ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 1 (2022). С. 57-83.

УДК 517.518

# О ВЫРОЖДЕННОСТИ ОРБИТ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

**А.В. ЛОБОДА, В.К. КАВЕРИНА**

**Аннотация.** В связи с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей в статье обсуждаются 7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ двух семейств нильпотентных 7-мерных алгебр Ли. Подобно нильпотентным 5-мерным алгебрам голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^3$ большая часть из рассмотренных в статье алгебр не имеет невырожденных по Леви орбит. В частности, отсутствие таких орбит доказано для семейства разложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли (31 алгебра).

В то же время в семействе из 12 неразложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли, каждая из которых содержит не менее трех абелевых 4-мерных идеалов, четыре алгебры имеют невырожденные орбиты. У двух алгебр эти гиперповерхности голоморфно эквивалентны квадрикам, а несферические невырожденные орбиты еще двух алгебр представляют собой два голоморфно неэквивалентных обобщения (на случай 4-мерного комплексного пространства) известной поверхности Винкельманна из пространства $\mathbb{C}^3$. Все орбиты алгебр из второго семейства допускают трубчатые реализации.

**Ключевые слова:** однородное многообразие, голоморфная функция, векторное поле, алгебра Ли, абелев идеал.

**Mathematics Subject Classification:** 32M12, 32A10, 17B66, 14H10, 13A15

## 1. Введение

В задаче описания (локально) голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств к настоящему времени полностью изучены двумерный [1] и трехмерный случаи [2]. Так, опираясь на классификацию 3-мерных вещественных алгебр Ли, Э. Картан показал, что в $\mathbb{C}^2$ все однородные гиперповерхности являются орбитами именно таких алгебр Ли; аналогичная идея использования классификации 5-мерных алгебр Ли позволила завершить описание локально однородных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств.

При этом важным шагом в случае 3-мерных комплексных пространств оказалось утверждение о вырожденности по Леви орбит большинства 5-мерных нильпотентных алгебр Ли: только у двух таких алгебр орбитами являются невырожденные квадрики

$$\operatorname{Im} z_3 = |z_1|^2 \pm |z_2|^2, \tag{1.1}$$

тогда как остальные нильпотентные алгебры не могут иметь в $\mathbb{C}^3$ невырожденных 5-мерных орбит [3]. В частности, это утверждение верно для трех разложимых нильпотентных алгебр Ли размерности 5.

В связи с этим представлялось естественным предположение о вырожденности по Леви несферических (не сводимых к аналогам квадрик (1.1)) орбит нильпотентных алгебр Ли

A.V. Loboda, V.K. Kaverina, On degeneracy of orbits of nilpotent Lie algebras.



Исследование А.В. Лободы выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00497.

*Поступила 2 марта 2021 г.*

в пространствах произвольных размерностей. Однако в [4] были изучены однопараметрические семейства 7-мерных нильпотентных алгебр Ли и обнаружены их несферические Леви-невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$.

В настоящей статье обсуждаются 7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ нильпотентных 7-мерных алгебр Ли из двух достаточно обширных семейств. Первое из них – это семейство разложимых алгебр Ли; второе – семейство неразложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли, каждая из которых содержит не менее трех абелевых 4-мерных идеалов.

Для первого семейства, содержащего 31 алгебру Ли, доказано (Теорема 2.1), что по аналогии со случаем 3-мерного комплексного пространства, утверждение о Леви-вырожденности 7-мерных орбит всех таких алгебр сохраняет силу. Естественно в связи с этим выдвинуть гипотезу о Леви-вырожденности всех вещественных гиперповерхностей в пространствах $\mathbb{C}^n$ (произвольной размерности), являющихся орбитами разложимых нильпотентных $(2n-1)$-мерных алгебр Ли.

При этом второе рассмотренное в статье семейство из 12 алгебр допускает невырожденные по Леви орбиты (Теорема 6.2). Здесь 8 алгебр подчиняются «общей» тенденции, связанной с вырождениями орбит многих нильпотентных алгебр Ли (см. также [5] и [6]). Вместе с тем, орбиты двух (из 12) алгебр голоморфно эквивалентны квадрикам

$$\mathrm{Im}\ z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2. \tag{1.2}$$

При этом индефинитная сферическая поверхность (отвечающая знаку «минус» перед слагаемым $|z_3|^2$ в уравнении (1.2)) оказывается орбитой двух *разных* 7-мерных алгебр Ли, являющихся подалгебрами полной 24-мерной алгебры симметрий этой поверхности. Такой эффект отмечался в работах [7], [4], [2] как вполне естественный для многообразий с богатыми алгебрами симметрий, в частности, для сферических гиперповерхностей.

А несферическими интегральными гиперповерхностями еще двух алгебр из 12 являются (с точностью до голоморфной эквивалентности) поверхности, описываемые уравнениями

$$\mathrm{Im}\ z_4 = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_3|^2 \pm |z_1|^4. \tag{1.3}$$

Эти поверхности имеют (см. [8]) самые богатые группы и алгебры симметрий среди несферических невырожденных однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$. Для каждой из них размерность голоморфного стабилизатора (т.е. локальной группы голоморфных преобразований, сохраняющих поверхность и фиксированную точку на ней) равна 6. Соответственно, размерность полной алгебры Ли голоморфных векторных полей на любой из них равна $6 + 7 = 13$.

Пару однородных несферических поверхностей (1.3), мы называем *обобщениями поверхности Винкельманна* ([9])

$$\mathrm{Im}\ z_3 = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_1|^4 \tag{1.4}$$

из пространства $\mathbb{C}^3$. На ней достигает максимума, равного 8, размерность алгебры Ли голоморфных векторных полей в классе однородных невырожденных несферических гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. Естественность связи поверхностей (1.3) с (1.4) подтверждается и сходством их уравнений.

Отметим, что именно к виду (1.3) приводятся несложными преобразованиями уравнения несферических невырожденных однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$, полученные в [4]. Напомним также, что вырожденность (в точке 0) гладкой поверхности в $\mathbb{C}^4$, содержащей начало координат и заданной уравнением $\mathrm{Im}\ z_4 = F(z_1, z_2, z_3, \mathrm{Re}\ z_4)$, $dF(0) = 0$, означает вырожденность матрицы

$$H = \left(\partial^2 F/\partial z_k \partial \bar{z}_j\right)(0), \quad k, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Везде ниже мы подразумеваем возможность описания изучаемых однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами 7-мерных алгебр Ли, именно такими уравнениями.

Реализованная в настоящей статье техника развивает изложенные в [10] идеи реализации (представления) абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в многомерных комплексных пространствах. Рассмотрение только 7-мерных орбит таких алгебр в $\mathbb{C}^4$, определяемых системой (семи базисных) уравнений

$$\operatorname{Re}\left(e_k(\Phi)_{|M}\right) \equiv 0, \qquad k = 1, ..., 7, \tag{1.5}$$

означает полноту ранга этих алгебр. Условие такой полноты и требование невырожденности по Леви орбит обсуждаемых алгебр оказываются жесткими фильтрами, позволяющими свести рассмотрения больших семейств алгебр Ли к изучению лишь их отдельных представителей. На заключительном этапе системы уравнений в частных производных (1.5) интегрируются стандартными методами.

Настоящая статья представляет собой расширенное и уточненное содержание доклада, представленного на конференции «УОМШ-2020» в ноябре 2020 г. (см. [11], [12]).

Отметим еще один момент, возникший в связи с замечаниями рецензента по настоящей работе. Базой для рассуждений статьи является классификация 7-мерных (а также 6-мерных и 5-мерных) нильпотентных алгебр Ли. Для 7-мерного случая такая классификация имеется, например, в известной статье C. Seeley [13]. Однако, как показал M.P. Gong в [14], статья C. Seeley содержит некоторые ошибки и неточности. В связи с этим авторы использовали необходимые классификационные списки именно из работы [14], считая их более надежными.

## 2. Простейшие случаи разложимых алгебр Ли

Основным результатом первой части статьи является следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Вещественная гиперповерхность в $\mathbb{C}^4$, являющаяся орбитой нильпотентной разложимой 7-мерной алгебры Ли, может быть только вырожденной по Леви.*

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько случаев, связанных с возможными структурами разложимых алгебр и с размерностями содержащихся в них абелевых идеалов. Полное доказательство складывается из совокупности отдельных случаев, обсуждаемых в разделах 2-5 статьи.

Обсудим возможные структуры разложимых 7-мерных алгебр Ли.

Список таких алгебр несложно сформировать с учетом представления числа 7 в виде сумм нескольких меньших (натуральных) чисел, равных размерностям неразложимых алгебр-слагаемых. Формально говоря, таких разложений имеется 14; например, в виде суммы двух слагаемых число 7 представляется тремя способами:

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3.$$

Кроме того, имеется 4 представления этого числа в виде суммы трех слагаемых, 3 разложения из четырех слагаемых, 2 разложения из пяти слагаемых и по одному разложению из шести и из семи слагаемых.

Отметим, впрочем, что прямая сумма $g = g_1 \oplus ... \oplus g_n$ алгебр Ли является нильпотентной тогда и только тогда, когда нильпотентно каждое слагаемое в этой сумме. Поскольку неразложимых двумерных нильпотентных алгебр не существует, из формальных представлений семерки в виде суммы меньших слагаемых нужно удалить все разложения, содержащие хотя бы одно вхождение слагаемого «2». Так получается уточненный список из 7 возможностей

$$\begin{aligned} 7 &= (6+1) = (4+3) = (5+1+1) = (3+3+1) = (4+1+1+1) \\ &= (3+1+1+1+1) = (1+1+1+1+1+1+1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Еще одним моментом является учет количества нильпотентных (неразложимых) алгебр Ли «малых» размерностей. Согласно [14], имеется 20 таких алгебр размерности шесть, еще 6 нильпотентных (неразложимых) алгебр Ли имеют размерность пять. Каждая из размерностей 1, 3, 4 имеет ровно по одному нильпотентному неразложимому представителю. В силу этого, набору разложений (2.1) соответствуют

$$20 + 1 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 31$$

различная нильпотентная разложимая 7-мерная алгебра Ли.

Для многих из обозначенных 31 разложимой алгебры Ли отсутствие вещественных Леви-невырожденных гиперповерхностей, являющихся орбитами голоморфных реализаций этих алгебр, устанавливается достаточно легко. Основанием для такого вывода является следующее утверждение, доказанное в [5].

**Теорема 2.2.** *Если 7-мерная алгебра Ли $g_7$ имеет 5-мерную абелеву подалгебру $I_5$, и в дополнении $g_7 \backslash I_5$ имеется элемент, коммутирующий с 4-мерной подалгеброй $h_4 \subset I_5$, то все интегральные (гипер)поверхности голоморфной реализации алгебры $g_7$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ вырождены по Леви.*

**Замечание 2.1.** *Очевидным следствием этой теоремы является утверждение о Леви-вырожденности всех орбит в $\mathbb{C}^4$ любой голоморфной реализации 7-мерной алгебры $g_7$, имеющей 6-мерную абелеву подалгебру.*

Применим сначала теорему 2.2 и ее следствие к разложимым алгебрам, содержащим в своих разложениях не более, чем 4-мерные слагаемые.

Здесь и далее нильпотентные неразложимые слагаемые малых размерностей $k \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$, составляющие обсуждаемую 7-мерную алгебру, будем обозначать через $\mathfrak{g}_k$.

**Предложение 2.1.** *7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ любых реализаций пяти алгебр*

$$\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_3, \quad 2\mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_4 \oplus 3\mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_3 \oplus 4\mathfrak{g}_1, \quad 7\mathfrak{g}_1 \tag{2.2}$$

*могут быть только вырожденными по Леви.*

*Доказательство.* Доказательство предложения 2.1 начнем с конца списка (2.2). Абелева алгебра $7\mathfrak{g}_1$ содержит в себе 6-мерный абелев идеал, а потому, по следствию из теоремы 2.2 может иметь только вырожденные по Леви 7-мерные орбиты.

Трехмерная алгебра Гейзенберга $\mathfrak{g}_3$ с единственным соотношением

$$[e_1, e_2] = e_3 \tag{2.3}$$

содержит пару коммутирующих векторов $e_2, e_3$. Линейная оболочка $h_2$ этих векторов является 2-мерной абелевой подалгеброй (и даже абелевым идеалом) в $\mathfrak{g}_3$. А в сумме с четырьмя одномерными абелевыми алгебрами $h_2$ образует 6-мерную абелеву подалгебру в 7-мерной алгебре Ли $\mathfrak{g}_3 \oplus 4\mathfrak{g}_1$.

Аналогично, у единственной нетривиальной 4-мерной нильпотентной алгебры Ли с соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = e_4$$

имеется (большой по размерности) 3-мерный абелев идеал $h_3 =< e_2, e_3, e_4 >$. Тогда у 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_4 \oplus 3\mathfrak{g}_1$ также имеется 6-мерный абелев идеал.

У двух первых алгебр Ли из списка (2.2) имеется лишь 5-мерный абелев идеал. В случае алгебры $\mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_3$ из двух слагаемых это $h_5 = h_3 + h_2$, а во втором случае $h_5 = h_2^{(1)} + h_2^{(2)} + \mathfrak{g}_1$, где $h_2^{(1)}, h_2^{(2)}$ – двумерные абелевы идеалы двух 3-мерных слагаемых, входящих в алгебру $g_7 = 2\mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1$.

В дополнении к этому идеалу имеется элемент, коммутирующий с четырьмя независимыми векторами идеала $h_5$.

В первом случае в качестве такого элемента можно взять $e_5$ из $\mathfrak{g}_3$ (считая, что эта подалгебра суммарной алгебры $g_7$ описывается соотношением $[e_5, e_6] = e_7$), не входящий в двумерный идеал $h_2$. Этот элемент коммутирует с базисом $e_2, e_3, e_4$ идеала $h_3$, а также с элементом $e_7$ из $\mathfrak{g}_3$.

Во втором случае обозначим для наглядности два 3-мерных слагаемых, входящих в $g_7$, через $\mathfrak{g}_3^{(1)}$ и $\mathfrak{g}_3^{(2)}$. Здесь элемент $e_1$ из первого 3-мерного слагаемого (с соотношением (2.3)), дополнительный к $h_2^{(1)}$, коммутирует с двумя базисными элементами двумерного идеала $h_2^{(2)}$ второй 3-мерной алгебры $\mathfrak{g}_3^{(2)}$, с одномерным слагаемым $\mathfrak{g}_1$, а также с элементом $e_3$.

Тогда, в силу теоремы 2.2 и ее следствия, для всех пяти алгебр Ли из (2.2) утверждение об отсутствии у них невырожденных орбит в $\mathbb{C}^4$ доказано. $\square$

Переходим теперь к исследованию разложимых алгебр Ли, содержащих, в соответствии с (2.1), 5-мерное или 6-мерное слагаемое.

## 3. Алгебры с 5-мерным и 6-мерным неразложимыми слагаемыми

**Предложение 3.1.** *7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ любых реализаций алгебр Ли вида $\mathfrak{g}_5 \oplus 2\mathfrak{g}_1$ с нильпотентным неразложимым слагаемым размерности 5 могут быть только вырожденными по Леви.*

*Доказательство.* Выпишем, в соответствии с [14] (см. также [15]), таблицу коммутационных соотношений для всех шести нильпотентных (неразложимых) алгебр Ли размерности 5 (здесь и далее через $s_{jk}$ обозначается коммутатор $[e_j, e_k]$).

Таблица 3.1: Неразложимые 5-мерные нильпотентные алгебры Ли [14]

| Алгебры | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{14}$ | $s_{15}$ | $s_{23}$ | $s_{24}$ | $s_{25}$ | $s_{34}$ | $s_{35}$ | $s_{45}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{5,1}$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | | $e_5$ | | | | | |
| $N_{5,2,1}$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | | | | | | | |
| $N_{5,2,2}$ | $e_4$ | | $e_5$ | | $e_5$ | | | | | |
| $N_{5,2,3}$ | $e_3$ | $e_4$ | | | $e_5$ | | | | | |
| $N_{5,3,1}$ | $e_5$ | | | | | | | $e_5$ | | |
| $N_{5,3,2}$ | $e_4$ | $e_5$ | | | | | | | | |

Из этой таблицы легко видеть, что алгебры $N_{5,2,1} \oplus 2\mathfrak{g}_1$ и $N_{5,3,2} \oplus 2\mathfrak{g}_1$ имеют 6-мерный абелев идеал $I_6 =< e_2, e_3, e_4, e_5 > \oplus 2\mathfrak{g}_1$.

А для остальных четырех алгебр $\mathfrak{g}_5$ из этой таблицы сумма $\mathfrak{g}_5 \oplus 2\mathfrak{g}_1$ имеет 5-мерный абелев идеал вида $I_3 \oplus 2\mathfrak{g}_1$. Здесь для алгебры $N_{5,1}$ абелев идеал $I_3$ – это линейная оболочка $< e_3, e_4, e_5 >$, для $N_{5,2,2}$ – это $< e_2, e_4, e_5 >$, а для двух оставшихся алгебр $N_{5,2,3}$ и $N_{5,3,1}$ положим $I_3 =< e_3, e_4, e_5 >$.

Остается заметить, что в дополнении $\mathfrak{g}_5 \setminus I_3$ к каждому из этих 5-мерных идеалов имеется элемент, коммутирующий с двумя элементами $I_3$:

$e_2$ коммутирует с $< e_4, e_5 > \subset I_3$ в случае алгебр $N_{5,1}$, $N_{5,2,3}$ и $N_{5,3,1}$,

$e_3$ коммутирует с $< e_4, e_5 > \subset I_3$ в случае алгебры $N_{5,2,2}$.

Тогда у любой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_7 = \mathfrak{g}_5 \oplus 2\mathfrak{g}_1$ с первым слагаемым из таблицы 3.1 имеется 5-мерный абелев идеал $I_5$ и элемент в дополнении к этому идеалу, коммутирующий с четырьмя независимыми элементами $I_5$. По теореме 2.2 все 7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ алгебр Ли, обсуждаемых в этом предложении, могут быть только вырожденными. $\square$

Исследование 20 разложимых алгебр, содержащих 6-мерное неразложимое слагаемое, начнем со следующего технического утверждения.

**Предложение 3.2.** *Тринадцать из 20 алгебр вида $\mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_1$ имеют 5-мерный идеал и элемент в дополнении, коммутирующий с 4-мерной подалгеброй этого идеала. Пять из семи оставшихся алгебр имеют 5-мерный абелев идеал и элемент в дополнении к нему, коммутирующий лишь с 3-мерной подалгеброй такого идеала. Две алгебры из семи имеют лишь 4-мерный абелев идеал, а в дополнении к нему два элемента, коммутирующие с 2-мерными подалгебрами такого идеала.*

**Замечание 3.1.** *Для упомянутых 13 алгебр Ли из формулировки предложения 3.2 утверждение теоремы 2.1 выполняется в силу теоремы 2.2.*

**Замечание 3.2.** *Уточним, что у двух алгебр из этих 13 имеется 6-мерный абелев идеал и, тем самым, формальные условия о 5-мерном идеале, зафиксированные в формулировке предложения 3.2, для них также выполняются.*

*Доказательство.* Доказательство предложения 3.2 требует аккуратного рассмотрения (например, с использованием компьютера) коммутационных соотношений, аналогичных приведенным выше в таблице 3.1 и имеющихся, например, в [14]. Мы кратко прокомментируем здесь лишь 3 алгебры из упомянутых 13, а подробно обсудим 7 наиболее интересных алгебр вида $\mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_1$, не удовлетворяющих условиям теоремы 2.2.

Итак, две 6-мерные алгебры:

$N_{6,2,1}$ с четырьмя коммутационными соотношениями $[e_1, e_i] = e_{i+1}, 2 \leq i \leq 5$ и $N_{6,3,4}$ с тремя соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$; $[e_2, e_3] = e_5$; $[e_2, e_4] = e_6$ содержат абелевы идеалы $I_5^{(1)} =< e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 >$ и $I_5^{(2)} =< e_1, e_3, e_4, e_5, e_6 >$ соответственно.

Одномерное слагаемое $\mathfrak{g}_1$, включенное в прямую сумму с каждой из этих алгебр, очевидно, увеличивает размерность абелева идеала получаемых 7-мерных алгебр на единицу.

В качестве примера «общей» для 13 алгебр ситуации рассмотрим три нетривиальных коммутационных соотношения, задающих $N_{6,3,6}$, последнюю из 20 неразложимых 6-мерных нильпотентных алгебр в списке [14]:

$$[e_1, e_2] = e_4; \qquad [e_1, e_3] = e_5; \qquad [e_2, e_3] = e_6.$$

Эта алгебра имеет лишь 4-мерный абелев идеал $I_4 =< e_3, e_4, e_5, e_6 >$, а в ее прямой сумме с одномерной алгеброй $\mathfrak{g}_1$ мы получаем 5-мерный идеал $I_5 = I_4 \oplus \mathfrak{g}_1$. При этом элемент $e_2$ из дополнения к $I_5$ коммутирует с тремя полями $e_4, e_5, e_6$ из $I_4$, а также с базисным полем одномерного слагаемого $\mathfrak{g}_1$.

Опишем теперь в виде таблицы коммутационные соотношения для семи наиболее интересных алгебр (из двадцати), не удовлетворяющих условиям теоремы 2.2. При этом обратим внимание на принадлежность центру любой из 20 обсуждаемых алгебр Ли базисного элемента $e_6$. По этой причине в таблице 3.2 выписаны лишь 10 (вместо формальных 15) коммутационных соотношений для каждой из включенных в нее алгебр: тривиальные соотношения с $e_6$ опущены.

Таблица 3.2: 6-мерные алгебры Ли с «маломерными» абелевыми идеалами [14]

| Алгебры | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_1$ | $s_{15}$ | $s_{23}$ | $s_{24}$ | $s_{25}$ | $s_{34}$ | $s_{35}$ | $s_{45}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{6,1,1}$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_5$ | $e_6$ | | | | |
| $N_{6,1,2}$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | | $e_5$ | | $e_6$ | $-e_6$ | | |
| $N_{6,1,4}$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_6$ | | $e_6$ | | $e_6$ | | | |
| $N_{6,2,2}$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | | | | $e_6$ | $-e_6$ | | |
| $N_{6,2,3}$ | $e_4$ | | $e_5$ | $e_6$ | $e_5$ | | | $-e_6$ | | |
| $N_{6,2,5}$ | $e_3$ | $e_4$ | | $e_6$ | $e_5$ | $e_6$ | | | | |
| $N_{6,3,1}$ | $e_4$ | $e_5$ | | | | | $e_6$ | | $e_6$ | |

Из этой таблицы вытекают следующие уточнения предложения 3.2 об абелевых идеалах $I_k$ обсуждаемых 7-мерных алгебр и элементах из дополнений к этим идеалам, коммутирующих с подалгебрами таких идеалов ($\mathfrak{g}_1 =< e_7 >$):

$N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ : $I_5 =< e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $e_2$ коммутирует с $< e_5, e_6, e_7 >$,
$N_{6,1,4} \oplus \mathfrak{g}_1$ : $I_5 =< e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $e_1$ коммутирует с $< e_5, e_6, e_7 >$,
$N_{6,2,3} \oplus \mathfrak{g}_1$ : $I_5 =< e_2, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $e_3$ коммутирует с $< e_5, e_6, e_7 >$,
$N_{6,2,5} \oplus \mathfrak{g}_1$ : $I_5 =< e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $e_1$ коммутирует с $< e_4, e_6, e_7 >$,
$N_{6,3,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ : $I_5 =< e_1, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $e_2$ коммутирует с $< e_4, e_6, e_7 >$;
$N_{6,1,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ и $N_{6,2,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ : $I_4 =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $e_2$ коммутирует с $< e_4, e_6, e_7 >$ .
Предложение 3.2 считаем доказанным. □

Наши ближайшие рассмотрения будут связаны именно с выделенными идеалами семи обсуждаемых алгебр.

## 4. Вспомогательные утверждения

**Лемма 4.1.** *([4]). Пусть вещественная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ невырождена по Леви вблизи некоторой своей точки $Q$ и является орбитой 7-мерной алгебры Ли $g$ голоморфных векторных полей в этом пространстве. Пусть еще $I_4$ – 4-мерная абелева подалгебра в $g$ с фиксированным базисом $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$. Голоморфной заменой координат пространства $\mathbb{C}^4$ (определенной вблизи точки $Q$) этот базис можно привести к одному из трех видов*

$$1)\ \begin{array}{l}(1,\ 0,\ 0,\ 0),\\(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\(0,\ 0,\ 1,\ 0),\\(0,\ 0,\ 0,\ 1),\end{array}\qquad 2)\ \begin{array}{l}(0,\ b_4(z_1),\ c_4(z_1),\ d_4(z_1)),\\(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\(0,\ 0,\ 1,\ 0),\\(0,\ 0,\ 0,\ 1),\end{array}\qquad 3)\ \begin{array}{l}(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\(0,\ 0,\ c_5(z_1),\ d_5(z_1)),\\(0,\ 0,\ 1,\ 0),\\(0,\ 0,\ 0,\ 1).\end{array}$$

**Лемма 4.2.** *Пусть $M \subset \mathbb{C}^4$ – невырожденная по Леви гиперповерхность, на которой имеется 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей с 5-мерной абелевой подалгеброй $I_5$. Тогда первый из трех случаев леммы 4.1 невозможен ни для какой четверки независимых полей из $I_5$.*

*Доказательство.* Доказательство леммы 4.2. Рассмотрим какой-либо базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ 5-мерной абелевой алгебры $I_5$, считая четверку полей из этого базиса выпрямленной и имеющей (в некоторых координатах) вид

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1, 0), \qquad e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Пятое базисное поле $e_5$ алгебры $I_5$, коммутирующее со всей этой четверкой, обязано иметь постоянными все свои четыре компоненты, т.к. каждое поле первой четверки означает дифференцирование по одной из комплексных переменных пространства $\mathbb{C}^4$. Рассматривая вместо $e_5$ его линейную комбинацию с полями первой четверки, можно считать, что оно имеет вид

$$e_5 = (iA_5, iB_5, iC_5, iD_5),$$

где все $A_5, B_5, C_5, D_5$ – вещественные константы.

Но и векторное поле $e_5^* = -ie_5 = (A_5, B_5, C_5, D_5)$ также является касательным к $M$ (как линейная комбинация полей первой базисной четверки), а это означает, что M вырождена по Леви. Полученное противоречие с условием невырожденности $M$ доказывает лемму 4.2. □

**Лемма 4.3.** *Пусть в 7-мерной алгебре $g_7$ голоморфных векторных полей на невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ имеется 5-мерная абелева подалгебра $I_5$, а в ней 3-мерная подалгебра $h_3$, с которой коммутирует некоторый элемент из дополнения $g_7 \setminus I_5$. Тогда при упрощении четверки независимых полей, содержащей какой-либо базис $h_3$ и произвольное четвертое поле из $I_5 \setminus h_3$, выпрямление только двух полей из $h_3$ (и третьего из $I_5 \setminus h_3$) невозможно.*

*Доказательство.* Доказательство леммы 4.3. Будем считать базисом 5-мерной абелевой подалгебры $I_5$ поля $e_3$, $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$, причем $h_3 =< e_5, e_6, e_7 >$. Упрощая четверку полей $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$ по схеме леммы 4.1, необходимо показать, что в обсуждаемой ситуации (при произвольном выборе базисных полей $e_5$, $e_6$, $e_7$) третий случай этой леммы невозможен.

Допуская, что он возможен, мы имеем в этом случае три выпрямленных поля $e_4$, $e_6$, $e_7$, два из которых принадлежат 3-мерной подалгебре, а третье – нет. Поле

$$e_3 = (a_3(z), b_3(z), c_3(z), d_3(z)),$$

также входящее в абелеву алгебру $I_5$, коммутирует с выпрямленной тройкой полей. Поэтому его компоненты могут зависеть *только* от переменной $z_1$. При этом первая компонента $a_3(z_1)$ обязана быть тождественно нулевой, т.к. в противном случае, пользуясь техникой работы [10], поле $e_3$ можно выпрямить с сохранением выпрямленного вида полей $e_4$, $e_6$, $e_7$ (а это невозможно по доказанному в лемме 4.2).

Тогда у всей базисной пятерки полей $e_3$, $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$ первые компоненты $a_k(z_1)$ являются нулевыми. Воспользуемся теперь существованием поля

$$e_1 = (a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z)) \in g_7 \setminus I_5,$$

коммутирующего с полями $e_5 = (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1))$, $e_6 = \partial/\partial z_3$, $e_7 = \partial/\partial z_4$. В силу условий $[e_1, e_6] = [e_1, e_7] = 0$ компоненты $e_1$ зависят не более, чем от переменных $z_1$, $z_2$. Тогда

$$0 = [e_1, e_5] = a_1(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c_5'(z_1), d_5'(z_1)).$$

Следовательно, $a_1(z_1, z_2)c_5'(z_1) \equiv 0$, $a_1(z_1, z_2)d_5'(z_1) \equiv 0$.

Здесь либо $a_1(z_1, z_2) \equiv 0$, либо оба коэффициента $c_5(z_1), d_5(z_1)$ в действительности не зависят и от переменной $z_1$, т.е. являются константами.

Но для Леви-невырожденной поверхности $M$ коэффициент $a_1(z)$ не может равняться нулю, т.к. 6 нулей в столбце первых компонент базисных полей означают вырождение $M$. А в линейной оболочке независимой (над $\mathbb{R}$) тройки векторных полей

$$e_5 = (0, 0, C_5, D_5), \qquad e_6 = (0, 0, 1, 0), \qquad e_7 = (0, 0, 0, 1)$$

с постоянными компонентами всегда можно найти два нетривиальных поля вида $Z, iZ$. Наличие такой пары полей, касательных к гиперповерхности $M$, также означает ее вырождение по Леви!

Полученные противоречия доказывают лемму 4.3. □

**Следствие 4.1.** *В условиях леммы 4.3 можно выпрямить любой базис трехмерной подалгебры $h_3$, коммутирующей с элементом из дополнения $g_7 \setminus I_5$.*

Упрощенно говоря, поиски невырожденных однородных орбит для алгебр Ли с такими свойствами достаточно проводить, ограничиваясь лишь случаем 2 леммы 4.1.

## 5. Завершение доказательства теоремы 2.1

Теорема 2.1 будет полностью доказана после рассмотрения орбит совокупности семи «исключительных» алгебр Ли из таблицы 3.2. Ниже обсуждаются две группы алгебр, на которые естественно распадается эта совокупность.

### 5.1. Разложимые алгебры с 5-мерными абелевыми идеалами.

**Предложение 5.1.** *Голоморфные реализации в пространстве $\mathbb{C}^4$ пяти алгебр*

$$N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1, \qquad N_{6,1,4} \oplus \mathfrak{g}_1, \qquad N_{6,2,3} \oplus \mathfrak{g}_1, \qquad N_{6,2,5} \oplus \mathfrak{g}_1, \qquad N_{6,3,1} \oplus \mathfrak{g}_1, \tag{5.1}$$

*содержащих 5-мерный абелев идеал, не имеют Леви-невырожденных 7-мерных орбит.*

*Доказательство.* Для каждой из пяти обозначенных 7-мерных алгебр Ли воспользуемся вложениями $h_3 \subset I_5 \subset g_7$, приведенными в разделе 4, и соответствующими обсуждениям предыдущего раздела; также напомним, что $h_3$ коммутирует с некоторым элементом $g_7 \backslash I_5$.

При этом $I_5, h_3$ формируются, вообще говоря, по-разному в каждой из пяти алгебр. Например, для алгебры $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ имеем $I_5 =< e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 >$, а элемент $e_2$ коммутирует с 3-мерной алгеброй $h_3 =< e_5, e_6, e_7 >$.

Предложение 5.1 мы докажем именно для этой алгебры; справедливость его для остальных алгебр из списка (5.1) устанавливается аналогично.

Итак, при помощи голоморфной замены координат выпрямим, в соответствии со следствием из Леммы 4.3, четверку полей $e_2, e_5, e_6, e_7$. Зафиксируем полученный вид базиса

$$\begin{aligned}
e_1 &= (a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z)),\\
e_2 &= (1, 0, 0, 0),\\
e_3 &= (0, b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)),\\
e_4 &= (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1)),\\
e_5 &= (0, 1, 0, 0),\\
e_6 &= (0, 0, 1, 0),\\
e_7 &= (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

алгебры $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ после такого выпрямления и продолжим рассмотрение коммутационных соотношений в реализации этой алгебры.

Из 21 соотношения для пар базисных полей остались нерассмотренными условия на шесть коммутаторов $[e_1, e_k]$ $(k = 2, ..., 7)$ и два коммутатора $[e_2, e_3]$, $[e_2, e_4]$. Из соотношений $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_6$ легко выводятся уточнения вида полей

$$e_3 = (0, z_1 + B_3, C_3, D_3), \qquad e_4 = (0, B_4, z_1 + C_4, D_4), \tag{5.2}$$

где $B_k, C_k, D_k$ – некоторые комплексные константы.

Еще два соотношения $[e_1, e_6] = [e_1, e_7] = 0$ означают, что компоненты поля $e_1$ не зависят от переменных $z_3, z_4$. Уточнить зависимость этого поля от переменной $z_2$ позволяет соотношение $[e_1, e_5] = e_6$, из которого следует, что

$$e_1 = (a_1(z_1), b_1(z_1), -z_2 + c_1(z_1), d_1(z_1)) \tag{5.3}$$

с некоторыми голоморфными функциями $a_1, b_1, c_1, d_1$.

Поле такого вида должно удовлетворять трем последним соотношениям

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = e_4, \qquad [e_1, e_4] = e_5.$$

Однако, в самом последнем из них получаем противоречие, т.к. в силу (5.2) и (5.3) имеем:

$$[e_1, e_4] = a_1(z_1) \cdot (0, 0, 1, 0) - B_4 \cdot (0, 0, -1, 0) \neq (0, 1, 0, 0) = e_5.$$

Тем самым, допущение о существовании (хотя бы одной) невырожденной орбиты у алгебры Ли $N_{6,1,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ приводит к противоречию.

Для этой алгебры утверждение предложения 5.1 доказано. Как отмечалось выше, остальные алгебры, включенные в формулировку этого предложения, рассматриваются аналогично. □

### 5.2. Разложимые алгебры с 4-мерными абелевыми идеалами.

**Предложение 5.2.** *Голоморфные реализации в пространстве $\mathbb{C}^4$ алгебр $N_{6,1,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ и $N_{6,2,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ с 4-мерными максимальными абелевыми идеалами не имеют Леви-невырожденных орбит.*

*Доказательство.* Согласно таблице 3.2, две этих алгебры отличаются лишь в одном коммутаторе $[e_2, e_3]$. Рассуждения, приводимые ниже, не используют этот коммутатор и являются общими для обеих обсуждаемых алгебр.

Итак, допуская, что существует реализация какой-либо из обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли $g_7$ с невырожденными орбитами, рассмотрим три случая леммы 4.1 упрощения фиксированного базиса $e_4, e_5, e_6, e_7$ идеала $I_4$ этой алгебры, связанные именно с ее невырожденной орбитой.

В *первом случае* при выпрямленной четверке базисных полей идеала $I_4$ рассмотрим коммутационные соотношения каждого из остальных базисных полей алгебры $g_7$ с этой четверкой. Для поля $e_1$ имеем

$$[e_1, e_4] = e_5, \qquad [e_1, e_5] = 0, \qquad [e_1, e_6] = 0, \qquad [e_1, e_7] = 0.$$

Из этих соотношений получаем упрощенный вид поля

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1)$$

с некоторыми (комплексными) константами $A_1, B_1, C_1, D_1$. Аналогичные рассмотрения, связанные с полем $e_3$, приводят его к виду

$$e_3 = (A_3, B_3, z_1 + C_3, D_3)$$

с константами $A_3, B_3, C_3, D_3$. Вычисляя для таких полей их коммутатор и используя соотношение $[e_1, e_3] = e_4$, получим противоречие

$$A_1(0, 0, 1, 0) - A_3(0, -1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0).$$

Во *втором случае* четверку полей $e_4, e_5, e_6, e_7$ считаем имеющей вид

$$\begin{aligned} e_4 &= (0, & b_4(z_1), && c_4(z_1), && d_4(z_1)), \\ e_5 &= (0, & 1, && 0, && 0), \\ e_6 &= (0, & 0, && 1, && 0), \\ e_7 &= (0, & 0, && 0, && 1). \end{aligned}$$

Здесь мы рассмотрим коммутаторы полей $e_1, e_3$ с тремя выпрямленными полями идеала $I_4$. Так как все шесть таких коммутаторов равны нулю, приходим к выводу о зависимости компонент пары полей $e_1$ и $e_3$ только от переменной $z_1$. Отметим, что с учетом упрощенного вида базиса идеала $I_4$ в этом случае первые компоненты этих полей $a_1(z_1), a_3(z_1)$ не могут одновременно быть тождественно нулевыми.

Рассмотрим в связи с этим два подслучая. В первом, считая $a_1(z_1) \neq 0$, можно (аналогично обсуждениям двух предыдущих разделов) выпрямить базисное поле $e_1$ до вида $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ с сохранением выпрямленной тройки полей $e_5, e_6, e_7$. Вид полей $e_3$ и $e_4$ также сохранится (но с измененными, вообще говоря, функциональными коэффициентами $a_k(z_1), b_k(z_1), c_k(z_1), d_k(z_1),\ k = 3, 4$).

Тогда из пары коммутационных соотношений $[e_1, e_4] = e_5$ и $[e_1, e_3] = e_4$ получаем уточненный вид полей

$$e_4 = (0, z_1 + B_4, C_4, D_4), \qquad e_3 = (A_3, \frac{1}{2}(z_1 + B_4)^2 + B_3, C_4 z_1 + C_3, D_4 z_1 + D_3).$$

Однако, вычисляя для них коммутатор $[e_3, e_4] = -e_6$, приходим к противоречию, т.к. левая часть последнего равенства $A_3 \cdot (0, 1, 0, 0)$ не совпадает с правой.

Во втором подслучае мы полагаем $a_1(z_1) \equiv 0$, но тогда $a_3(z_1) \neq 0$. По аналогии с предыдущим подслучаем поле $e_3$ выпрямим голоморфной заменой до состояния $e_3 = (1, 0, 0, 0)$.

Вычисляя в этом подслучае коммутатор $[e_3, e_4] = -e_6$, получим уточненный вид поля

$$e_4 = (0, B_4, -z_1 + C_4, D_4)$$

с некоторыми константами $B_4, C_4, D_4$. Тогда из соотношения $[e_1, e_3] = e_4$ получим аналогичное уточнение (с дополнительными константами $A_1, B_1, C_1, D_1$)

$$e_1 = (A_1, -B_4 z_1 + B_1, \frac{1}{2}(z_1 - C_4), -D_4 z_1 + D_1).$$

Остается вычислить коммутатор полей $e_1, e_4$ с учетом полученных уточнений. Имеем:

$$[e_1, e_4] = A_1 \cdot (0, 0, -1, 0),$$

а это противоречит коммутационному соотношению $[e_1, e_4] = e_5 = (0, 1, 0, 0)$.

Наконец, в *третьем случае* имеем четверку базисных полей идеала $I_4$ в виде

$$\begin{aligned} e_4 &= (0, 1, \quad 0, \quad 0), \\ e_5 &= (0, 0, \quad c_5(z_1), \quad d_5(z_1)), \\ e_6 &= (0, 0, \quad 1, \quad 0), \\ e_7 &= (0, 0, \quad 0, \quad 1). \end{aligned}$$

Обсудим здесь еще два поля из дополнения к этому идеалу, а именно $e_1$ и $e_3$. Коммутатор каждого из этих полей с полями $e_6$ и $e_7$ равен нулю. Поэтому компоненты полей $e_1$ и $e_3$ зависят не более, чем от переменных $z_1, z_2$. Рассматривая с учетом этого коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [e_1, e_5] &= a_1(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c_5'(z_1), d_5'(z_1)) = 0, \\ [e_3, e_5] &= a_3(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c_5'(z_1), d_5'(z_1)) = 0, \end{aligned}$$

получаем одну из двух ситуаций:

либо 1) $a_1(z_1, z_2) \equiv 0, \quad a_3(z_1, z_2) \equiv 0$,

либо 2) $c_5(z_1) = C_5 = const, \quad d_5(z_1) = D_5 = const$.

В первой ситуации мы имеем на невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ шестерку линейно независимых голоморфных векторных полей $e_k$ $(k = 1, 3, 4, 5, 6, 7)$ с тождественно нулевыми первыми компонентами. Это, как отмечалось выше, невозможно.

Вторая ситуация также невозможна на невырожденной гиперповерхности, т.к. в линейной оболочке независимой (над $\mathbb{R}$) тройки векторных полей

$$e_5 = (0, 0, C_5, D_5), \qquad e_6 = (0, 0, 1, 0), \qquad e_7 = (0, 0, 0, 1)$$

с постоянными компонентами найдутся два нетривиальных поля вида $Z, iZ$. Наличие такой пары полей, касательных к гиперповерхности $M$ означает ее вырождение по Леви.

Противоречия, возникающие в каждом из рассмотренных случаев и подслучаев, доказывают предложение 5.2. □

В свою очередь это предложение является завершающим фрагментом доказательства теоремы 2.1 и первой части настоящей статьи.

Переходя ко второй ее части, отметим, что основным моментом приведенных выше рассуждений является наличие абелевых подалгебр (идеалов), размерности не меньшей 4, у рассматриваемых 7-мерных алгебр Ли. При этом, по крайней мере, некоторые из рассмотренных алгебр содержат более одной абелевой подалгебры (максимально возможной размерности).

Так, алгебра $N_{6,1,2} \oplus \mathfrak{g}_1$ (см. таблицу 3.2) имеет помимо выписанного 4-мерного идеала $I_4 =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$ еще три аналогичных абелевых идеала

$$I'_4 =< e_1, e_5, e_6, e_7 >, \qquad I''_4 =< e_2, e_4, e_6, e_7 >, \qquad I'''_4 =< e_3, e_5, e_6, e_7 > .$$

Такое свойство 7-мерных алгебр также является информативным в задаче описания их орбит. Мы используем его в завершающих разделах статьи.

## 6. Неразложимые алгебры с тремя 4-мерными идеалами

Ниже обсуждаются 7-мерные алгебры Ли, имеющие лишь 4-мерные абелевы идеалы, но количество таких идеалов в каждой рассматриваемой алгебре предполагается не меньшим, чем три. Среди 149 неразложимых нильпотентных алгебр Ли 4 алгебры $(17, 157, 147A, 37D_1$ в нумерации работы [14]) имеют больше трех абелевых идеалов и 8 алгебр

$$247D, \quad 247E, \quad 247Q, \quad 247R, \quad 147D, \quad 137D, \quad 1357A, \quad 1357D \tag{6.1}$$

– ровно три таких идеала.

Оказалось, что в отличие от первой части статьи, 4 из этих 12 алгебр Ли имеют невырожденные по Леви орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$. Промежуточным, но идейно важным результатом описания таких поверхностей является следующее утверждение.

**Теорема 6.1.** *Пусть вещественная невырожденная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ является орбитой 7-мерной алгебры голоморфных векторных полей. Если эта алгебра не содержит 5-мерных абелевых подалгебр, но имеет три 4-мерных абелевых подалгебры, то $M$ голоморфно эквивалентна трубчатой гиперповерхности (уравнение которой зависит лишь от мнимых частей четырех комплексных переменных).*

Полное описание невырожденных орбит 12 рассматриваемых алгебр содержится в следующей теореме.

**Теорема 6.2.** *1) С точностью до голоморфной эквивалентности невырожденными по Леви орбитами в $\mathbb{C}^4$ 7-мерной алгебры Гейзенберга 17, содержащей восемь различных 4-мерных абелевых идеалов, являются две сферические поверхности (квадрики)*

$$\mathrm{Im}\, z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2; \tag{6.2}$$

*2) три алгебры 157, 147A, $37D_1$, имеющие по четыре различных абелевых идеала, не допускают невырожденных по Леви 7-мерных орбит в $\mathbb{C}^4$;*

*3) пять алгебр 247D, 247E, 247Q, 247R, 147D, содержащие по три различных абелевых идеала, также не допускают невырожденных 7-мерных орбит в пространстве $\mathbb{C}^4$;*

*4) с точностью до голоморфной эквивалентности невырожденными орбитами двух алгебр 137D, 1357A являются лишь несферические поверхности*

$$\mathrm{Im}\, z_4 = z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + |z_2|^2 \pm |z_1|^4; \tag{6.3}$$

*5) все невырожденные орбиты алгебры 1357D голоморфно эквивалентны индефинитной квадрике*

$$\mathrm{Im}\, z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2. \tag{6.4}$$

Доказательству теоремы 6.2 посвящена оставшаяся часть статьи. Всю совокупность 12 обсуждаемых в ней алгебр мы разобьем на отдельные блоки; интересующие нас свойства алгебр, составляющих блоки, сформулированы и доказаны в предложениях 6.1, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2. Теорема 6.1 будет получена как следствие одного из таких утверждений.

Перед тем, как приступить к рассмотрению этих утверждений, выпишем здесь коммутационные соотношения для всех 12 обсуждаемых алгебр. Для первой четверки алгебр 17, 157, $147A$, $37D_1$ они имеют в некоторых базисах вид:

$$\begin{aligned}
&17\ : && [e_1,e_2]=[e_3,e_4]=[e_5,e_6]=e_7\\
&157\ : && [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_7,\ [e_2,e_4]=e_7,\ [e_5,e_6]=e_7;\\
&147A\ : && [e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7;\\
&37D1\ : && [e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_3]=e_6,\ [e_1,e_4]=e_7,\ [e_2,e_3]=-e_7,\\
& && [e_2,e_4]=e_6,\ [e_3,e_4]=-e_5.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Коммутационные соотношения для восьми алгебр (6.1) представлены ниже:

$$\begin{aligned}
&247D\ : && [e_1,e_k]=e_{k+2},\ k=2,3;\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7;\\
&247E\ : && [e_1,e_k]=e_{k+2},\ k=2,3,4;\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7;\\
&247Q\ : && [e_1,e_k]=e_{k+2},\ k=2,3,4;\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_5]=e_7;\ [e_3,e_4]=e_7;\\
&247R\ : && [e_1,e_k]=e_{k+2},\ k=2,3,4;\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6,\\
& && [e_2,e_5]=e_7;\ [e_3,e_4]=e_7;
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
&147D\ : && [e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=-e_6,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,\\
& && [e_2,e_6]=e_7,\ [e_3,e_4]=-2e_7;\\
&137D\ : && [e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,\\
& && [e_2,e_4]=e_7,\ [e_3,e_5]=-e_7;\\
&1357A\ : && [e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,\\
& && [e_2,e_6]=e_7,\ [e_3,e_4]=-e_7;\\
&1357D\ : && [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_k]=e_{k+2},\ k=3,4;\\
& && [e_2,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_7.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Выписывать интересующие нас 4-мерные идеалы рассматриваемых алгебр мы будем по мере необходимости. Отметим лишь, что выявление таких или других по размерности абелевых подалгебр и идеалов в большом списке [14] из 149 алгебр, а также определение количества таких идеалов в каждой алгебре естественно производить с помощью компьютерных программ (см. [16]). Для обсуждаемых здесь 12 алгебр все утверждения об идеалах несложно проверить непосредственно. Например, в алгебре $247D$ с выписанными выше коммутационными соотношениями имеются следующие абелевы идеалы:

$$I_4' =< e_3,e_5,e_6,e_7 >,\qquad I_4'' =< e_4,e_5,e_6,e_7 >,\qquad I_4''' =< e_4,e_2,e_6,e_7 > . \tag{6.8}$$

Отметим одну особенность ситуации с тремя абелевыми идеалами для обсуждаемых 12 алгебр, полезную для дальнейших обсуждений. Ее удобно сформулировать в терминах неупорядоченных наборов символов в 7-значном алфавите $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ (с фиксированным количеством элементов в наборе).

Закодируем для этого 4-мерный идеал, являющийся линейной оболочкой элементов $\{e_j, e_k, e_l, e_m\}$ 7-мерной алгебры, в виде (неупорядоченного) набора $(j, k, l, m)$ длины 4. Тогда можно измерять *расстояние* (типа расстояния Хемминга) между двумя такими наборами как количество символов, отличающих один набор от другого.

Например, идеалам (6.8) алгебры $247D$ соответствуют наборы

$$J_1 = (3, 5, 6, 7), \qquad J_2 = (4, 5, 6, 7), \qquad J_3 = (4, 2, 6, 7). \tag{6.9}$$

При этом расстояние от набора $J_2$ как до $J_1$, так и до $J_3$, равно 1, а $J_1$ и $J_3$ удалены друг от друга на две единицы. Будем говорить в таком случае, что идеалам $I_4'$, $I_4''$, $I_4'''$ алгебры $247D$ соответствует *(равнобедренный) треугольник со сторонами (1,1,2)* во множестве обсуждаемых наборов длины 4.

Отметим еще, что у алгебры $37D_1$ имеется 4 абелевых идеала с кодовыми наборами

$$J_1 = (1, 5, 6, 7), \qquad J_2 = (2, 5, 6, 7), \qquad J_3 = (3, 5, 6, 7), \qquad J_4 = (4, 5, 6, 7).$$

Любые два из них удалены на единичное расстояние друг от друга во множестве наборов длины 4, и это отличает алгебру $37D_1$ от алгебры $247D$. Оказывается, что среди 12 обсуждаемых алгебр только алгебра $37D_1$ является исключительной в смысле устройства 4-мерных идеалов.

**Предложение 6.1.** *Среди 4-мерных абелевых идеалов для каждой из 12 алгебр* (6.1), (6.5)*, кроме алгебры* $37D_1$*, найдутся три идеала, образующие (1,1,2)-треугольник во множестве кодирующих их наборов длины 4.*

*Доказательство.* Доказательство этого утверждения получается простым перебором; его иллюстрацией служат приведенные обсуждения идеалов алгебр $247D$ и $37D_1$. □

Рассмотрим отдельно алгебру $37D_1$, выделенную в предложении 6.1, а после этого перейдем к рассмотрению остальных 11 алгебр из набора (6.1), (6.5).

**Предложение 6.2.** *Реализация алгебры* $37D_1$ *в виде алгебры голоморфных векторных полей на невырожденной по Леви гиперповерхности в* $\mathbb{C}^4$ *невозможна.*

*Доказательство.* Допуская существование невырожденной по Леви орбиты такой алгебры и пользуясь леммой 4.1, обсудим по отдельности три случая, которые возникают при попытках упрощения базиса $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$ абелева идеала $I_4''$ этой алгебры.

В первом случае считаем, что

$$e_4 = (1, 0, 0, 0), \qquad e_5 = (0, 1, 0, 0), \qquad e_6 = (0, 0, 1, 0), \qquad e_7 = (0, 0, 0, 1). \tag{6.10}$$

Коммутационные соотношения (6.5) для каждого из трех оставшихся базисных полей 7-мерной алгебры $37D_1$ с выпрямленными полями $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$ позволяют существенно упростить вид полей $e_1$, $e_2$, $e_3$. Так из единственного нетривиального соотношения $[e_1, e_4] = e_7$ такого типа с участием поля $e_1$ получаем

$$e_1 = (A_1, B_1, C_1, -z_1 + D_1),$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1$ – некоторые комплексные константы.

Аналогично можно получить упрощенные представления для полей $e_2$, $e_3$:

$$e_2 = (A_2, B_2, -z_1 + C_2, D_2), \qquad e_3 = (A_3, z_2 + B_3, C_3, D_3).$$

**Замечание 6.1.** *Если в алгебре Ли векторных полей в* $\mathbb{C}^4$ *имеются два поля вида*

$$e_1 = (a_1(z), B_1, c_1(z), d_1(z)),$$
$$e_2 = (a_2(z), B_2, c_2(z), d_2(z)),$$

*где* $B_1, B_2$ *– некоторые константы, то вторая компонента коммутатора* $[e_1, e_2]$ *равна нулю.*

Учитывая это замечание и имеющееся в алгебре $37D_1$ соотношение

$$[e_1, e_2] = e_5 = (0, 1, 0, 0),$$

приходим к противоречию.

Во втором случае леммы 4.1 выпрямлены (до состояния (6.10)) лишь три поля $e_5$, $e_6$, $e_7$ того же идеала, а $e_4 = (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1))$. Воспользуемся наличием в обсуждаемой алгебре еще одного 4-мерного идеала $I'_4 =< e_3, e_5, e_6, e_7 >$. Компоненты поля $e_3$, коммутирующего с остальными тремя базисными полями $I'_4$, могут зависеть лишь от одной переменной $z_1$, т.е. все поле можно представить в виде

$$e_3 = (a_1(z_1), b_1(z_1), c_1(z_1), d_1(z_1)).$$

Если при этом компонента $a_1(z_1) \equiv 0$, то коммутатор $[e_3, e_4] = 0$, что противоречит соотношению $[e_3, e_4] = -e_5$, имеющемуся у данной алгебры. Следовательно, $a_1(z_1) \neq 0$ (возможно, в смещенной точке поверхности), и тогда все поле $e_3$ можно выпрямить до состояния $e_3 = (1, 0, 0, 0)$, пользуясь техникой работы [10] (см. также [7]).

Рассматривая теперь коммутаторы полей $e_1$, $e_2$ с выпрямленным базисом идеала $I'_4$, можно, аналогично случаю 1, упростить эти поля до вида

$$e_1 = (A_1, B_1, z_1 + C_1, D_1), \qquad e_2 = (A_2, B_2, C_2, z_1 + D_2).$$

По замечанию, использованному выше, вторая компонента коммутатора $[e_1, e_2]$ равна нулю, что противоречит соотношению $[e_1, e_2] = e_5$.

Наконец, в третьем случае, в преобразованных голоморфным преобразованием координатах, для нас важно, что $e_5 = (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1))$, и только пара полей $e_6, e_7$ имеет тот же вид, что и в (6.10). Так как два последних поля принадлежат центру $Z =< e_5, e_6, e_7 >$ алгебры $37D_1$, то компоненты всех полей этой алгебры могут зависеть лишь от переменных $z_1, z_2$.

Вычисляя в таком случае коммутаторы полей $e_1$, $e_2$, $e_3$ с полем $e_5$, получим:

$$\begin{aligned}
[e_1, e_5] &= a_1(z_1, z_2)(0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0,\\
[e_2, e_5] &= a_2(z_1, z_2)(0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0,\\
[e_3, e_5] &= a_3(z_1, z_2)(0, 0, c'_5(z_1), d'_5(z_1)) = 0.
\end{aligned}$$

Формально говоря, три таких равенства возможны в двух случаях:
*a*) $c_5(z_1) = Const, \qquad d_5(z_1) = Const$;
*b*) $a_1(z) = a_2(z) = a_3(z) = 0$.

Но для базисных векторных полей 7-мерной алгебры, касательных к невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$, невозможен ни один из них (см. доказательства леммы 4.3 и предложения 5.1).

Итак, при допущении существования невырожденной орбиты у алгебры $37D_1$ все три возможных ситуации упрощения идеала $I =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$ этой алгебры приводят к противоречиям. □

Для описания орбит 11 остальных алгебр Ли из набора (6.1), (6.5) и доказательства теорем 6.1 и 6.2 мы воспользуемся зафиксированным в предложении 6.1 свойством взаимного расположения их 4-мерных абелевых идеалов.

## 7. Сведение к трубкам и вырожденность орбит для 8 алгебр

**Предложение 7.1.** *Пусть 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей на вещественной невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ не содержит 5-мерных абелевых подалгебр, но имеет три абелевых 4-мерных подалгебры, образующих (1,1,2)-треугольник (во множестве кодирующих их наборов длины 4). Тогда голоморфной заменой координат можно выпрямить четверку базисных полей одной из абелевых подалгебр.*

*Доказательство.* Пусть $g$ – 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющая условиям предложения 7.1. Переобозначим для удобства базисные поля алгебры $g$ и ее 4-мерные абелевы подалгебры $I'$, $I''$, $I'''$ в соответствии с формулой (6.9), т.е. так, что

$$I' =< e_3, e_5, e_6, e_7 >, \quad I'' =< e_4, e_5, e_6, e_7 >, \quad I''' =< e_2, e_4, e_6, e_7 > .$$

**Замечание 7.1.** *Так как алгебра Ли $g$ не содержит 5-мерных абелевых подалгебр, то ни один из двух коммутаторов $[e_3, e_4]$, $[e_2, e_5]$ не может быть нулевым.*

Далее применим к базису идеала $I''$ лемму 4.1. Если этот базис удается полностью выпрямить (случай 1), то предложение 7.1 верно.

Пусть набор полей $(e_4, e_5, e_6, e_7)$ попадает во второй случай леммы 4.1. Тогда рассмотрим поле $e_3$ и абелев идеал $I'$. Так как три его поля $e_5$, $e_6$, $e_7$ выпрямлены, то компоненты коммутирующего с ними поля $e_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$ могут зависеть только от переменной $z_1$.

Если при этом $a_3(z_1) \neq 0$, то все поле

$$e_3 = (a_3(z_1), b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)) \tag{7.1}$$

может быть приведено (как и при доказательстве леммы 4.3) голоморфной заменой координат к виду $e_3 = \partial/\partial z_1$ при одновременном сохранении выпрямленного вида остальных базисных полей $e_5$, $e_6$, $e_7$ подалгебры $I'$. Это снова означает справедливость предложения 7.1.

Ситуация же $a_3(z_1) \equiv 0$ в этом случае невозможна. В самом деле, для двух полей $e_3$ и $e_4$, зависящих лишь от переменной $z_1$ и имеющих тождественно нулевые компоненты $a_3$, $a_4$, их коммутатор $[e_3, e_4]$ также должен быть равен нулю. Но это противоречит замечанию, сделанному в начале доказательства.

Наконец, в третьем случае леммы 4.1 поля $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$ имеют вид

$$\begin{aligned}
e_4 &= (0, 1, \quad 0, \quad 0),\\
e_5 &= (0, 0, \quad c_5(z_1), \quad d_5(z_1)),\\
e_6 &= (0, 0, \quad 1, \quad 0),\\
e_7 &= (0, 0, \quad 0, \quad 1).
\end{aligned}$$

Вспоминая о третьей абелевой подалгебре $I'''$, получим упрощенный вид поля $e_2$, компоненты которого, подобно (7.1), оказываются зависящими не более, чем от $z_1$. При этом, аналогично рассуждению для случая 2, компонента $a_2(z_1)$ не может быть тождественно нулевой (т.к. тогда коммутатор $[e_2, e_5] = 0$).

А поле $e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1))$ с ненулевой компонентой $a_2(z_1)$ можно выпрямить до состояния $e_2 = (1, 0, 0, 0)$ с сохранением вида выпрямленных полей $e_4, e_6, e_7$. Предложение 7.1 оказывается справедливым и в этом случае. □

**Замечание 7.2.** *Вместе с предложением 7.1 доказана и теорема 6.1, т.к. выпрямление четверки независимых полей на гиперповерхности $M$ означает именно свойство ее трубчатости.*

Это свойство играет важную роль в общих описаниях голоморфно однородных гиперповерхностей в комплексных пространствах произвольной размерности подобно изученным ситуациям с однородностью в $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$. Впрочем, для содержательной иллюстрации теоремы 6.1 и завершения доказательства теоремы 6.2 необходимо еще уменьшить количество обсуждаемых алгебр Ли.

**Предложение 7.2.** *Семь алгебр Ли* 157, 147$A$, 247$D$, 247$E$, 247$Q$, 247$R$, 147$D$, *4-мерные идеалы которых образуют (1,1,2)-треугольники во множестве кодов, не имеют невырожденных орбит в* $\mathbb{C}^4$.

*Доказательство.* Использование предложения 7.1 позволяет сводить рассмотрение каждой алгебры, три абелевых идеала которой имеют структуру (1,1,2)-треугольника, к трем достаточно простым проверкам. Рассмотрим их на примере алгебры 247$D$.

Считая, что эта алгебра имеет Леви-невырожденную орбиту, рассмотрим отдельно три случая выпрямления базисных полей для каждого из трех абелевых идеалов алгебры. Сначала выпрямим поля

$$\begin{aligned} e_4 &= (1,0,0,0), \\ e_5 &= (0,1,0,0), \\ e_6 &= (0,0,1,0), \\ e_7 &= (0,0,0,1), \end{aligned}$$

отвечающие набору $J_2$ из (6.9).

Коммутационные соотношения (6.6) для каждого из трех оставшихся базисных полей 7-мерной алгебры $g$ с выпрямленными полями $e_4$, $e_5$, $e_6$, $e_7$ позволяют существенно упростить вид полей $e_1$, $e_2$, $e_3$. Так из единственного нетривиального соотношения $[e_1, e_4] = e_6$ такого типа с участием поля $e_1$ получаем

$$e_1 = (A_1, B_1, -z_1 + C_1, D_1),$$

где $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ – некоторые комплексные константы.

Аналогично, для полей $e_2, e_3$ получаем упрощенные представления вида

$$e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_2 + D_2), \qquad e_3 = (A_3, B_3, C_3, -z_1 + D_3).$$

Для таких полей $e_1, e_2$ первая компонента их коммутатора равна нулю, что противоречит имеющемуся в алгебре 247$D$ соотношению $[e_1, e_2] = e_4 = (1,0,0,0)$.

Аналогичные противоречия получаются и при выпрямлении базисов идеалов $I'$ и $I'''$ алгебры 247$D$. Для идеала $I'$ выпрямление его базисных полей $e_3, e_5, e_6, e_7$ и рассмотрение коммутаторов этих полей с оставшейся тройкой $e_1, e_2, e_4$ базисных полей алгебры 247$D$ приводит к формулам

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1), \qquad e_4 = (A_4, B_4, C_4, z_1 + D_4). \tag{7.2}$$

Применяя использованное выше замечание к коммутатору $[e_1, e_4] = e_6 = (0,0,1,0)$ и к третьим компонентам полей (7.2), получим противоречие и в этом случае.

Наконец, после выпрямления базисных полей

$$\begin{aligned} e_2 &= (1,0,0,0), \\ e_4 &= (0,1,0,0), \\ e_6 &= (0,0,1,0), \\ e_7 &= (0,0,0,1), \end{aligned}$$

идеала $I'''$ получим аналогичные представления для

$$\begin{aligned} e_1 &= (A_1, -z_1 + B_1, -z_2 + C_1, D_1),\\ e_3 &= (A_3, B_3, C_3, -z_2 + D_3),\\ e_5 &= (A_5, B_5, C_5, z_1 + D_5). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Рассматривая далее коммутационные соотношения $[e_1, e_5] = 0$ и $[e_3, e_5] = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} &A_1(0,0,0,1) - (A_5(0,-1,0,0) + B_5(0,0,-1,0)) = 0,\\ &A_3(0,0,0,1) - B_5(0,0,0,-1) = 0. \end{aligned}$$

Из равенства нулю отдельных компонент двух коммутаторов $[e_1, e_5]$ и $[e_3, e_5]$ легко получаются равенства $A_1 = A_3 = A_5 = 0$, означающие, что шесть базисных полей алгебры $247D$ имеют в этом случае тождественно нулевые первые компоненты. Такая ситуация несовместима с невырожденностью по Леви 7-мерной поверхности, на которой задана алгебра касательных полей $247D$.

Аналогично устанавливается противоречивость допущения о существовании невырожденных орбит *для всех трех алгебр п. 2* теоремы 6.2 и у оставшихся *четырех алгебр п. 3.* □

## 8. Сферические орбиты алгебр 17 и 1357D

В этом разделе мы покажем, что алгебры 17 и 1357 D имеют в пространстве $\mathbb{C}^4$ лишь сферические 7-мерные орбиты.

**Предложение 8.1.** *Невырожденными по Леви орбитами алгебры* 17 *с соотношениями* $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = [e_5, e_6] = e_7$ *являются с точностью до голоморфной эквивалентности лишь сферические поверхности (квадрики)*

$$\mathrm{Im}\ z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2.$$

*Доказательство.* Для полных рассмотрений нам будет достаточно упомянуть лишь три из восьми 4-мерных абелевых идеалов, например,

$$I'_4 =< e_2, e_4, e_5, e_7 >, \qquad I''_4 =< e_2, e_4, e_6, e_7 >, \qquad I'''_4 =< e_2, e_3, e_6, e_7 > . \tag{8.1}$$

В силу предложения 7.1 достаточно описать все невырожденные поверхности, являющиеся орбитами обсуждаемой алгебры при выпрямлении каждого из этих трех идеалов по отдельности. Заметим при этом, что симметрия соотношений (6.5) позволяет на самом деле обсуждать лишь один такой идеал.

В самом деле, переход от $I'_4$ к $I''_4$ или от $I''_4$ к $I'''_4$ означает лишь переименование пары полей, входящих в единственное содержащее эту пару коммутационное соотношение алгебры 17. Он не меняет качественную итоговую картину с орбитами этой алгебры.

Итак, рассмотрим идеал $I''_4 =< e_2, e_4, e_6, e_7 >$, сразу считая его выпрямленным после некоторой голоморфной замены координат. Коммутационные соотношения (6.5) для каждого из трех оставшихся базисных полей 7-мерной алгебры $g$ с выпрямленными полями $e_2$, $e_4$, $e_6$, $e_7$ позволяют существенно упростить вид полей $e_1$, $e_3$, $e_5$. В силу этих соотношений все они оказываются устроенными однотипно:

$$\begin{aligned} e_1 &= (A_1, B_1, C_1, -z_1 + D_1),\\ e_3 &= (A_3, B_3, C_3, -z_2 + D_3),\\ e_5 &= (A_5, B_5, C_5, -z_3 + D_5), \end{aligned} \tag{8.2}$$

где $A_k, B_k, C_k, D_k$ $(k = 1, 3, 5)$ – некоторые комплексные константы.

Сдвигами переменных легко освободить последние компоненты этих трех полей от констант $D_k$. А рассматривая вместо полученных полей их комбинации с четверкой выпрямленных полей, можно считать все константы $A_k, B_k, C_k$ чисто мнимыми. Вводя обозначения

$$A_k = ia_k, \qquad B_k = ib_k, \qquad C_k = ic_k \qquad (a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}),$$

рассмотрим еще матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

В силу условия полного ранга обсуждаемой реализации алгебры 17 эта матрица является невырожденной.

**Замечание 8.1.** *Можно получить дополнительные ограничения на элементы этой матрицы, учитывая три еще не использованных соотношения* $[e_1, e_3] = [e_3, e_5] = [e_1, e_5] = 0$. *Но фактически такие ограничения не потребуются.*

Перейдем теперь от полей (8.2) к системе дифференциальных уравнений в частных производных $\mathrm{Re}\,(e_k(\Phi)_{|M}) = 0$ $(k = 1, 3, 5)$, описывающей основание трубчатой орбиты алгебры 17. В матричной форме эту систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial F/\partial y_1 \\ \partial F/\partial y_2 \\ \partial F/\partial y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}.$$

Невырожденность матрицы (8.3) позволяет переписать последнее уравнение в виде, разрешенном относительно частных производных функции $F(y_1, y_2, y_3)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = l_1(y_1, y_2, y_3), \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} = l_2(y_1, y_2, y_3), \qquad \frac{\partial F}{\partial y_3} = l_3(y_1, y_2, y_3)$$

с некоторыми линейными функциями $l_k(y_1, y_2, y_3)$.

Ясно, что решениями такой системы уравнений (при выполнении условий согласования) являются некоторые квадратичные формы

$$F = Q(y_1, y_2, y_3).$$

Возвращаясь к комплексным переменным пространства $\mathbb{C}^4$, мы с необходимостью получим уравнения возможных орбит обсуждаемой реализации алгебры Гейзенберга в виде $\mathrm{Im}\ z_4 = Q(\mathrm{Im}\ z_1, \mathrm{Im}\ z_2, \mathrm{Im}\ z_3)$.

Удаление из правой части последнего уравнения голоморфных и антиголоморфных слагаемых приводит его к виду

$$\mathrm{Im}\ z_4 = H(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$$

с некоторой эрмитовой формой в правой части. Интересуясь только невырожденными орбитами и используя линейные преобразования комплексных переменных, получаем всего две возможности для орбит алгебры Гейзенберга (при реализации, связанной с выпрямлением идеала $I''_4$):

$$\mathrm{Im}\ z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2.$$

Остается заметить, что обе эти сферические поверхности представляют известные однородные поверхности, причем их однородность реализуется простыми линейными сдвигами по первой тройке переменных и квадратичным (по параметрам сдвига) преобразованием переменной $z_4$. Алгебра Ли, соответствующая такой группе преобразований, является именно алгеброй Гейзенберга.

Завершая доказательство предложения 8.1, напомним еще раз о симметрии этой алгебры и о дословном повторении полученных выводов при выпрямлении любого из двух других идеалов $I_4'$, $I_4'''$. □

**Замечание 8.2.** *После такого рассмотрения алгебры 17 легко показать отсутствие невырожденных 7-мерных орбит в $\mathbb{C}^4$ у алгебры 157, заданной соотношениями*

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = [e_2, e_4] = [e_5, e_6] = e_7.$$

В самом деле, после перестановки $e_2 \leftrightarrow e_3$ три из четырех коммутационных соотношений последней алгебры совпадают с формулами (6.5) для алгебры 17, а дополнительное четвертое переписывается в виде $[e_1, e_3] = e_2$. Абелевы идеалы (8.1) остаются таковыми и в алгебре 157. Выпрямление любого из них приводит к аналогичному (8.2) виду полей, дополнительных к этим идеалам. Четвертое соотношение на эти поля, как несложно убедиться, во всех случаях приводит к противоречиям.

**Предложение 8.2.** *Любая невырожденная по Леви орбита алгебры* $1357D$ *в* $\mathbb{C}^4$ *голоморфно эквивалентна индефинитной квадрике*

$$\mathrm{Im}\ z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2.$$

*Доказательство.* Для алгебры $1357D$ из п. 5 теоремы 6.2 выпрямление базисов двух идеалов $I_4' =< e_3, e_5, e_6, e_7 >$ и $I_4'' =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$ приводит к противоречиям после применения замечания о коммутаторе полей, содержащих константы в фиксированной компоненте. А вот для идеала $I_4''' =< e_1, e_3, e_5, e_7 >$ получаем четверку выпрямленных полей

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad e_3 = \frac{\partial}{\partial z_2}, \qquad e_5 = \frac{\partial}{\partial z_3}, \qquad e_7 = \frac{\partial}{\partial z_4} \tag{8.4}$$

и (после рассмотрения еще 12 коммутаторов выпрямленных полей с оставшейся тройкой) упрощенные представления

$$\begin{aligned} e_2 &= (A_2, z_1 + B_2, -z_2 + C_2, -z_3 + D_2), \\ e_4 &= (A_4, B_4, C_4, z_2 + D_4), \\ e_6 &= (A_6, B_6, C_6, z_1 + D_6). \end{aligned} \tag{8.5}$$

На этом этапе остается проверить три последних коммутационных соотношения

$$[e_2, e_4] = e_6, \qquad [e_2, e_6] = [e_4, e_6] = 0.$$

Из этих соотношений имеем (после сдвигов каждой из трех комплексных переменных $z_1, z_2, z_3$) следующие уточнения вида тройки полей (8.5):

$$\begin{aligned} e_2 &= (A_2, z_1 + B_2, -z_2, -z_3), \\ e_4 &= (0, -A_2, B_2, z_2 + D_4), \\ e_6 &= (0, 0, -A_2, z_1). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Далее необходимо проинтегрировать алгебру векторных полей $1357D$ с упрощенным базисом (8.4), (8.6). Наличие в этой алгебре четверки полей (8.4) означает, как отмечалось выше, трубчатую структуру обсуждаемой гиперповерхности $M$. Поэтому можно считать ее заданной уравнением $\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ или, с учетом интересующего нас свойства невырожденности $M$, в разрешенном относительно одной из переменных виде

$$y_4 = F(y_1, y_2, y_3). \tag{8.7}$$

Интегрировать в таком случае придется систему трех уравнений в частных производных, отвечающую полям (8.6). Отметим при этом, что за счет рассмотрения вместо полей $e_2$, $e_4$, $e_6$ их комбинаций с полями из выпрямленной четверки можно считать константы $A_2$, $B_2$, $D_4$ чисто мнимыми. Кроме того, при нулевом $A_2$ получается вырожденная по Леви ситуация шести нулей в первых компонентах базисных полей алгебры, а потому считаем $A_2 \neq 0$.

Для практического интегрирования используем формальную запись касания произвольным полем $e_k$ изучаемой поверхности $M$ в виде уравнения

$$\operatorname{Re}\left(e_k(\Phi)_{|M}\right) \equiv 0, \qquad k = 1, ..., 7.$$

В переменных $y_1$, $y_2$, $y_3$ с учетом упрощающих обозначений $A_2 = ia$, $B_2 = ib$, $D_2 = id$ так получается следующая система уравнений :

$$a\frac{\partial F}{\partial y_1} + (y_1 + b)\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_2\frac{\partial F}{\partial y_3} = y_3, \qquad -a\frac{\partial F}{\partial y_2} + b\frac{\partial F}{\partial y_3} = y_2 + d, \qquad -a\frac{\partial F}{\partial y_3} = y_1. \tag{8.8}$$

Последовательное (начиная с простейшего) решение уравнений этой системы приводит с учетом обозначения $\lambda = 1/a$ к формулам

$$F = \lambda y_1 y_3 + G(y_1, y_2), \qquad \frac{\partial G}{\partial y_2} = \lambda^2 b y_1 - \lambda(y_2 + d), \qquad G = \lambda^2 b y_1 y_2 - \frac{1}{2}\lambda(y_2 + d)^2 + H(y_1).$$

Для функции $H(y_1)$ получаем уравнение

$$H' = -\lambda^3 b y_1^2 + m y_1 + n$$

с некоторыми коэффициентами $m, n$ в правой части. Тогда итоговая формула, описывающая все решения системы (8.8), имеет вид

$$y_4 = \lambda y_1 y_3 + \lambda^2 b y_1 y_2 - \frac{1}{2}\lambda(y_2 + d)^2 - \frac{1}{3}\lambda^3 b y_1^3 + P_2(y_1), \tag{8.9}$$

где $P_2(y_1)$ – некоторый многочлен второй степени.

Заметим, что при условии $b = 0$ уравнение (8.9) не содержит слагаемых третьей степени, а потому описывает (с точностью до аффинных преобразований переменных) индефинитную квадрику

$$v = y_1 y_3 + y_2^2 \tag{8.10}$$

пространства $\mathbb{R}^4_y$.

В случае же $b \neq 0$ за счет аффинных преобразований

$$y_1^* = y_1 + \alpha, \qquad y_2* =, \; y_3^* = y_3 + \lambda b y_2 + m y_1 + n, \qquad y_4^* = \frac{1}{\lambda} y_4 + Q y_2 + M y_1 + N,$$

с подходящими коэффициентами это уравнение преобразуется к виду

$$y_4 = y_1 y_3 + y_2^2 + y_1^3. \tag{8.11}$$

Однако возвращаясь к комплексным переменным и используя не более чем квадратичные преобразования, несложно привести (см. Дополнение) оба уравнения (8.10) и (8.11) к единому виду

$$\operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$$

индефинитной квадрики в пространстве $\mathbb{C}^4$. □

## 9. Несферические орбиты алгебр $137D$ и $1357A$

Обсудим теперь *наиболее интересные алгебры* $137D$ *и* $1357A$ *из п. 4) теоремы 6.2.*

Начнем с выписывания 4-мерных абелевых идеалов, имеющихся в этих алгебрах. Легко проверяется, исходя из описаний (6.7), что такими идеалами, отвечающими кодовым (1,1,2)-треугольникам, являются:

$$137D \;:\; I_4' =< e_4, e_5, e_6, e_7 >, \quad I_4'' =< e_2, e_5, e_6, e_7 >, \quad I_4''' =< e_3, e_4, e_6, e_7 >,$$
$$1357A \;:\; I_4' =< e_4, e_5, e_6, e_7 >, \quad I_4'' =< e_3, e_5, e_6, e_7 >, \quad I_4''' =< e_2, e_4, e_5, e_7 > .$$

При этом два первых идеала $I_4'$, $I_4''$ для каждой из этих алгебр невозможно выпрямить при условии существования хотя бы одной невырожденной орбиты у этих алгебр.

Например, по схеме, описанной выше, для базисных полей алгебры $137D$, дополнительных к идеалу $I_4'$ получаем:

$$e_1 = (A_1, B_1, -z_1 + C_1, D_1), \qquad e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_1 + D_2).$$

Но при этом для их коммутатора должно выполняться равенство $[e_1, e_2] = e_5 = (0, 1, 0, 0)$, не согласующееся с тем, что вторые компоненты этих полей являются константами.

При выпрямлении идеала $I_4''$ этой же алгебры имеем

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, -z_3 + D_1), \qquad e_4 = (A_4, B_4, C_4, z_1 + D_4).$$

Такой вид этих полей противоречит условию $[e_1, e_4] = e_6 = (0, 0, 1, 0)$.

Для алгебры $1357A$ имеем при выпрямлении базиса $I_4'$ аналогичные упрощенные представления

$$e_1 = (A_1, B_1, C_1, -z_2 + D_1), \qquad e_4 = (A_4, B_4, C_4, -z_1 + D_4),$$

противоречащие соотношению $[e_1, e_4] = e_5 = (0, 1, 0, 0)$. А выпрямляя базис $I_4''$, получаем $e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1)$, $e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_3 + D_2)$, что также противоречит соотношению $[e_1, e_2] = e_4 = (1, 0, 0, 0)$.

Перейдем к выпрямлению идеала $I_4'''$ для алгебры $1357A$. Повторяя в этом случае предыдущую схему обсуждения всех 21 коммутационных соотношений, приходим к непротиворечивым описаниям тройки полей

$$\begin{aligned} e_1 &= (ia, -z_1, -z_2, -z_3), \\ e_3 &= (0, -ia, z_1, z_2 + id_3), \\ e_6 &= (0, 0, -ia, z_1 + id_6). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Здесь $a$, $d_3$, $d_6$ – некоторые вещественные коэффициенты. При этом можно считать, что $a \neq 0$, т.к. при $a = 0$ первые компоненты шести базисных полей алгебры $1357A$ оказываются нулевыми, а это невозможно для независимых полей, касательных к невырожденной гиперповерхности $M$.

Обсудим теперь идеал $I_4'''$ для алгебры $137D$. Описанные выше процедуры уточнения вида тройки базисных полей $e_1$, $e_2$, $e_5$, дополнительных к $I_4'''$, приводят к следующим непротиворечивым формулам (здесь, как и в (9.1) $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} e_1 &= (ia, ib, -z_2 + ic, -z_3), \\ e_2 &= (0, 2ia, -z_1, -z_2), \\ e_5 &= (0, 0, ia, -z_1 + id). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Интегрирование алгебр $1357A$ и $137D$ с упрощенными базисами теперь проводится по схеме, описанной в предыдущем разделе. В каждом из двух случаев оно сводится к решению системы трех уравнений с частными производными.

Обсудим сначала систему, отвечающую полям (9.1) алгебры 1357A. Задавая интегральную поверхность этой алгебры уравнением

$$y_4 = F(y_1, y_2, y_3), \tag{9.3}$$

мы имеем здесь три соотношения на частные производные функции $F$:

$$\begin{aligned} & a\frac{\partial F}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial F}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial F}{\partial y_3} = -y_3, \\ & -a\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial F}{\partial y_3} = y_2 + d_3, \\ & a\frac{\partial F}{\partial y_3} = y_1 + d_6. \end{aligned} \tag{9.4}$$

**Предложение 9.1.** *При $a \neq 0$ любая трубчатая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^4$, описываемая уравнениями* (9.3)-(9.4), *голоморфно эквивалентна поверхности*

$$v = (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + |z_2|^2 + |z_1|^4.$$

*Доказательство.* Решая уравнения системы (9.4) поочередно, в порядке нарастания их сложности, получим (например, с помощью символьных вычислений) следующие формулы

$$F = -\frac{1}{a}y_3(y_1 + d_6) + G(y_1, y_2), \qquad G(y_1, y_2) = -\frac{1}{2a}y_2^2 - \frac{1}{a^2}y_1y_2(y_1 + d_6) - \frac{d_3}{a}y_2 + H(y_1).$$

При этом на функцию $H(y_1)$ получаем уравнение

$$aH'(y_1) = \frac{y_1}{a}(y_1^2 + d_6y_1 + d_3a).$$

Общее решение системы (9.4) в итоге описывается формулой

$$\begin{aligned} y_4 = & -\frac{1}{12a^3}(3y_1^4 + 4d_6y_1^3) - \frac{1}{a^2}y_2y_1^2 \\ & -\frac{y_1}{2a^2}\left(2\,d_6y_2 + d_3y_1 + 2\,y_3a\right) - \frac{1}{2a}\left({y_2}^2 + 2d_3y_2 + 2d_6y_3\right). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Временно усложним это уравнение, выделяя в нем интересующие нас слагаемые и вводя некоторые новые (менее существенные) коэффициенты:

$$\begin{aligned} y_4 = & -\frac{1}{4a^3}\left(y_1 + \frac{1}{3}d_6\right)^4 - \frac{1}{a^2}y_2\left(y_1 + \frac{1}{3}d_6\right)^2 - \frac{1}{a}\left(y_1 + \frac{1}{3}d_6\right)(y_3 + my_1 + ny_2) \\ & -\frac{1}{2a}y_2^2 + (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \alpha_3y_3) + \beta. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Далее воспользуемся аффинным преобразованием координат

$$y_1^* = y_1 + \frac{1}{3}d_6, \qquad y_3^* = \frac{1}{2a}(y_3 + my_1 + ny_2), \qquad y_4^* = y_4 - (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \alpha_3y_3 + \beta). \tag{9.7}$$

Тогда уравнения полученных орбит упростятся до

$$y_4 = -\frac{1}{4a^3}y_1^4 - \frac{1}{a^2}y_2y_1^2 - y_1y_3 - \frac{1}{2a}y_2^2. \tag{9.8}$$

**Замечание 9.1.** *Трубчатая гиперповерхность* (9.8) *голоморфно эквивалентна в пространстве $\mathbb{C}^4$ (см. Дополнение ниже) обобщению поверхности Винкельманна*

$$v = (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + |z_2|^2 + |z_1|^4. \tag{9.9}$$

С учетом этого замечания предложение 9.1 можно считать доказанным. □

Рассмотрим теперь аналогичным образом орбиты алгебры $137D$. Совокупность полей (9.2) порождает в этом случае следующую систему уравнений в частных производных относительно определяющих функций (9.3) таких орбит:

$$\begin{aligned} &a\frac{\partial F}{\partial y_1} + b\frac{\partial F}{\partial y_2} + (c - y_2)\frac{\partial F}{\partial y_3} = -y_3,\\ &2a\frac{\partial F}{\partial y_2} - y_1\frac{\partial F}{\partial y_3} = -y_2,\\ &a\frac{\partial F}{\partial y_3} = d - y_1. \end{aligned} \tag{9.10}$$

**Предложение 9.2.** *При $a \neq 0$ любая трубчатая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^4$, описываемая уравнениями* (9.3), (9.10), *голоморфно эквивалентна поверхности*

$$v = (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + |z_2|^2 - |z_1|^4.$$

*Доказательство.* Решение системы уравнений (9.10), так же, как и (9.4), можно получить пошаговым исследованием отдельных уравнений. Для функции $F = F(y_1, y_2, y_3)$, описывающей орбиты алгебры 137D, имеем:

$$F = -\frac{1}{a}(b + y_1)y_3 + G(y_1, y_2); \qquad G = -\frac{1}{4a^2}y_2^2 - \frac{1}{2a^2}(b + y_1)y_1y_2 + H(y_1),$$

где функция $H(y_1)$ является решением ОДУ

$$aH' = \frac{b{y_1}^2}{2a^2} + \frac{(2ac + b^2)\,y_1}{2a^2} + \frac{bc}{a}.$$

Это означает, что общее решение системы (9.10) имеет вид

$$y_4 = -\frac{1}{a}(b + y_1)y_3 - \frac{1}{4a^2}y_2^2 - \frac{1}{2a^2}(b + y_1)y_1y_2 + \frac{b}{6a^3}y_1^3 + (\alpha y_1^2 + \beta y_1 + \gamma).$$

Упрощая это уравнение за счет аффинных преобразований переменных $y_k$ подобно тому, как это делалось для решений системы (9.4), несложно привести его к виду

$$y_4 = y_1y_3 - \frac{1}{4a^2}y_2^2 - \frac{1}{2a^2}y_1^2y_2 + \frac{b}{6a^3}y_1^3. \tag{9.11}$$

В свою очередь такая трубчатая алгебраическая поверхность третьей степени в пространстве $\mathbb{C}^4$ голоморфно эквивалентна (см. Дополнение) поверхности четвертой степени

$$v = (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + |z_2|^2 - |z_1|^4. \tag{9.12}$$

Предложение 9.2 доказано. □

Совокупность доказанных предложений 6.1, 6.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2 позволяет считать завершенным и доказательство теоремы 6.2.

Отметим, что поверхности (9.9) и (9.12) представляют собой два голоморфно неэквивалентных обобщения известной поверхности Винкельманна

$$v = (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + |z_1|^4$$

в 3-мерном комплексном пространстве. Эти поверхности являются, как показано в [8], несферическими и имеют самые богатые, 13-мерные, алгебры симметрий среди всех однородных несферических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$. Рассмотренные нами подалгебры 1357A и 137D являются 7-мерными подалгебрами полных алгебр симметрий для поверхностей (9.9) и (9.12).

## 10. Дополнение (Преобразования алгебраических трубок)

В этом разделе мы приводим вычисления, относящиеся к трем различным фрагментам статьи, но имеющие общий характер. Рассмотрим голоморфные преобразования трех семейств алгебраических трубчатых гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$, описываемых «похожими» уравнениями ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$):

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + C y_1^3, \tag{10.1}$$

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + B y_1^2 y_2 + C y_1^3, \tag{10.2}$$

$$y_4 = y_1 y_3 + A y_2^2 + B y_1^2 y_2 + D y_1^4. \tag{10.3}$$

**Предложение 10.1.** *При $A \neq 0$ независимо от значения коэффициента $C$ справедливы следующие утверждения:*
*1) поверхность* (10.1) *голоморфно эквивалентна индефинитной квадрике*

$$\mathrm{Im}\, z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2;$$

*2) при $B \neq 0$ поверхность* (10.2) *эквивалентна обобщению поверхности Винкельманна*

$$\mathrm{Im}\, z_4 = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2 - |z_4|^2;$$

*3) при $6AD - B^2 = 0$ поверхность* (10.3) *сферична, а при $6AD - B^2 \neq 0$ эквивалентна одному из двух обобщений поверхности Винкельманна*

$$\mathrm{Im}\, z_4 = z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + |z_2|^2 \pm |z_4|^2.$$

*Доказательство.* Заметим, что можно обсуждать три уравнения (10.1)–(10.3) в виде одного общего уравнения

$$\mathrm{Im}\, z_4 = x_1 x_3 + A x_2^2 + B x_1^2 x_2 + C x_1^3 + D x_1^4, \tag{10.4}$$

в котором мы еще перешли от мнимых частей комплексных переменных $z_1$, $z_2$, $z_3$ к их вещественным частям за счет замены $z_k \to i z_k^*$.

Растяжениями двух переменных $z_2 = A z_2^*$, $z_4 = A z_4^*$ ненулевой коэффициент $A$ из (10.4) превращается в единицу, а коэффициенты $B$, $C$, $D$ заменяются на $B/A$, $C/A$, $D/A$ соответственно.

Перейдем к комплексным переменным, подставляя формулы $x_k = (z_k + \bar{z}_k)/2$ при $k = 1, 2, 3$ в (10.4). Раскрывая теперь скобки в правой части уравнения (10.4), отметим, что возникающую здесь сумму $\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}$ голоморфных и антиголоморфных слагаемых, можно из нее удалить. Это действие реализуется заменой $w^* = w - 2i\varphi(z)$ с последующим отбрасыванием звездочки. Следовательно, вместо (10.4) получим

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, z_4 =& \frac{1}{4}(z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + \frac{1}{4}|z_2|^2 + \frac{B}{8A}(z_1^2 \bar{z}_2 + 2 z_1 z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1^2 + 2 z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2) \\ &+ \frac{3C}{8A}(z_1^2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_1^2) + \frac{D}{16A}(4 z_1^3 \bar{z}_1 + 6|z_4|^2 + 4 z_1 \bar{z}_1^3).\end{aligned}$$

Воспользуемся еще одной заменой координат

$$z_2^* = z_2 + \frac{B}{2A} z_1^2, \qquad z_3^* = z_3 + \frac{B}{A} z_1 z_2 + \frac{3C}{2A} z_1^2 + \frac{D}{A} z_1^3, \qquad z_4^* = 4 z_4,$$

после которой уравнение (10.4) примет вид

$$\mathrm{Im}\, z_4 = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 + \left( \frac{3D}{2A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) |z_1|^4.$$

Ясно теперь, что любая поверхность с уравнением (10.4) превращается голоморфными заменами либо в индефинитную квадрику

$$\mathrm{Im}\, z_4 = (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) + |z_2|^2 \qquad (\text{или} \qquad \mathrm{Im}\, z_4 = |z_1|^2 - |z_3|^2 + |z_2|^2),$$

если выполняется условие $6AD - B^2 = 0$; либо в поверхность

$$\mathrm{Im}\ z_4 = (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + |z_2|^2 + N|z_1|^4 \tag{10.5}$$

с ненулевым вещественным $N = (6AD - B^2)/4A^2$. Остается заметить, что при ненулевом $N$ еще одна замена

$$z_2 \to \sqrt{|N|}z_2, \qquad z_3 \to |N|z_3, \qquad z_4 \to |N|z_4$$

превращает этот коэффициент в $sgn(N) = \pm 1$.

Завершая доказательство, учтем, что в уравнении (10.1) $B = D = 0$, а потому для него выполнено условие сферичности $6AD - B^2 = 0$. Для уравнения (10.2) коэффициент $N = (6AD - B^2)/4A^2$, очевидно, является отрицательным. А для уравнения (10.3) этот коэффициент может быть произвольным вещественным числом (положительным, отрицательным или нулевым).

Эти выводы доказывают предложение 10.1. □

Возвращаясь к орбитам рассмотренных выше алгебр, приходим к выводу об их сферичности в случае алгебры $1357D$ из предложения 8.2.

В свою очередь, для орбит алгебр $137D$ и $1357A$, описываемых уравнениями (9.8) и (9.11) соответственно, наборы параметров $(A, B, C, D)$ имеют вид

$$\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a^2}, 0, \frac{1}{4a^3}\right) \qquad \text{и} \qquad \left(-\frac{1}{4a^2}, -\frac{1}{2a^2}, \frac{b}{6a^3}, 0\right).$$

Для первого набора параметр $N = (6AD - B^2)/4A^2$ положителен, а для второго – отрицателен, что приводит к двум разным уравнениям (10.5).

**Замечание 10.1.** *Уравнения полученных в* [4] *однородных поверхностей*

$$y_4 = y_1y_3 + y_2^2 + y_1^2y_2 + Dy_1^4 \qquad \text{и} \qquad y_4 = y_1y_3 + y_2^2 + x_1y_1y_2 + Dy_1^4, \tag{10.6}$$

*сводятся аналогичными выкладками при* $D \neq 1/12$ *к* (9.9) *и* (9.12). *При этом сферичность первой поверхности* (10.6) *при* $D = 1/12$ *доказана в* [17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. E. Cartan. *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes* // Ann. Math. Pura Appl. **11**, 17–90 (1933).
2. А.В. Лобода. *Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$ // Труды ММО. **81**:2, 61–136 (2020).
3. Р.С. Акопян, А.В. Лобода. *О голоморфных реализациях нильпотентных алгебр Ли* // Функц. анализ и его прил. **53**:2, 59–63 (2019).
4. A.V. Loboda, R.S. Akopyan, V.V. Krutskikh. *On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **13**:3, 360–372 (2020).
5. А.В. Лобода. *О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерных комплексных пространств* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. **331**, 194–212 (2020).
6. Р.С. Акопян, В.В. Крутских. *Об орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих 5-мерные абелевы идеалы* // Материалы междунар. конференции «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (ВЗМШ-2021). Воронеж, 32–33 (2021).
7. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в* $\mathbb{C}^3$ // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **173**, 86–115 (2019).
8. B. Kruglikov. *Submaximally symmetric CR-structures* // J. Geom. Anal. **26**:4, 3090–3097 (2016).
9. J. Winkelmann. *The classification of 3-dimensional homogeneous complex manifolds.* Lect. Notes Math. 1062, Springer. Berlin etc. 1995.

10. V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy. *Homogeneous hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$*, associated with a model CR-cubic* // J. Geom. Anal. **20**:3, 538–564 (2010).
11. А.В. Лобода. *О вырожденности орбит разложимых алгебр Ли* // Сборник тезисов междунар. научн. конф. «УОМШ-2020». Ч.1. Уфа, 122–124 (2020).
12. А.В. Лобода, В.К. Каверина. *Об орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих три абелевых 4-мерных идеала* // Сборник тезисов междунар. научн. конф. «УОМШ-2020». Ч.1. Уфа, 125–127 (2020).
13. C. Seeley. *7-dimensional nilpotent Lie algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. **335**:2, 479–496 (1993).
14. M.P. Gong. *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and* $\mathbb{R}$*)* // PhD thesis. Waterloo: Univ. Waterloo, 1998. www.semanticscholar.org/paper/f72dbfc64f72f7b3d9a740c77181ae2186d58e22
15. Г.М. Мубаракзянов. *Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка* // Изв. вузов. Матем. **3**, 99–106 (1963).
16. В.В. Крутских, А.В. Лобода. *Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче* // Материалы научн. конф. ИПМТ-2021. https://www.cs.vsu.ru/ipmt-conf/open/works?year=2021
17. А.В. Исаев, М.А. Мищенко. *Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **52**:6, 1123–1153 (1988).

Александр Васильевич Лобода,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
Московский пр., 14,
394026, г. Воронеж, Россия
E-mail: `lobvgasu@yandex.ru`

Валерия Константиновна Каверина,
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,
Ленинградский пр., д. 49,
125993, г. Москва, Россия
E-mail: `vkkaverina@fa.ru`