(a,e)}$, $\varphi(T_a^*) = T^*_{(a,e)}$ и продолжим его на операторные мономы $\widehat{V}_{\overline{a}}$ вида (1.3):

$$\varphi(\widehat{V}_{\overline{a}}) = \widehat{V}_{(\overline{a},\overline{e})}$$

и на конечные линейные комбинации A вида (1.4):

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(\widehat{V}_{\overline{a}_i}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{V}_{(\overline{a}_i,\overline{e})}.$$

Корректность такого продолжения показывается с помощью унитарных операторов

$$U_g : l^2(S) \longrightarrow H_g : e_a \mapsto e_{(a,g)},$$

для любых $a \in S$, $g \in G$. Построенное отображение φ есть унитальный $*$-гомоморфизм из алгебры $\mathcal{P}(S)$ в C^*-алгебру $C_r^*(S \times G)$.

Наконец, можно показать, что для любого $A \in \mathcal{P}(S)$ справедливо равенство

$$\varphi(A) = \bigoplus_{g \in G} U_g A U_g^*.$$

Следовательно, φ является изометрическим $*$-гомоморфизмом. Осталось продолжить φ до изометрического $*$-гомоморфизма на всю C^*-алгебру $C_r^*(S)$.

Отметим, что если полугруппа S содержит единицу e, то тривиальное расширение L обладает порождающим множеством. Действительно, как нетрудно проверить, порождающим множеством является

$$X = \{(e, g) \mid g \in G\}.$$

Тогда существование изометрического *-гомоморфизма $\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$ следует из [22, теорема 3.1]. С другой стороны, теорема 2.1 доставляет нам пример расширения L полугруппы S, которое не обладает порождающим множеством, но вложение C^*-алгебр $C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L)$ существует.

Пример 2.1. *Возьмем в качестве полугруппы S аддитивную полугруппу натуральных чисел $\mathbb{N}$. Пусть G – произвольная группа с единицей e. Тогда декартово произведение $\mathbb{N} \times G$ является полугруппой относительно умножения*

$$(n, g)(m, h) = (n + m, gh), \tag{2.1}$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $g, h \in G$. Расширение $(\mathbb{N} \times G, \tau, \sigma)$ полугруппы $\mathbb{N}$, где $\tau(n) = (n, e)$ и $\sigma(n, g) = g$, не обладает порождающим множеством. Действительно, пусть такое множество X существует. Тогда элемент $x_g = (x, g) \in X$ должен представляться в виде $(x, g) = \tau(n)(x, g)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $(x, g) = (n + x, g)$, и, следовательно, $n = 0$. Получили противоречие. С другой стороны, по теореме 2.1 существует изометрический $*$-гомоморфизм

$$\varphi : C_r^*(\mathbb{N}) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{N} \times G),$$

такой, что $\varphi(T_n) = T_{\tau(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$.

3. Тривиальные расширения полугрупп и модули над полугрупповыми C^*-алгебрами

Пусть на протяжении всего параграфа (L, τ, σ) – тривиальное расширение полугруппы S с помощью группы G. То есть с точностью до изоморфизма полугрупп, мы будем иметь ввиду равенство

$$L = S \times G.$$

Причем $\tau(a) = (a, e)$ и $\sigma(a, g) = g$ для любых $a \in S$, $g \in G$.

Для доказательства основного результата настоящего параграфа мы воспользуемся топологической градуировкой C^*-алгебры $C_r^*(L)$ над группой G. Построение такой градуировки было обосновано и проведено в работе [12] для произвольной приведенной полугрупповой C^*-алгебры при условии существования сюръективного полугруппового гомоморфизма из соответствующей полугруппы на группу G. Определения градуированной и топологически градуированной C^*-алгебры содержатся в [23, §§16.2, 19.2]. Далее мы приведем краткое описание конструкции, позволяющей получить топологическую градуировку C^*-алгебры $C_r^*(L)$ над группой G.

Поскольку (L, τ, σ) является расширением полугруппы S с помощью группы G, то мы имеем сюръективный полугрупповой гомоморфизм

$$\sigma : L \longrightarrow G.$$

Для полугруппы L рассмотрим свободную полугруппу $\mathcal{F}(L)$ мономов вида (1.2), составленных из букв алфавита $\{T_x^{-1}, T_x^1 \mid x \in L\}$:

$$V_{\overline{x}} := T_{x_1}^{i_1} T_{x_2}^{i_2} ... T_{x_k}^{i_k},$$

где $\overline{x} = (x_1, ..., x_k) \in L^{\times k}$, $i_1, ..., i_k \in \{-1, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Зададим отображение $\mathrm{ind} : \mathcal{F}(L) \longrightarrow G$ формулой

$$\mathrm{ind}\,(V_{\overline{x}}) = \sigma(x_1)^{i_1} \sigma(x_2)^{i_2} ... \sigma(x_k)^{i_k}.$$

Легко видеть, что отображение ind является инволютивным сюръективным гомоморфизмом полугрупп. Значение $\mathrm{ind}\,(V_{\overline{x}})$ называется *σ-индексом монома $V_{\overline{x}}$*.

В [12, лемма 1] было показано, что если два монома определяют один и тот же операторный моном, то их σ-индексы совпадают, т.е. если $\widehat{V_{\overline{x}}} = \widehat{V_{\overline{y}}}$, то $\mathrm{ind}\,(V_{\overline{x}}) = \mathrm{ind}\,(V_{\overline{y}})$. Поэтому величину $\mathrm{ind}\,(V_{\overline{x}}) \in G$ также можно назвать *σ-индексом операторного монома $\widehat{V_{\overline{x}}}$*.

Легко проверить, что множество мономов σ-индекса e образует инволютивную подполугруппу в полугруппе всех мономов $\mathcal{F}(L)$.

Пусть $\mathfrak{A}_e$ обозначает C^*-подалгебру в C^*-алгебре $C^*_r(L)$, порожденную множеством всех операторных мономов σ-индекса e.

Пусть $\mathfrak{A}_g$ обозначает банахово подпространство в C^*-алгебре $C^*_r(L)$, являющееся замыканием линейной оболочки множества всех операторных мономов σ-индекса g, $g \in G$.

Семейство подпространств $\{\mathfrak{A}_g \mid g \in G\}$ образует топологическую G-градуировку приведенной полугрупповой C^*-алгебры $C^*_r(L)$ [12, теорема 2].

Далее мы докажем одну техническую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть S – полугруппа с левым сокращением и G – группа с единицей e. Тогда в C^*-алгебре $C^*_r(L)$ для любых $a_1, ..., a_k \in S$ и $g_1, ..., g_k \in G$ выполняется равенство для операторных мономов*

$$\widehat{T}^{i_1}_{(a_1,g_1)}...\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},g_{k-1})}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)} = \widehat{T}^{i_1}_{(a_1,e)}...\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},e)}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g^{i_k})}, \tag{3.1}$$

где $g = g_1^{i_1} g_2^{i_2} ... g_k^{i_k}$, $i_1, ..., i_k \in \{-1, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный моном

$$\widehat{T}^{i_1}_{(a_1,g_1)}...\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},g_{k-1})}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)}.$$

Докажем лемму индукцией по длине монома k.

Пусть $k = 2$. Тогда равенство (3.1) примет вид:

$$\widehat{T}^{i}_{(a,p)}\widehat{T}^{j}_{(b,q)} = \widehat{T}^{i}_{(a,e)}\widehat{T}^{j}_{(b,(p^i q^j)^j)}, \tag{3.2}$$

где $a, b \in S$, $p, q \in G$, $i, j \in \{-1, 1\}$. Докажем его. Для этого рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $i = j = 1$. Тогда

$$T_{(a,p)}T_{(b,q)} = T_{(ab,pq)} = T_{(a,e)}T_{(b,pq)}.$$

2) Пусть $i = j = -1$. Тогда

$$T^*_{(a,p)}T^*_{(b,q)} = T^*_{(ba,qp)} = (T_{(b,qp)}T_{(a,e)})^* = T^*_{(a,e)}T^*_{(b,(p^{-1}q^{-1})^{-1})}.$$

3) Пусть $i = -1$, $j = 1$. Вычислим $T^*_{(a,p)}T_{(b,q)}$ на произвольном базисном векторе $e_{(c,h)} \in l^2(S \times G)$. Если $T^*_{(a,p)}T_{(b,q)}e_{(c,h)} \neq 0$, то

$$T^*_{(a,p)}T_{(b,q)}e_{(c,h)} = e_{(d,p^{-1}qh)}$$

для некоторого $d \in S$, такого, что $ad = bc$. Действительно, скалярное произведение

$$\langle T^*_{(a,p)}T_{(b,q)}e_{(c,h)}, e_{(d,p^{-1}qh)}\rangle = \langle e_{(bc,qh)}, T_{(a,p)}e_{(d,p^{-1}qh)}\rangle = \langle e_{(bc,qh)}, e_{(ad,qh)}\rangle \neq 0$$

в том и только том случае, если $ad = bc$. С другой стороны, в этом случае

$$T^*_{(a,e)}T_{(b,p^{-1}q)}e_{(c,h)} = e_{(d,p^{-1}qh)}.$$

Если такого d не существует, то

$$T^*_{(a,p)}T_{(b,q)}e_{(c,h)} = T^*_{(a,e)}T_{(b,p^{-1}q)}e_{(c,h)} = 0.$$

Таким образом, мы имеем равенство операторов

$$T^*_{(a,p)}T_{(b,q)} = T^*_{(a,e)}T_{(b,p^{-1}q)}.$$

4) Пусть $i = 1$, $j = -1$. Снова вычислим $T_{(a,p)}T^*_{(b,q)}$ на произвольном базисном векторе $e_{(c,h)} \in l^2(S \times G)$. Если $T_{(a,p)}T^*_{(b,q)}e_{(c,h)} \neq 0$, то

$$T_{(a,p)}T^*_{(b,q)}e_{(c,h)} = e_{(ad,pq^{-1}h)}$$

для некоторого $d \in S$, такого, что $c = bd$. С другой стороны, в этом случае имеем

$$T_{(a,e)}T^*_{(b,qp^{-1})}e_{(c,h)} = e_{(ad,(qp^{-1})^{-1}h)} = e_{(ad,pq^{-1}h)}.$$

Если такого d не существует, то

$$T_{(a,p)}T^*_{(b,q)}e_{(c,h)} = T_{(a,e)}T^*_{(b,qp^{-1})}e_{(c,h)} = 0.$$

Таким образом, мы имеем равенство

$$T_{(a,p)}T^*_{(b,q)} = T_{(a,e)}T^*_{(b,qp^{-1})} = T_{(a,e)}T^*_{(b,(pq^{-1})^{-1})}.$$

Рассмотренные четыре случая полностью доказывают равенство (3.2).

Рассмотрим теперь моном произвольной длины k. По предположению индукции мы имеем равенство:

$$\widehat{T}^{i_1}_{(a_1,g_1)}...\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},g_{k-1})}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)} = \widehat{T}^{i_1}_{(a_1,e)}...\widehat{T}^{i_{k-2}}_{(a_{k-2},e)}\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},h^{i_{k-1}})}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)}, \tag{3.3}$$

где $h = g_1^{i_1}g_2^{i_2}...g_{k-1}^{i_{k-1}}$. Применим формулу (3.2) к произведению $\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},h^{i_{k-1}})}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)}$. Получим равенство

$$\widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},h^{i_{k-1}})}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)} = \widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},e)}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,(hg_k^{i_k})^{i_k})} = \widehat{T}^{i_{k-1}}_{(a_{k-1},e)}\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g^{i_k})}, \tag{3.4}$$

где $g = g_1^{i_1}...g_{k-1}^{i_{k-1}}g_k^{i_k}$. Учитывая равенства (3.3) и (3.4), получаем требуемое равенство (3.1). □

В следующей теореме мы увидим, что представляет собой C^*-подалгебра $\mathfrak{A}_e$ полугрупповой C^*-алгебры $C^*_r(L)$.

Теорема 3.1. *Пусть S – полугруппа с левым сокращением и (L,τ,σ) – тривиальное расширение этой полугруппы с помощью группы G. Пусть $\mathfrak{A}_e$ – C^*-подалгебра в C^*-алгебре $C^*_r(L)$, порожденная операторными мономами σ-индекса e, где e – единица группы G. Тогда имеет место изометрический изоморфизм C^*-алгебр*

$$C^*_r(S) \cong \mathfrak{A}_e.$$

Доказательство. Операторный моном в C^*-алгебре $C^*_r(L)$ имеет вид

$$\widehat{V}_{(\overline{a},\overline{g})} := \widehat{T}^{i_1}_{(a_1,g_1)}\widehat{T}^{i_2}_{(a_2,g_2)}...\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)}, \tag{3.5}$$

где $\overline{a} = (a_1,...,a_k) \in S^{\times k}$, $\overline{g} = (g_1,...,g_k) \in G^{\times k}$, $i_1,...,i_k \in \{-1,1\}$, $k \in \mathbb{N}$. При этом σ-индекс операторного монома вида (3.5) равен

$$\operatorname{ind}(V_{(\overline{a},\overline{g})}) = g_1^{i_1}g_2^{i_2}...g_k^{i_k}. \tag{3.6}$$

Из теоремы 2.1 получаем, что существует изометрический $*$-гомоморфизм

$$\varphi : C^*_r(S) \longrightarrow C^*_r(L) : T_a \mapsto T_{(a,e)}.$$

Тогда для любого операторного монома $\widehat{V_{\overline{a}}} \in C^*_r(S)$ вида (1.3) справедливо $\varphi(\widehat{V_{\overline{a}}}) = \widehat{V}_{(\overline{a},\overline{e})}$, где $\overline{a} = (a_1,...,a_k) \in S^{\times k}$, $\overline{e} = (e,...,e) \in G^{\times k}$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $\operatorname{ind}(V_{(\overline{a},\overline{e})}) = e$, то $\varphi(\mathcal{P}(S)) \subset \mathfrak{A}_e$ и, следовательно, мы можем рассмотреть коограничение φ на $\mathfrak{A}_e$:

$$\varphi^0 : C^*_r(S) \longrightarrow \mathfrak{A}_e, \tag{3.7}$$

которое является инъективным $*$-гомоморфизмом. Покажем, что φ^0 сюръективно.

Из леммы 3.1 и формулы (3.6) вытекает, что если $\operatorname{ind}(V_{(\overline{a},\overline{g})}) = e$, то мы имеем равенство

$$\widehat{V}_{(\overline{a},\overline{g})} = \widehat{T}^{i_1}_{(a_1,g_1)}\widehat{T}^{i_2}_{(a_2,g_2)}...\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,g_k)} = \widehat{T}^{i_1}_{(a_1,e)}\widehat{T}^{i_2}_{(a_2,e)}...\widehat{T}^{i_k}_{(a_k,e)} = \widehat{V}_{(\overline{a},\overline{e})}.$$

Это означает, что плотная подалгебра в C^*-алгебре $\mathfrak{A}_e$ совпадает с множеством всевозможных конечных линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{V}_{(\overline{a}_i,\overline{e})}$$

операторов вида $\widehat{V}_{(\overline{a},\overline{e})}$, где $\overline{a} = (a_1, ..., a_k) \in S^{\times k}$, $\overline{e} = (e, ..., e) \in G^{\times k}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует сюръективность гомоморфизма φ^0.

Таким образом, φ^0 является изометрическим изоморфизмом C^*-алгебр $C_r^*(S)$ и $\mathfrak{A}_e$. $\square$

Зададим на подлежащем пространстве C^*-алгебры $C_r^*(L)$ структуру банахова $C_r^*(S)$-модуля, определив операцию левого внешнего умножения следующим образом:

$$A \cdot B = \varphi^0(A)B, \tag{3.8}$$

где $A \in C_r^*(S)$, $B \in C_r^*(L)$ и $\varphi^0 : C_r^*(S) \longrightarrow \mathfrak{A}_e$ – изометрический изоморфизм (3.7) из теоремы 3.1. Далее будет показано, что если L является тривиальным расширением полугруппы S с помощью конечной группы, то этот модуль является свободным. Но прежде нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Зафиксируем произвольный элемент $a \in S$. В C^*-алгебре $C_r^*(L)$ для любого $g \in G$ рассмотрим операторы вида $V_g := T^*_{(a,e)}T_{(a,g)}$. Покажем, что V_g – унитарные операторы. Действительно, принимая во внимание лемму 3.1, получаем равенства:

$$V_g V_g^* = T^*_{(a,e)}T_{(a,g)}T^*_{(a,g)}T_{(a,e)} = T^*_{(a,e)}T_{(a,e)}T^*_{(a,e)}T_{(a,gg^{-1})} = I,$$

$$V_g^* V_g = T^*_{(a,g)}T_{(a,e)}T^*_{(a,e)}T_{(a,g)} = T^*_{(a,e)}T_{(a,e)}T^*_{(a,e)}T_{(a,g^{-1}g)} = I.$$

Лемма 3.2. *Для каждого $g \in G$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{A}_g = C_r^*(S) \cdot V_g,$$

т.е. пространство $\mathfrak{A}_g$ является циклическим банаховым $C_r^*(S)$-модулем, а элемент V_g является циклическим элементом модуля $\mathfrak{A}_g$.

Доказательство. В силу равенства (3.8) и того, что $\varphi^0 : C_r^*(S) \longrightarrow \mathfrak{A}_e$ – изометрический изоморфизм, для доказательства леммы достаточно доказать равенство

$$\mathfrak{A}_g = \{AV_g \mid A \in \mathfrak{A}_e\}.$$

А поскольку $\operatorname{ind}(V_g) = g$ и $\|V_g\| = 1$, то доказательство последнего равенства полностью повторяет доказательство леммы 5 из [12]. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть S – полугруппа с левым сокращением, G – конечная группа и (L, τ, σ) – тривиальное расширение полугруппы S с помощью группы G. Тогда существует топологический изоморфизм банаховых $C_r^*(S)$-модулей*

$$C_r^*(L) \cong \bigoplus_1 C_r^*(S),$$

где количество слагаемых в прямой l_1-сумме равно порядку группы G. Другими словами, C^*-алгебра $C_r^*(L)$ является свободным банаховым $C_r^*(S)$-модулем.

Доказательство. Заметим сначала, что поскольку группа G конечная, то, как показано в [12, теорема 4], подлежащее пространство C^*-алгебры $C_r^*(L)$ представляется в виде конечной прямой суммы своих подпространств:

$$C_r^*(L) = \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g.$$

Это означает, что каждый элемент $A \in C_r^*(L)$ единственным образом представляется в виде конечной суммы

$$A = \sum_{g \in G} A_g,$$

где $A_g \in \mathfrak{A}_g$.

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что существует изоморфизм $C_r^*(S)$-модулей

$$\bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g \cong \bigoplus_{1} C_r^*(S).$$

Из леммы 3.2 вытекает, что $C_r^*(S)$-модуль $\mathfrak{A}_g$ топологически изоморфен фактор-модулю $C_r^*(S)/\mathrm{Ann}\{V_g\}$ [25, предложение VI.2.3], где

$$\mathrm{Ann}\{V_g\} := \{A \in C_r^*(S) \mid A \cdot V_g = 0\}$$

есть аннулятор элемента V_g. Поскольку V_g – унитарный элемент, то, как нетрудно проверить, $\mathrm{Ann}\{V_g\} = 0$. Следовательно, мы имеем топологический изоморфизм банаховых $C_r^*(S)$-модулей

$$\psi_g : C_r^*(S) \longrightarrow \mathfrak{A}_g : A \mapsto A \cdot V_g.$$

Определим теперь линейное отображение

$$\alpha : \bigoplus_{1} C_r^*(S) \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g$$

формулой

$$\alpha(B) = \sum_{g \in G} \psi_g(B_g),$$

где $B = (B_g)_{g \in G} \in \bigoplus\limits_{1} C_r^*(S)$.

Легко проверить, что α сюръективно. Инъективность α следует из линейной независимости семейства подпространств $\{\mathfrak{A}_g\}_{g \in G}$.

Непрерывность α вытекает из цепочки неравенств

$$\|\alpha(B)\| \leqslant \sum_{g \in G} \|\psi_g(B_g)\| \leqslant \max_{g \in G} \|\psi_g\| \cdot \sum_{g \in G} \|B_g\| = \max_{g \in G} \|\psi_g\| \cdot \|B\|_1.$$

Поскольку α – биективный ограниченный линейный оператор, то, по теореме Банаха об обратном операторе, он имеет ограниченный обратный оператор

$$\alpha^{-1} : \bigoplus_{g \in G} \mathfrak{A}_g \longrightarrow \bigoplus_{1} C_r^*(S).$$

Очевидно, α и α^{-1} – морфизмы левых $C_r^*(S)$-модулей. Следовательно, отображение α является топологическим изоморфизмом банаховых $C_r^*(S)$-модулей.

Таким образом, C^*-алгебра $C_r^*(L)$ является свободным банаховым $C_r^*(S)$-модулем. $\square$

В работе [13] были описаны условия, при которых на подлежащем пространстве произвольной топологически градуированной полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(L)$ имеется структура свободного банахова модуля над своей подалгеброй $\mathfrak{A}_e$. А именно, пусть $X := \{x_g \mid g \in G\}$ – набор элементов в L, такой, что выполняется условие: $X \cap \sigma^{-1}(g) = \{x_g\}$. Пусть G – конечная группа и в полугруппе L существует множество X, такое, что каждый его элемент обратим в L. Тогда C^*-алгебра $C_r^*(L)$ является свободным банаховым $\mathfrak{A}_e$-модулем [13, теорема 2].

Если в условиях теоремы 3.2 полугруппа S содержит единицу e, то в полугруппе L существует такое множество X, что каждый его элемент обратим:

$$X = \{(e, g) \mid g \in G\}.$$

Тогда теорема 3.2 является следствием теоремы 3.1 и [13, теорема 2].

С другой стороны, если полугруппа S не содержит единицы, то теорема 3.2 доставляет нам пример того, что утверждение, обратное к [13, теорема 2], неверно.

Пример 3.1. *Пусть G – конечная группа. Как в примере 2.1 рассмотрим аддитивную полугруппу натуральных чисел $\mathbb{N}$ и декартово произведение $\mathbb{N}\times G$ с умножением, заданным формулой (2.1). Тогда C^*-алгебра $C_r^*(\mathbb{N}\times G)$ является свободным банаховым модулем над алгеброй Теплица $\mathcal{T} = C_r^*(\mathbb{N})$, и мы имеем изоморфизм банаховых $\mathcal{T}$-модулей*

$$C_r^*(\mathbb{N} \times G) \cong \bigoplus_1 \mathcal{T}.$$

При этом полугруппа $\mathbb{N} \times G$ не содержит никаких подгрупп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.A. Coburn. *The C^*-algebra generated by an isometry* // Bull. Amer. Math. Soc. **73**:5, 722–726 (1967).
2. L.A. Coburn. *The C^*-algebra generated by an isometry* II // Trans. Amer. Math. Soc. **137**, 211–217 (1969).
3. R.G. Douglas. *On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries* // Acta Math. **128**:3, 143–151 (1972).
4. G.J. Murphy. *Ordered groups and Toeplitz algebras* // J. Oper. Theory. **18**:2, 303–326 (1987).
5. G.J. Murphy. *Toeplitz operators and algebras* // Math. Z. **208**:3, 355–362 (1991).
6. A. Nica. *C^*-algebras generated by isometries and Wiener – Hopf operators* // J. Operator Theory. **27**:1, 17–52 (1992).
7. M. Laca, I. Raeburn. *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups* // J. Funct. Anal. **139**:2, 415–440 (1996).
8. X. Li *Semigroup C^*-algebras and amenability of semigroups* // J. Functional Analysis. **262**:10, 4302–4340 (2012).
9. S.A. Grigoryan, T.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, A. S. Sitdikov. *C^*-Algebra generated by the path semigroup* // Lobachevskii J. of Math. **37**:6, 740–748 (2016).
10. С.А. Григорян, Е.В. Липачева, А.С. Ситдиков. *Сети градуированных C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами* // Алгебра и анализ. **30**:6, 1–19 (2018).
11. R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva. *Topological Grading of Semigroup C*-Algebras* // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. **90**:3, 44–55 (2020).
12. Е.В. Липачева. *О градуированных полугрупповых C^*-алгебрах и гильбертовых модулях* // Труды МИАН им. В.А.Стеклова. **313**, 131–142 (2021).
13. E.V. Lipacheva. *A Semigroup C^*-algebra which is a Free Banach Module* // Lobachevskii J. of Math. **42**:10, 2386–2391 (2021).
14. Б.В. Новиков. *Когомологии полугрупп: обзор* // Фундамент. и прикл. матем. **7**:1, 1–18 (2001).
15. A.H. Clifford. *Extensions of semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. **68**:2, 165–173 (1950).
16. L. Rédei. *Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie* // Acta Sci. Math. Szeged. **14**, 252–273 (1952).
17. Л.М. Глускин, И.Л. Перепелицын. *Нормальные расширения полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 12, 46–54 (1972).
18. Л.М. Глускин. *Нормальные расширения коммутативных полугрупп* // Изв. вузов. Матем. **29**:9, 14–22 (1985).
19. I.S. Berdnikov, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva. *On the Stone-Cech Compactification Functor and the Normal Extensions of Monoids* // Lobachevskii J. of Math. **42**:10, 2295–2305 (2021).

20. S.A. Grigoryan, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva. *On Extensions of Semigroups and Their Applications to Toeplitz Algebras* // Lobachevskii J. of Math. **40**:12, 2052–2061 (2019).
21. Р.Н. Гумеров. *Нормальные расширения полугрупп и вложения полугрупповых C^*-алгебр* // Труды МФТИ. **12**:1, 74–82 (2020).
22. Е.В. Липачева. *Расширения полугрупп и морфизмы полугрупповых C^*-алгебр* // Сиб. матем. ж. **62**:1, 82–96 (2021).
23. R. Exel. *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications* // Math. Surv. Monogr. **224**, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (2017).
24. Е.С. Ляпин. *Полугруппы*, М.: Физматгиз. 1960.
25. А.Я. Хелемский. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1989.

Екатерина Владимировна Липачева,
кафедра Высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, 51,
420066, г. Казань, Россия

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `elipacheva@gmail.com`