

УДК 519.63:517.9

МЕТОД ФУРЬЕ, СВЯЗАННЫЙ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ, В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Л. ЛЕОНТЬЕВ

Аннотация. Метод Фурье позволяет находить решения краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Но применение метода для решения задач многих типов встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения метода Фурье – преодоление сопутствующих методу математических проблем, порожденных, например, характером граничных условий. Другое направление связано с применением специальных функций при решении задач для областей классических форм, определяемых координатными линиями и поверхностями ортогональных криволинейных систем координат. Но такой подход в общем случае задач для областей с криволинейными границами является неэффективным. Направления развития метода Фурье решения задач для областей с криволинейными границами связаны также, во-первых, с созданием и применением вариационно-сеточных и проекционно-сеточных методов и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Данная статья относится ко второму из этих направлений и ориентирована на такое расширение области применения метода Фурье, которое определяется построением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, связанных с ортогональными сплайнами и дающих аналитические решения параболической начально-краевой задачи в области с криволинейной границей. В параболической начально-краевой задаче для области с криволинейной границей предлагается и исследуется алгоритм метода Фурье, связанный с применением ортогональных сплайнов. Формируемая этим алгоритмом последовательность конечных обобщенных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи – бесконечному ряду Фурье. При увеличении числа узлов сетки в рассматриваемой области, имеющей криволинейную границу, структура конечных рядов Фурье сближается со структурой бесконечного ряда Фурье, представляющего собой точное решение начально-краевой задачи. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи в форме ортогональных рядов – обобщенных рядов Фурье, открывая новые возможности классического метода Фурье.

Ключевые слова: параболическая начально-краевая задача, криволинейная граница, метод разделения переменных, обобщенный ряд Фурье, ортогональные сплайны.

Mathematics Subject Classification: 35K20

V.L. LEONTIEV, FOURIER METHOD CONNECTED WITH ORTHOGONAL SPLINES IN PARABOLIC INITIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR REGION WITH CURVILINEAR BOUNDARY.

© ЛЕОНТЬЕВ В.Л. 2022.

Исследование В.Л. Леонтьева выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» (контракт № 075-15-2020-934 от 17.11.2020).

Поступила 23 июня 2021 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод разделения переменных (метод Фурье) позволяет находить частные решения многих краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных. Метод связан с задачей Штурма-Лиувилля. Классический метод Фурье позволяет получать решения широких классов задач, но его реализация для задач многих типов, в том числе для задач, постановки которых содержат нерегулярные граничные условия, даже в тех случаях, в которых все участки границы области являются координатными линиями или поверхностями, встречается со значительными трудностями. Одно из направлений расширения области применения классического метода Фурье – преодоление сопутствующих методу математических проблем, например, связанных с характером граничных условий [2]. Специальные функции появляются, например, при решении задачи Штурма-Лиувилля в цилиндрической или сферической системе координат, что целесообразно в случае области, граница которой состоит из набора координатных линий или поверхностей такой системы координат. В общем случае задач для областей с криволинейными границами применение специальных функций является неэффективным. Классический метод Фурье применим только при решении краевых и начально-краевых задач для областей классической формы, что отмечается, например, в [3] при решении контактных задач для упругих тел с криволинейными границами. Решения, полученные классическим методом Фурье, приводятся, в частности, в статьях [4]–[7], применение метода рассматривается во многих книгах, например, в [8]. Другие направления развития математических инструментов решения задач для областей с криволинейными границами связаны, во-первых, с созданием и применением ряда методов, отличных от метода Фурье, например в работах [9]–[12], и, во-вторых, с модификацией самого метода Фурье. Данная статья относится ко второму направлению и ориентирована на такое расширение области применения метода Фурье, которое определяется построением последовательности конечных обобщенных рядов Фурье, связанных с ортогональными сплайнами и дающих решения параболической начально-краевой задачи в области с криволинейной границей.

Рассматриваемый здесь метод Фурье, связанный с ортогональными сплайнами, дает сходящуюся последовательность приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье, структура которых подобна структуре частичных сумм бесконечного ряда Фурье, являющегося точным решением задачи. Использование ортогональных сплайнов расширяет область применения метода Фурье, а также сближает численный вариационно-сеточный метод с аналитическим методом разделения переменных.

Метод Фурье, связанный с ортогональными сплайнами, был предложен в статье [13] для решения гиперболической начально-краевой задачи, рассматриваемой в области с криволинейной границей. Здесь метод Фурье, связанный с ортогональными сплайнами, применяется для решения параболической начально-краевой задачи. Излагается алгоритм метода и проводится его исследование.

2. ПОСТАНОВКА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассматривается параболическая начально-краевая задача

$$\begin{aligned} L[u] &= a^2 \Delta u(x, y, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0; \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) \quad \forall (x, y) \in S; \quad u|_{\partial S} = u_{\partial S}(x, y) \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ∂S – кусочно-гладкая выпуклая криволинейная граница односвязной плоской области S ; $u = u(x, y, t)$ – функция, непрерывная $\forall t \geq 0$ в замкнутой области $\bar{S} = S + \partial S$;

$a^2 = \text{const} > 0$. Примером является задача о процессе стабилизации температурного поля в области с криволинейной границей ∂S , на которой задано стационарное переменное распределение температуры $u_{\partial S}(x, y)$.

Решение задачи (2.1) ищется в виде суммы $u(x, y, t) = v(x, y) + w(x, y, t)$, подстановка которой в (2.1) приводит к совокупности двух задач:

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= 0 & \forall (x, y) \in S; \\ v|_{\partial S} &= u_{\partial S}(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и

$$\begin{aligned} L[w] &= a^2 \Delta w(x, y, t) = \frac{\partial w}{\partial t} & \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0; \\ w(x, y, 0) &= f(x, y) - v(x, y) & \forall (x, y) \in S; \\ w|_{\partial S} &= 0 & \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если $u_{\partial S}(x, y) = U = \text{const}$, то очевидно, что решение задачи (2.2) для любой криволинейной границы ∂S имеет вид $v(x, y) \equiv U$. Если область S – круг, а переменная на границе круга функция $u_{\partial S}$ допускает разложение в ряд Фурье, то на основе известного для этого случая точного решения (см. например, [14]) после конформного преобразования многоугольной или некоторой другой области на круг с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца получается решение задачи (2.2) для многоугольной или другой области. С учетом этого, далее основное внимание уделяется методу решения задачи (2.3).

3. МЕТОД ФУРЬЕ

Согласно методу Фурье, решение задачи (2.3) ищется в виде произведения двух функций

$$w(x, y, t) = \varphi(x, y) \cdot \psi(t), \quad (3.1)$$

подстановка которого в дифференциальное уравнение задачи (2.3) приводит к

$$L[\varphi(x, y)] \cdot \psi(t) = \varphi(x, y) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$$

или

$$\frac{L[\varphi(x, y)]}{\varphi(x, y)} = \frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\lambda = \text{const}(x, y, t) < 0. \quad (3.2)$$

Краевое условие (2.3) с учетом (3.1) дает

$$\varphi(x, y)|_{\partial S} = 0 \quad (3.3)$$

и поэтому из (3.2) следует краевая задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} L[\varphi] + \lambda \varphi &= a^2 \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 & (S), \\ \varphi|_{\partial S} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

После решения этой задачи, т.е. после построения системы собственных значений λ_k и соответствующей ей системы собственных функций $\varphi_k(x, y)$, определяется связанная с ними система решений $\psi_k(t)$ уравнений

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} + \lambda_k \psi(t) = 0. \quad (3.5)$$

Затем на основе $\varphi_k(x, y)$ и $\psi_k(t)$, соответствующих λ_k , с учетом начального условия строится бесконечный функциональный ряд – точное решение задачи (2.3).

4. МЕТОД ФУРЬЕ, СВЯЗАННЫЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Первые шаги алгоритма метода Фурье, в котором используются ортогональные сплайны, в случае области с криволинейной границей совпадают с аналогичными шагами классического метода Фурье. Решение задачи (2.3) также разыскивается в виде произведения (3.1), подстановка которого в дифференциальное уравнение (2.3) приводит к уравнению (3.2), а исходное граничное условие дает условие (3.3). Возникает та же краевая задача Штурма-Лиувилля (3.4). Решение уравнения (3.5) связано с решением задачи Штурма-Лиувилля (3.4) и с учетом начального условия (2.3).

Дальнейшие шаги алгоритма модифицированного метода Фурье, предназначенного для решения параболических начально-краевых задач в случае областей с криволинейными границами, отличаются от соответствующих шагов классического алгоритма, поскольку связаны с применением ортогональных сплайнов при построении последовательности приближенных аналитических решений в форме обобщенных конечных рядов Фурье и с предельным переходом в этой последовательности к точному решению задачи (2.3) – бесконечному функциональному ряду.

Нетривиальные решения краевой задачи (3.4) ищутся в виде

$$\varphi_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=j_1(i)}^{j_2(i)} \tilde{C}_{ij} \tilde{\alpha}_i(x) \tilde{\beta}_j(y), \quad (4.1)$$

где \tilde{C}_{ij} – постоянные коэффициенты; N, j_1, j_2 – натуральные числа, зависимость j_1, j_2 от i определяется размерами области и формой криволинейной границы ∂S ; $\tilde{\alpha}_i(x), \tilde{\beta}_j(y)$ – ортогональные сплайны [1]: $\tilde{\alpha}_i(x) = \varphi_i(x)$, $\tilde{\beta}_j(y) = \varphi_j(y)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= [(\sqrt{2} - 1)(x_{i-1} - x)h^{-1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + 0.5h]; \\ &(\sqrt{2} + 1)(x - x_i)h^{-1} + 1, \quad x \in [x_{i-1} + 0.5h, x_i]; \\ &(\sqrt{2} - 1)(x - x_i)h^{-1} + 1, \quad x \in [x_i, x_i + 0.5h]; \\ &(\sqrt{2} + 1)(x_{i+1} - x)h^{-1}, \quad x \in [x_i + 0.5h, x_{i+1}]; \\ &0, \quad x \in (-\infty, x_{i-1}) \cup (x_{i+1}, +\infty) \end{aligned}$$

и $h_1 = h_2 = h$ – шаги прямоугольной равномерной сетки с узлами, имеющими координаты $(x_i = ih, y_j = jh) \in \bar{S}$, $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M$. Скалярные произведения сплайнов обладают свойствами

$$(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = \|\tilde{\alpha}_i\|^2 \delta_{ij}, \quad (\tilde{\beta}_i, \tilde{\beta}_j) = \|\tilde{\beta}_i\|^2 \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символы Кронекера, $\|\cdot\|$ – норма гильбертова пространства квадратично-суммируемых функций $L_2(\bar{S}) = W_2^1(\bar{S})$; W_2^1 – пространство Соболева. Область S вписана в прямоугольник S_1 , часть точек непрерывной кусочно-гладкой криволинейной границы ∂S лежит на границе прямоугольной области \bar{S}_1 . Конечные носители ортогональных (на каждой сетке) сплайнов $[\tilde{\alpha}_i(x)\tilde{\beta}_j(y)]$ представляют собой прямоугольные подобласти. Заметим, что ортогональные сплайны [1] допускают также использование конечных носителей, состоящих из треугольников. Функции

$$\alpha_i(x) = \tilde{\alpha}_i(x) \|\tilde{\alpha}_i(x)\|^{-1}, \quad \beta_j(y) = \tilde{\beta}_j(y) \|\tilde{\beta}_j(y)\|^{-1}$$

образуют две системы ортонормированных (на каждой сетке) сплайнов, поскольку

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}, \quad (\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij}.$$

После нормировки функций сумма (4.1) переписывается в виде

$$\varphi_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=j_1(i)}^{j_2(i)} C_{ij} \alpha_i(x) \beta_j(y). \quad (4.2)$$

Каждый постоянный коэффициент C_{ij} линейной комбинации (4.2) ортонормированных сплайнов – функций сеточного Лагранжева базиса конечномерного подпространства, связанного с построенной сеткой, равен значению функции $\varphi_N(x, y)$ в узле (x_i, y_j) сетки согласно свойствам таких сплайнов. Поэтому граничные условия $\varphi|_{\partial S} = 0$ удовлетворяются, если те коэффициенты C_{ij} , которые соответствуют граничным узлам, приравниваются нулю. После такого выполнения главных граничных условий линейная комбинация (4.2) записывается следующим образом:

$$\varphi_N(x, y) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij} \alpha_i(x) \beta_j(y), \quad (4.3)$$

где N_1, N_2, J_1, J_2 – натуральные числа такие, что

$$1 \leq N_1 < N_2 \leq N, \quad j_1(i) \leq J_1(i) < J_2(i) \leq j_2(i).$$

Для определения коэффициентов C_{ij} приближенного аналитического решения (4.3) краевой задачи (3.4) используется условие $\delta R = 0$ стационарности функционала Рейсснера

$$\begin{aligned} 2R(\varphi, \varphi_1, \varphi_2) = & \iint_S [a^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \lambda \varphi \right) \varphi \\ & - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi_1 \right) \varphi_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi_2 \right) \varphi_2] dS \\ & + \int_{\partial S} \varphi (\varphi_1 n_x + \varphi_2 n_y) dl, \end{aligned}$$

равносильное задаче (3.4) в смешанной форме

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \lambda \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_2 & \quad (S); \\ \varphi|_{\partial S} &= 0. \end{aligned}$$

Подстановка (4.3) в условие стационарности функционала Рейсснера приводит к системе конечно-разностных уравнений

$$\begin{aligned} a^2 [(C_{n+1,m} - 2C_{nm} + C_{n-1,m})h_1^{-2} \\ + (C_{n,m+1} - 2C_{nm} + C_{n,m-1})h_2^{-2}] + \lambda_{nm} C_{nm} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

каждое из которых связано с соответствующим внутренним узлом (x_n, y_m) сетки. Сформирована однородная система линейных алгебраических уравнений (4.4), неизвестными в которой являются коэффициенты C_{nm} . Эта система всегда имеет тривиальное решение. Те значения параметра λ , при которых она имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями вариационно-сеточного оператора, полученного с помощью вариационного принципа Рейсснера на основе оператора Лапласа, а также собственными значениями краевой задачи (3.4), аппроксимацией для которой является система уравнений (4.4). С учетом ортогональности используемых сплайнов система уравнений (4.4) записывается в виде

$$MX - \lambda X = 0, \quad (4.5)$$

где M – квадратная матрица системы уравнений, X – матрица-столбец, компоненты которой – неизвестные коэффициенты C_{ij} . Матрица M по построению – вещественная и симметричная, а следовательно все собственные значения и собственные векторы этой матрицы имеют вещественные значения, причем все ее собственные векторы линейно-независимы и попарно ортогональны, в том числе и в случае, когда есть кратные собственные значения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ – собственные значения, найденные в результате решения характеристического уравнения системы (4.5), $C_{nm}^{(k)}$ – соответствующие им компоненты k -го собственного вектора $X^{(k)}$, т.е. одного из нетривиальных решений системы уравнений (4.5), а функция

$$\varphi_N^{(k)}(x, y) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x) \beta_j(y)$$

– нетривиальное решение (4.3). Собственные значения положительны, поскольку матрица M – не только симметричная и вещественная, но и положительно определенная в силу того, что эта матрица возникла при использовании вариационного принципа и на основе скалярного произведения, примененного к положительно определенному, в случае рассматриваемого граничного условия, оператору $(-L) = -a^2 \Delta$.

Теорема 4.1. *Функция*

$$w^{(K)}(x, y, t) = \sum_{k=1}^K [A_k \exp(-\lambda_k t) \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x) \beta_j(y)], \quad (4.6)$$

в которой

$$A_k = \frac{1}{\|\varphi_N^{(k)}\|^2} \iint_S [f(x, y) - v(x, y)] \varphi_N^{(k)}(x, y) dS, \quad (4.7)$$

удовлетворяет уравнению (3.4) в вариационной форме, уравнению (3.5), а также граничному условию (3.3) и начальному условию (2.3), т.е. является приближенным аналитическим решением задачи (2.3) в случае области с криволинейной границей. При каждом фиксированном значении времени эта сумма представляет собой конечный обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (3.4) в вариационной форме $\delta R = 0$.

Доказательство. Сумма

$$\varphi_N^{(k)}(x, y) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x) \beta_j(y)$$

является элементом множества $H_N \subset W_2^1(\bar{S})$ – линейной оболочки функций $[\alpha_i(x) \beta_j(y)]$, связанных с указанной сеткой и удовлетворяющих граничному условию (3.3), а также является нетривиальным решением системы уравнений (4.5), удовлетворяющим граничному условию (3.3) и соответствующим собственному значению λ_k , т.е. $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ – собственная функция краевой задачи (3.4) в вариационной форме $\delta R = 0$.

Рассмотрим уравнение (3.5) после подстановки в него любого найденного положительного собственного значения λ_k

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} + \lambda_k \psi(t) = 0.$$

Общие решения таких дифференциальных уравнений имеют вид

$$\psi_k(t) = A_k \exp(-\lambda_k t),$$

где A_k – неизвестные постоянные коэффициенты. Следовательно, сумма

$$\sum_{k=1}^K \psi_k(t) \varphi_N^{(k)}(x, y) = \sum_{k=1}^K [A_k \exp(-\lambda_k t) \sum_{i=N_1}^{N_2} \sum_{j=J_1(i)}^{J_2(i)} C_{ij}^{(k)} \alpha_i(x) \beta_j(y)] \quad (4.8)$$

удовлетворяет уравнению (3.4) в вариационной форме $\delta R = 0$, уравнению (3.5), а также граничному условию (3.3). Остается обеспечить выполнение начального условия (2.3). Подстановка суммы (4.8) в начальное условие дает

$$\sum_{k=1}^K A_k \varphi_N^{(k)}(x, y) = f(x, y) - v(x, y).$$

Умножение обеих частей на $\varphi_N^{(r)}(x, y)$, интегрирование по области S и использование ортогональности собственных функций дают

$$A_k = \frac{1}{\|\varphi_N^{(k)}\|^2} \iint_S [f(x, y) - v(x, y)] \varphi_N^{(k)}(x, y) dS.$$

Таким образом, сумма (4.6), коэффициенты которой определяются формулами (4.7), удовлетворяет уравнениям (3.4) в вариационной форме $\delta R = 0$, уравнению (3.5), а также граничному условию (3.3) и начальному условию (2.3), т.е. является приближенным аналитическим решением задачи (2.3) в случае области с криволинейной границей. Сумма (4.6) при каждом фиксированном значении времени представляет собой конечный обобщенный ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (3.4) в вариационной форме. \square

5. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

Теорема 5.1. *Приближенные собственные функции $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ при сгущении сетки сходятся к точным собственным функциям $\varphi^{(k)}(x, y) \in W_2^1(\bar{S})$, удовлетворяющим граничному условию (3.3), т.е.*

$$\|\varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)}\|_{W_2^1(\bar{S})}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} > 0.$$

Доказательство. Доказательство сходимости приближенных аналитических собственных функций к точным собственным функциям основано, как и в статье [13], на том, что условие стационарности $\delta\Phi = 0$ функционала

$$\Phi(\varphi) = \iint_S [a^2(\bar{\nabla}\varphi)^2 - \lambda_k \varphi^2] dS,$$

где $\bar{\nabla}$ – набла-оператор, при условии, что варьирование функционала проводится на множестве функций, удовлетворяющих главному граничному условию (3.3), равносильно краевой задаче (3.4). Значение второй вариации функционала в его стационарной точке – положительное, а, следовательно, функционал имеет в стационарной точке минимум и поэтому решение такой вариационной задачи, а, следовательно, и краевой задачи (3.4), является единственным. Кроме того, функционал имеет в стационарной точке $\varphi^{(k)}$ значение равное нулю, так как на множестве функций из $W_2^1(\bar{S})$, удовлетворяющих граничному условию,

$$\Phi(\varphi^{(k)}) = - \iint_S [a^2 \Delta \varphi^{(k)} + \lambda_k \varphi^{(k)}] \varphi^{(k)} dS = 0.$$

Поэтому можно показать, что функционал для любой функции $w \in W_2^1(\bar{S})$, удовлетворяющей граничному условию (3.3), равен

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \iint_S [a^2(\bar{\nabla} w)^2 - \lambda_k w^2] dS \\ &= \iint_S [a^2(\bar{\nabla}(\varphi^{(k)} - w))^2 - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w)^2] dS \\ &= [\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w] - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)\end{aligned}$$

– разности скалярного произведения

$$[v_1, v_2] = \iint_S a^2(\bar{\nabla} v_1) \cdot \bar{\nabla} v_2 dS$$

энергетического пространства и скалярного произведения

$$(v_1, v_2) = \iint_S v_1 v_2 dS$$

гильбертова пространства $W_2^0(\bar{S})$. Таким образом, задача отыскания точной собственной функции $\varphi^{(k)}$ свелась к задаче минимизации

$$\Phi(\varphi^{(k)}) = \min_{\forall w \in W_2^1(\bar{S})} \Phi(w) = 0 \quad (5.1)$$

на множестве функций $w \in W_2^1(\bar{S})$, удовлетворяющих граничному условию (3.3). Выполняется неравенство

$$\begin{aligned}|\Phi(w)| &= |[\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w] - \lambda_k(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)| \\ &\leq |[\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w]| + \lambda_k |(\varphi^{(k)} - w, \varphi^{(k)} - w)|.\end{aligned}$$

Поэтому в силу того, что каждая функция $\varphi_N^{(k)}(x, y)$, согласно алгоритму метода и в силу ортогональности сплайнов, связана с минимизацией функционала $\Phi(w)$ и является наилучшим в смысле энергетической нормы приближением в $H_N \subset W_2^1(\bar{S})$ к функции $\varphi^{(k)}$, задача минимизации функционала при отыскании $\varphi_N^{(k)}$ сводится к задаче теории аппроксимации

$$\left\| \varphi^{(k)} - \varphi_N^{(k)} \right\|_{W_2^1(\bar{S})}^2 = \min_{\forall w \in H_N \subset W_2^1(\bar{S})} \left\| \varphi^{(k)} - w \right\|_{W_2^1(\bar{S})}^2,$$

т.е. к задаче аппроксимации точных собственных функций $\varphi^{(k)}(x, y)$ линейными комбинациями $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ ортогональных сплайнов. Такая задача решена в [1], где имеются соответствующие теоремы об аппроксимации, определяющие точность аппроксимации и скорость сходимости при сгущении сетки, зависящие от типа конкретных систем ортогональных сплайнов. \square

Сходимость конечных рядов (4.6) определяется сходимостью приближенных собственных значений λ_k и функций $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ к соответствующим точным значениям и функциям.

С ростом числа узлов сетки возрастает число используемых при построении решений ортогональных сплайнов. Собственные значения однородной системы уравнений (4.5) в случае $l = \pi$ известны (см., например, [1])

$$\lambda_k = \lambda_{n,m} = n^2 + m^2 + (n^4 + m^4) \frac{h^2}{12} + O[(n^6 + m^6)h^4],$$

где $n = 1, 2, \dots, N - 1$; $m = 1, 2, \dots, M - 1$; и сходятся, что очевидно, при $N, M \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ к соответствующим известным точным собственным значениям [15]

$$\omega_{n,m} = \frac{\pi^2}{l^2}(n^2 + m^2) = n^2 + m^2$$

задачи Штурма-Лиувилля (3.4).

При увеличении числа узлов сетки области S приближенные решения $\varphi_N^{(k)}(x, y)$ краевой задачи (3.4), т.е. приближенные собственные функции этой задачи, согласно теореме 5.1, сходятся к ее точным решениям – собственным функциям $\varphi^{(k)}(x, y)$. При этом неограниченно возрастает число собственных значений и собственных функций краевой задачи, поставленной в смешанной вариационной форме, а, следовательно, сумма (4.6) по k от 1 до K в пределе переходит в бесконечный ряд по k от 1 до ∞ , который при любом значении $t > 0$ является бесконечным рядом Фурье по собственным функциям. Такой ряд является единственным решением задачи (2.3), что следует из теоремы [15, стр. 88–91], основанной на теореме Стеклова [15]. Отличие данного метода решения начально-краевых задач для областей с криволинейными границами, например, от метода конечных элементов [12] состоит в том, что в данном методе определяемая его алгоритмом последовательность конечных рядов Фурье (4.6) в каждый фиксированный момент времени сходится к соответствующему бесконечному ряду Фурье, сформированному на основе точных собственных функций $\varphi^{(k)}(x, y)$ и представляющему собой существующее единственное точное решение задачи (2.3), определить которое в случае криволинейной границы области не удастся. Следовательно, эти конечные ряды Фурье представляют собой в любой момент времени аналитические приближенные решения задачи (2.3) для области с криволинейной границей, которые при увеличении числа узлов сетки неограниченно близко подходят к точному решению этой задачи – бесконечному ряду Фурье, причем, не только по количественным критериям, но и по своей аналитической структуре. Метод дает в каждый момент времени решение в форме ортогональных рядов – обобщенных конечных рядов Фурье по собственным функциям. Эти ряды – сколь угодно точные приближенные аналитические решения задачи (2.3) для области с криволинейной границей, которые в пределе переходят в точное аналитическое решение.

В качестве примера, показывающего сходимость конечных ортогональных обобщенных рядов Фурье к точному решению – бесконечному ряду Фурье, рассматривается задача Штурма-Лиувилля (3.4) для области \bar{S} , граница ∂S которой является квадратом со стороной $l = \pi$. Сходимость собственных значений и функций, конечных обобщенных рядов Фурье, связанных с ортогональными сплайнами, обеспечивает сходимость конечных рядов (4.6) к точному решению задачи (2.3). Используется прямоугольная равномерная сетка с шагами $h_1 = h_2 = h$, узлы которой имеют координаты

$$(x_i = ih, y_j = jh) \in \bar{S}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Система уравнений (4.4), записанных для внутренних узлов сетки

$$1 \leq i \leq N - 1, \quad 1 \leq j \leq N - 1$$

с учетом однородных граничных условий (3.3), является однородной системой конечно-разностных уравнений, нетривиальными точными решениями которой, в случае $l = \pi$, являются известные собственные функции [16]

$$\mu_{n,m}(i, j) = \sin(nx_i) \sin(my_j),$$

соответствующие точным собственным значениям [16]

$$\lambda_{n,m} = \frac{4}{h^2} \left[\sin^2 \left(\frac{nh}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{mh}{2} \right) \right]; \quad n, m = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Число этих собственных функций равно $(N-1)^2$ – числу внутренних узлов сетки. Значения собственных функций $\mu_{n,m}(i, j)$ в узлах сетки определяют значения коэффициентов суммы (4.6):

$$C_{i,j}^{(n,m)} = \sin(nx_i) \sin(my_j).$$

Таким образом, в задаче для квадратной области для каждого собственного значения $\lambda_{n,m}$ формируются ортогональные обобщенные конечные ряды Фурье

$$\varphi_N^{(k)}(x, y) = \varphi_N^{(n,m)}(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sin(nx_i) \sin(my_j) \alpha_i(x) \beta_j(y)$$

– приближенные собственные функции. Конечный ряд (4.6) принимает в данной задаче вид

$$w^{(N)}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} A_{n,m} \exp(-\lambda_{n,m}t) \varphi_N^{(n,m)}(x, y). \quad (5.2)$$

Точное решение задачи Штурма-Лиувилля (3.4) для случая квадратной области \bar{S} , а также $a^2 = 1$ и $l = \pi$, определяется собственными значениями и функциями [15]:

$$\Phi_{n,m}(x, y) = \sin(nx) \sin(my), \quad \omega_{n,m} = n^2 + m^2.$$

Основанное на этом точное решение задачи (2.3) в рассматриваемом случае имеет вид [15]

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \exp(-\omega_{n,m}t) \Phi_{n,m}(x, y). \quad (5.3)$$

Коэффициенты $B_{n,m}$ определяются с учетом начального условия (2.3) и ортогональности собственных функций формулой

$$B_{n,m} = \frac{1}{\|\Phi_{n,m}\|^2} \iint_S [f(x, y) - v(x, y)] \Phi_{n,m}(x, y) dS.$$

Соответственно, в силу ортогональности $\varphi_N^{(n,m)}(x, y)$

$$A_{n,m} = \frac{1}{\|\varphi_N^{(n,m)}\|^2} \iint_S [f(x, y) - v(x, y)] \varphi_N^{(n,m)}(x, y) dS.$$

Точность аппроксимации собственных функций $\Phi_{n,m}(x, y)$ приближенными собственными функциями $\varphi_N^{(n,m)}(x, y)$ растет при $N \rightarrow \infty$. Действительно, ортогональные сплайны $\alpha_i(x)$, $\beta_j(y)$ являются финитными, непрерывными и кусочно-линейными, причем значения их произведений в узлах сетки равны единице. Поэтому значения функции $\varphi_N^{(n,m)}(x, y)$ во всех узлах сетки равны значениям соответствующих коэффициентов $C_{i,j}^{(n,m)}$, следовательно, значения функции $\varphi_N^{(n,m)}(x, y)$ в узлах сетки совпадают со значениями в этих же узлах точных собственных функций $\sin(nx) \sin(my)$. Из сходимости $\varphi_N^{(n,m)}(x, y)$ к функциям $\Phi_{n,m}(x, y)$ следует сходимость $A_{n,m}$ к $B_{n,m}$ при $N \rightarrow \infty$. Кроме того, $\lambda_{n,m} \rightarrow \omega_{n,m} = n^2 + m^2$ при $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$. Фактическая сходимость собственных значений характеризуется следующим примером: $\lambda_{11} = 1.899$ при $N = 4$; $\lambda_{11} = 1.984$, если $N = 10$; $\lambda_{11} = 1.996$, если $N = 20$, то есть λ_{11} при $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ имеет такой характер сходимости к точному собственному значению $\omega_{11} = 2$.

При $N \rightarrow \infty$ точность аппроксимаций $w^{(N)}(x, y, t)$ возрастает, число собственных функций, входящих в (5.2), увеличивается, при этом для каждой величины N значения $\varphi_N^{(n,m)}(x, y)$ совпадают в узлах сетки со значениями соответствующих точных собственных функций.

Структура конечных рядов (5.2) соответствует структуре частичных сумм бесконечного ряда (5.3) с учетом при этом числа узлов сетки. Рассмотренный пример подтверждает выводы теорем 4.1, 5.1 и показывает, что метод Фурье, связанный с применением ортогональных сплайнов, дает приближенные аналитические решения в форме конечных обобщенных рядов Фурье с любой заранее заданной точностью.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расширение областей применения классических аналитических методов решения начально-краевых задач является актуальной задачей. Одно из направлений развития таких методов – включение в область применения метода разделения переменных задач для областей с криволинейными границами. Специальные функции позволяют использовать метод Фурье в случае областей с криволинейными границами, но геометрия таких границ должна состоять из координатных линий или координатных поверхностей некоторой криволинейной системы координат, что делает такие возможности значительно ограниченными.

В данной статье рассматривается метод разделения переменных, предназначенный для решения параболических начально-краевых задач для областей с криволинейными границами более сложной геометрии. Метод дает сходящуюся последовательность приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье в каждый момент времени, структура которых связана со структурой частичных сумм бесконечного ряда Фурье, являющегося точным решением задачи. Использование ортогональных сплайнов расширяет область применения метода Фурье, а также сближает вариационно-сеточные методы с аналитическим методом разделения переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Л. Леонтьев. *Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики*. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. 2021. 466 с.
2. Э.А. Гасымов, А.О. Гусейнова, У.Н. Гасанова. *Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **56**:7, 1335–1339 (2016).
3. И.С. Савичев, А.Д. Чернышев. *Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра* // Изв. РАН. МТТ. **3**, 151–162 (2009).
4. А.П. Хромов, М.Ш. Бурлуцкая. *Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные* // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **14**:2, 171–198 (2014).
5. В.Л. Колмогоров, В.П. Федотова, Л.Ф. Спевак, Н.А. Бабайлов, В.Б. Трухин. *Решение нестационарных температурных и термомеханических задач методом разделения переменных в вариационной постановке* // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **42**, 72–75 (2006).
6. Ю.И. Малов, Л.К. Мартинсон, К.Б. Павлов. *Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **12**:3, 627–638 (1972).
7. М.Ш. Исраилов. *Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях* // Изв. РАН. МТТ. **3**, 121–134 (2013).
8. V. Anders. *Fourier analysis and its applications*. New York: Springer-Verlag, Berlin: Heidelberg. 2003. 269 p.
9. А.Б. Усов. *Конечно-разностный метод решения уравнений Навье–Стокса в переменной области с криволинейными границами* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **48**:3, 491–504 (2008).

10. П.А. Крутицкий. *Первая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн в многосвязной области* // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. **37**:1, 117–128 (1997).
11. М.И. Чебаков. *Некоторые динамические и статические контактные задачи теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров* // Прикл. матем. и мех. **44**:5, 923–933 (1980).
12. Г. Стренг, Дж. Фикс. *Теория метода конечных элементов*. М.: Мир. 1977. 349 с.
13. V.L. Leontiev. *Fourier Method in Initial Boundary Value Problems for Regions with Curvilinear Boundaries* // Mathematics and Statistics. **9**:1, 24–30 (2021).
14. С.Г. Михлин. *Курс математической физики*. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1968. 576 с.
15. В.Я. Арсенин. *Методы математической физики и специальные функции*. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1974. 432 с.
16. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. *Методы решения сеточных уравнения*. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1978. 592 с.

Виктор Леонтьевич Леонтьев,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Научный центр мирового уровня «Передовые цифровые технологии»,
ул. Политехническая, 29,
195251, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: leontiev_vl@spbstu.ru