УДК 515.16, 514.77

СТРУКТУРА СЛОЕНИЙ С ИНТЕГРИРУЕМОЙ СВЯЗНОСТЬЮ ЭРЕСМАНА

Н.И. ЖУКОВА, К.И. ШЕИНА

Аннотация. Исследуются слоения произвольной коразмерности q с интегрируемой связностью Эресмана на n-мерных гладких многообразиях. Рассматривается категория слоений, где изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и связность Эресмана. Показано, что эта категория может рассматриваться как категория двуслоений, накрытых произведениями. Определяется понятие канонического двуслоения и доказывается, что любое слоение (M, F) с интегрируемой связностью Эресмана изоморфно некоторому каноническому слоению. Вводится понятие структурной группы слоения (M, F). Строится категория троек и доказывается ее эквивалентность категории слоений с интегрируемой связностью Эресмана. Таким образом, классификация слоений с интегрируемой связностью Эресмана сводится к классификации ассоциированных диагональных действий дискретных групп диффеоморфизмов на произведении многообразий. Указаны классы слоений с интегрируемой связностью Эресмана. Рассмотрено приложение к G-слоениям.

Ключевые слова: картаново слоение, интегрируемая связность Эресмана для слоения, глобальная группа голономии, структурная группа слоения, каноническое слоение.

Mathematics Subject Classification: 57R30, 53C12

1. Введение. Основные результаты

Связность Эресмана для гладкого слоения (M, F) коразмерности q на n-мерном многообразии M определяется как трансверсальное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ на M, обладающее свойством вертикально-горизонтальной гомотопии, точное определение приведено в разделе 2.1. Понятие связности Эресмана носит глобальный характер. Связность Эресмана позволяет переносить интегральные кривые распределения $\mathfrak{M}$, называемые горизонтальными, вдоль кривых, лежащих в соответствующих слоях слоения, называемых вертикальными [1]. Если распределение $\mathfrak{M}$ является касательным к некоторому q-мерному слоению (M, F^t), $TF^t = \mathfrak{M}$, то связность Эресмана называется интегрируемой, а (M, F, F^t) называется двуслоением.

Рассматривается категория слоений с интегрируемой связностью Эресмана, где изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и связность Эресмана. Фактически исследование слоений (M, F) с интегрируемой связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ эквивалентно исследованию двуслоений (M, F, F^t). Применяя теорему Ш. Касивабары [2], мы показываем, что пространство универсального накрытия $f : \widetilde{M} \to M$ есть произведение многообразий $\widetilde{M} = L \times N$, а слои индуцированного двуслоения на $\widetilde{M}$ образованы слоями произведения $L \times N$. Такие двуслоения называются накрытыми произведением. Верно и обратное, если (M, F_1, F_2) – двуслоение, накрытое произведением,

N.I. Zhukova, K.I. Sheina, The structure of foliations with integrable Ehresmann connection.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Поступила 30 ноября 2021 г.

то TF_2 – интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F_1), а TF_1 – интегрируемая связность Эресмана для (M, F_2). Таким образом категория слоений с интегрируемой связностью Эресмана отождествляется нами с категорией $\mathfrak{BiF}$ двуслоений, накрытых произведением.

Подчеркнем, что слоения, накрытые произведением, естественным образом возникают при решении разных задач (см. раздел 5), в том числе при исследовании различных G-структур на многообразиях. Например, на компактных кэлеровых многообразиях [3], на голоморфных пуассоновых многообразиях [4], на проективных многообразиях [5], при исследовании билагранжевых слоений на симплектических многообразиях [6].

Мы развиваем метод Я.Л. Шапиро [7], [8], используемый им для описания структуры полных приводимых римановых многообразий, и применяем его в категории слоений с интегрируемыми связностями Эресмана. Мы вводим понятие канонического двуслоения (раздел 3.3) и доказываем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть (M, F_1) – слоение с интегрируемой связностью Эресмана $\mathfrak{M}_1$ и (M, F_2) – такое слоение, что $TF_2 = \mathfrak{M}_1$. Тогда $\mathfrak{M}_2 = TF_1$ – интегрируемая связность Эресмана для (M, F_2), причем:*

1. *двуслоение (M, F_1, F_2) накрыто произведением;*
2. *существует $\mathfrak{M}_i$-голономное накрытие X_i для слоев слоения (M, F_i), где $i = 1, 2$;*
3. *на произведении многообразий $X_1 \times X_2$ определено свободное собственно разрывное диагональное действие группы диффеоморфизмов Ψ, изоморфной факторгруппе $G/(G_{11} \times G_{22})$ фундаментальной группы $G = \pi_1(M)$ по произведению нормальных делителей G_{ii}, изоморфных фундаментальным группам $\pi_1(X_i)$;*
4. *в категории $\mathfrak{BiF}$ двуслоение (M, F_1, F_2) изоморфно некоторому каноническому двуслоению $((X_1 \times X_2)/\Psi, F_1, F_2)$.*

Замечание 1.1. *Если существует точка в X_2, неподвижная только относительно действия единичного элемента группы Ψ, то X_1 — слой слоения (M, F_1) с тривиальной группой $\mathfrak{M}_1$-голономии. Если слоение (M, F_1) имеет квазианалитическую псевдогруппу голономии, то многообразие X_1 диффеоморфно любому слою слоения (M, F_1) с тривиальной ростковой группой голономии. Как известно* [9], *множество таких слоев образует всюду плотное G_δ-подмножество в M.*

Мы вводим категорию $\mathfrak{T}$ троек (X_1, X_2, Ψ) и доказываем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть $\xi = (M, F_1, F_2)$ и $\xi' = (M', F_1', F_2')$ — двуслоения, накрытые произведением, изоморфные (в $\mathfrak{BiF}$) каноническим двуслоениям $((X_1 \times X_2)/\Psi, F_1, F_2)$ и $((X_1' \times X_2')/\Psi', F_1', F_2')$ соответственно. Тогда двуслоения ξ и ξ' изоморфны в категории $\mathfrak{BiF}$ тогда и только тогда, когда тройки (X_1, X_2, Ψ) и (X_1', X_2', Ψ') изоморфны в категории $\mathfrak{T}$.*

Следствие 1.1. *Класс эквивалентности $[(X_1, X_2, \Psi)]$ троек в категории $\mathfrak{T}$ является полным инвариантом двуслоения $\xi = (M, F_1, F_2)$. В частности, структурная группа Ψ двуслоения ξ – его алгебраический инвариант.*

Таким образом, благодаря теореме 1.2, классификация слоений с интегрируемой связностью Эресмана сводится к классификации троек (X_1, X_2, Ψ), определяемых указанным выше образом этими слоениями и их связностями Эресмана, то есть, к классификации ассоциированных диагональных действий дискретных групп диффеоморфизмов Ψ на произведении многообразий $X_1 \times X_2$.

2. Группы голономии слоений со связностью Эресмана

2.1. Связность Эресмана для слоений. Понятие связности Эресмана для слоения (M, F) введено Р.А. Блюменталем и Дж. Хебдой [1], как естественное обобщение понятия связности Эресмана для субмерсий.

Пусть (M, F) — слоение коразмерности q и $\mathfrak{M}$ — гладкое q-мерное распределение на n-мерном гладком многообразии M, трансверсальное к слоению (M, F). Это означает, что в любой точке

$x \in M$ касательное векторное пространство T_xM к M раскладывается в прямую сумму векторных подпространств $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$, где T_xF — касательное пространство к слою слоения (M, F), а $\mathfrak{M}_x$ — значение распределения $\mathfrak{M}$ в точке x. Кусочно гладкие интегральные кривые распределения $\mathfrak{M}$ называются *горизонтальными,* а кусочно гладкие кривые в слоях слоения называются *вертикальными.* Пусть $I_1 = I_2 = I = [0,1]$. Непрерывное отображение квадрата $I_1 \times I_2$ в M называется кусочно гладким, если существуют такие разбиения отрезков I_1 и I_2: $0 = s_0 < s_1 < ... < s_{m-1} < s_m = 1$ и $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < t_k = 1$, соответственно, что для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$ сужение $H|_{[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j]}$ – гладкое отображение. Кусочно гладкое отображение H квадрата $I_1 \times I_2$ в M называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если кривая $H|_{\{s\}\times I_2}$ является вертикальной для любого $s \in I_1$ и кривая $H|_{I_1\times\{t\}}$ является горизонтальной для любого $t \in I_2$ (см. рис. 2.1). В этом случае пара путей $(H|_{I_1\times\{0\}}, H|_{\{0\}\times I_2})$ называется *базой* H. Известно, что существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с данной базой.

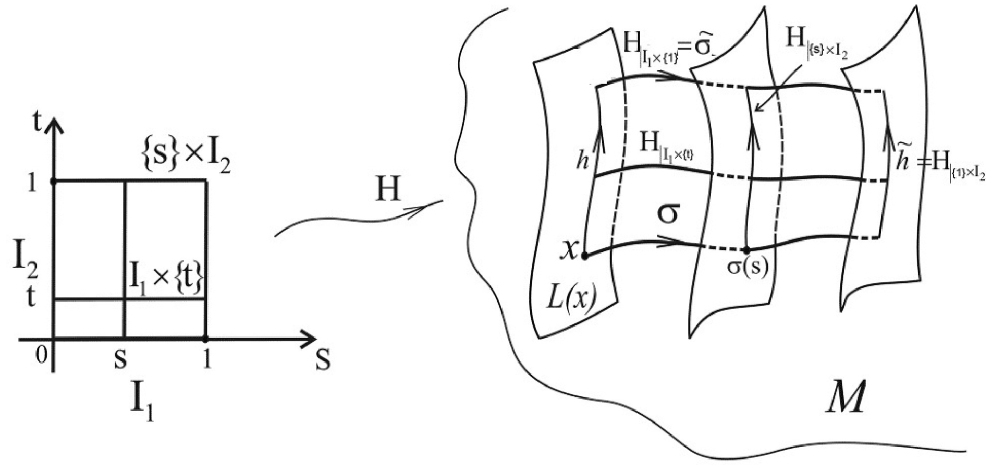

Рис. 2.1: Отображение H — вертикально-горизонтальная гомотопия с базой (σ, h)

Замечание 2.1. *Мы следуем терминологии Р. Германа и используем термин вертикально-горизонтальная гомотопия. Ш. Касивабара* [2] *называет такие отображения решетчатыми, а Р.А. Блюменталь и Дж. Хебда* [1] *— прямоугольником.*

Пара путей (σ, h) в M с общей начальной точкой $\sigma(0) = h(0)$ называется *допустимой*, если σ — горизонтальная кривая, а h — вертикальная кривая.

Определение 2.1. *Распределение $\mathfrak{M}$ называется связностью Эресмана для слоения (M, F), если для любой допустимой пары путей (σ, h) в M сущесвует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ, h).*

Напомним, что гладкое q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ на n-мерном многообразии M называется *интегрируемым,* если через каждую точку $x \in M$ проходит q-мерное интегральное многообразие этого распределения. Как известно, распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию Фробениуса, то есть в каждой точке из M существует окрестность U и q гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_q$, которые в каждой точке $x \in U$ образуют базис касательного векторного пространства $\mathfrak{M}_x$ и удовлетворяют условию

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k, \ i, j, k = 1, \ldots, q,$$

где C^k_{ij} — гладкие функции на U.

Определение 2.2. *Пусть (M,F) — слоение, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$. Если распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо, то $\mathfrak{M}$ называется интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M,F).*

2.2. Группы $\mathfrak{M}$-голономии. Пусть (M,F) — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Рассмотрим допустимую пару путей (δ,τ). Говорят, что кривая $\widetilde{\delta}$ получена *переносом пути δ вдоль τ относительно связности Эресмана $\mathfrak{M}$*, если $\widetilde{\delta} := H|_{I\times\{1\}}$. Обозначим этот перенос через $\delta \stackrel{\tau}{\to}> \widetilde{\delta}$.

Обозначим через Ω_x, $x\in M$, множество горизонтальных кривых с началом в точке x. Определим действие фундаментальной группы $\pi_1(L,x)$ слоя $L=L(x)$ на множестве Ω_x следующим образом: $\Phi_x : \pi_1(L,x)\times\Omega_x \to \Omega_x : ([h],\sigma)\mapsto\tilde{\sigma}$, где $[h]\in\pi_1(L,x)$, и $\tilde{\sigma}$ — перенос кривой $\sigma\in\Omega_x$ вдоль h относительно $\mathfrak{M}$ (см. рис. 2.2). Подчеркнем, что определение действия Φ_x корректно, поскольку результат зависит только от гомотопического класса петли h. Пусть $K_{\mathfrak{M}}(L,x)$ — ядро действия Φ_x, т.е. $K_{\mathfrak{M}}(L,x)=\{\alpha\in\pi_1(L,x)\,|\,\alpha(\sigma)=\sigma\ \ \forall\sigma\in\Omega_x\}$. Факторгруппа $H_{\mathfrak{M}}(L,x)=\pi_1(L,x)/K_{\mathfrak{M}}(L,x)$ называется *группой $\mathfrak{M}$ - голономии* слоя L [1]. В силу линейной связности слоев, группы $\mathfrak{M}$-голономии в различных точках одного и того же слоя изоморфны. Пусть $\Gamma(L,x)$ — ростковая группа голономии слоя L, общепринятая в теории слоений [10]. Тогда определен эпиморфизм групп $\chi : H_{\mathfrak{M}}(L,x)\to\Gamma(L,x)$, удовлетворяющий равенству

$$\chi\circ\beta=\gamma, \tag{2.1}$$

где $\beta:\pi_1(L,x)\to H_{\mathfrak{M}}(L,x)$ — факторотображение и $\gamma([h]) :=< h >$ — росток локального голономного диффеоморфизма трансверсального q-мерного диска вдоль петли h в точке x.

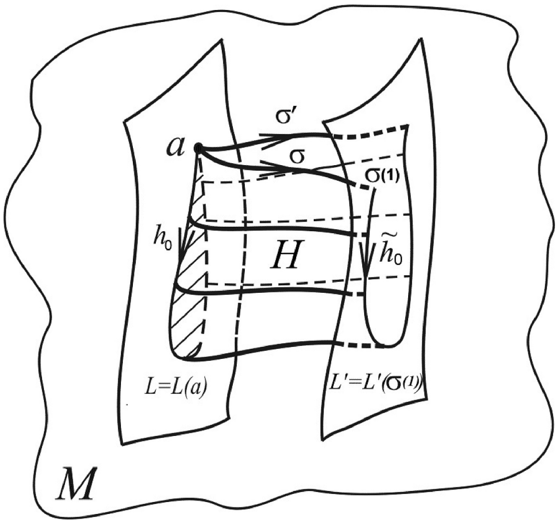

Рис. 2.2: Кривая $\sigma'\in\Omega_a$ — результат действия элемента $[h_0]\in\pi_1(L,a)$ на кривую $\sigma\in\Omega_a$

2.3. Критерий изоморфности групп голономии слоений со связностью Эресмана ростковым группам голономии. Пусть (M,F) — гладкое регулярное слоение коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M. Предположим, что (M,F) допускает связность Эресмана $\mathfrak{M}$. В любой точке $a\in M$ определены две группы голономии: ростковая $\Gamma(L,a)$ и группа $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L,a)$ слоения (M,F) со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Наша цель — найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы естественный эпиморфизм групп

$$\chi_a\colon H_{\mathfrak{M}}(L,a)\to\Gamma(L,a),$$

удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(L,a) \arrow[dl, "\beta_a"'] \arrow[dr, "\gamma_a"] & \\ H_{\mathfrak{M}}(L,a) \arrow[rr, "\chi_a"] & & \Gamma(L,a), \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

где β_a и γ_a — соответствующие факторотображения, являлся изоморфизмом.

Задание слоения коциклом Хефлигера. Пусть T — гладкое q-мерное, возможно несвязное, многообразие. *T-коциклом* или *коциклом Хефлигера* называется семейство $\theta = \{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$, удовлетворяющее условиям:

(H_1) $\{U_i, i \in J\}$ — открытое покрытие многообразия M;

(H_2) $f_i \colon U_i \to T$ — субмерсии;

(H_3) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то определен диффеоморфизм $\gamma_{ij} \colon f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i(x) = \gamma_{ij} \circ f_j(x)$ для всех $x \in f_j(U_i \cap U_j)$;

(H_4) если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, то для любого $x \in f_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ имеет место равенство $(\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk})(x) = \gamma_{ik}(x)$ и, кроме того, $\gamma_{ii} = id_{U_i}$.

Два T-коцикла называются *эквивалентными,* если их объединение также является T-коциклом. Класс эквивалентности T-коциклов называется *слоением коразмерности q на многообразии M.* Любой T-коцикл $\theta = \{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$ принадлежит единственному классу эквивалентности T-коциклов и потому определяет слоение на M. Говорят, что слоение *задано коциклом θ.* Совокупность Σ всех слоев субмерсий f_i из класса эквивалентности T-коцикла является базой некоторой топологии τ_F на M, которая называется *слоевой топологией.* Компоненты линейной связности топологического пространства (M, τ_F) образуют разбиение $F := \{L_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ многообразия M, которое называется *слоением коразмерности q* и обозначается (M, F).

Псевдогруппа голономии слоения. Пусть T — гладкое многообразие, связность которого не предполагается.

Напомним, что *псевдогруппой $\mathcal{G}$ преобразований многообразия T* называется семейство диффеоморфизмов $g \colon U \to V$, где U и V — открытые подмножества в T, удовлетворяющие следующим условиям:

1) если $g \in \mathcal{G}$, то $g^{-1} \in \mathcal{G}$;

2) если $g \colon U \to V$ и $g' \colon U' \to V'$ принадлежат $\mathcal{G}$, то $g' \circ g \colon U \cap g'^{-1}(V') \to V'$ также принадлежит семейству $\mathcal{G}$;

3) $id_T \in \mathcal{G}$;

4) семейство $\mathcal{G}$ содержит вместе с $g \colon U \to V$ ограничение $g|_{U'}$ на любое открытое подмножество U' в U;

5) если $h \colon U \to V$ — диффеоморфизм между открытыми множествами U и V в T, совпадающий в окрестности каждой точки из U с некоторым элементом из $\mathcal{G}$, то $h \in \mathcal{G}$.

Говорят, что семейство локальных диффеоморфизмов $B = \{\gamma_i\}_{i\in J}$ многообразия T, содержащее id_T, порождает псевдогруппу диффеоморфизмов $\mathcal{G}$, если оно принадлежит $\mathcal{G}$ и каждый элемент из $\mathcal{G}$ получен из элементов B одним из следующих способов: взятием обратного отображения; сужением на открытое подмножество; композицией или продолжением (т.е. как в 5)). При этом мы будем говорить, что псевдогруппа $\mathcal{G}$ порождена множеством B и обозначать $\mathcal{G} = \langle \gamma_i \rangle_{i\in J}$.

Предположим, что слоение (M, F) задано T-коциклом $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$. Псевдогруппа $\mathcal{G} = \langle \gamma_{ij} \rangle_{i,j\in J}$ диффеоморфизмов трансверсального многообразия T называется *псевдогруппой голономии слоения* (M, F).

Будем обозначать область определения $g \in \mathcal{G}$ через $\mathcal{O}(g)$. Множество

$$\mathcal{G}.x := \{g(x) \;|\; g \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{O}(g)\}$$

называется орбитой точки x относительно псевдогруппы $\mathcal{G}$. Пусть

$$\mathcal{G}_x := \{g \in \mathcal{G} \;|\; g(x) = x,\, x \in \mathcal{O}(g)\}.$$

Будем обозначать символом $\{g\}_x$, $g \in \mathcal{G}$, росток локальных диффеоморфизмов в точке $x \in T$, а через $\Gamma\mathcal{G}_x$ будем обозначать группу ростков $\{\{g\}_x,\, g \in \mathcal{G}_x\}$ в x локальных диффеоморфизмов из $\mathcal{G}_x$, каждый из которых определен в некоторой окрестности точки x.

Лемма 2.1. *Пусть (M, F) — слоение, заданное коциклом $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$, $\mathcal{G} = \langle \gamma_{ij} \rangle_{i,j\in J}$ — его псевдогруппа голономии. Пусть $h \colon I \to L(a)$ — кусочно гладкая петля в точке a и $\xi = \{U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}\}$ – цепочка, покрывающая кривую $h(I)$, $U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$, $k = 2, \ldots, m$, где $a \in U_{i_1} \cap U_{i_m}$. Тогда в некоторой окрестности точки $b := f_{i_1}(a)$ определена композиция* *отображений* $\gamma := \gamma_{i_1 i_m} \circ \gamma_{i_{m-1} i_m} \circ \ldots \circ \gamma_{i_2 i_1} \in \mathcal{G}$, *причем* $\gamma(b) = b$. *Отображение*

$$\mu_a \colon \Gamma(L, a) \to \Gamma\mathcal{G}_b \colon \{H_h\}_a \mapsto \{\gamma\}_b,$$

где γ *соответствует цепочке* ξ, *покрывающей* $h(I)$, *не зависит от выбора покрытия* ξ *и является изоморфизмом групп.*

Доказательство. Пусть $\xi' = \{U_{j_1}, \ldots, U_{j_k}\}$ — измельчение покрытия ξ, то есть такое покрытие $h(I)$, что каждое $U_{j_r} \in \xi'$ является подмножеством некоторого $U_{i_r} \in \xi$. Нетрудно проверить, что при измельчении покрытия ξ, также как при добавлении к ξ новых элементов покрытия, ростки $\{H_h\}_a$ и $\{\gamma\}_b$ не изменяются. Если $\eta = \{V_{l_1}, \ldots, V_{l_s}\}$ — другое покрытие кривой $h(I)$ то, переходя к измельчению, общему для покрытий ξ и η, мы видим, что определение μ_a корректно, то есть не зависит от выбора цепочки ξ.

Поскольку композиция ростков определена через композицию соответствующих диффеоморфизмов, μ_a — гомоморфизм групп.

Из определения μ_a вытекает, что $\{\gamma \circ f_{i_m}\}_a = \{f_{i_1} \circ H_h\}_a$, следовательно, если $\{\gamma\}_b = \{id\}_b$, то $\{\gamma\}_b = \{\gamma_{i_1 i_1}\}_b$, поэтому $\{H_h\}_a = \{id\}_a$, то есть, $\ker \mu_a = \{id\}_a$ и μ_a — мономорфизм групп.

Покажем, что μ_a — эпиморфизм групп. Пусть $\gamma \in \mathcal{G}$, $\gamma(b) = b$. Тогда из определения псевдогруппы голономии $\mathcal{G} = \langle \gamma_{ij} \rangle_{i,j \in J}$ вытекает, что в некоторой окрестности точки b, $\gamma(b) = b$, преобразование γ совпадает с композицией образующих и, следовательно, соответствует некоторой цепочке ξ указанным выше способом. Таким образом, μ_a — сюръективно. $\square$

Следствие 2.1. *Если* $\{H_h\}_a = \{id\}_a$, *где* $H_h \colon D_a \to D_a$ — *голономный диффеоморфизм вдоль петли* h, *то для любого другого трансверсального диска* D'_a *голономный диффеоморфизм* H'_h *некоторой окрестности* $V_a \subset D'_a$ *в* D'_a *удовлетворяет равенству* $\{H'_h\}_a = \{id\}_a$.

Квазианалитические псевдогруппы преобразований. Будем говорить, что диффеоморфизм $\gamma \colon U \to V$ открытых множеств U и V *квазианалитический,* если из того, что существует такое связное открытое подмножество $U_0 \subset U$, что $\gamma|_{U_0} = id_{U_0}$, вытекает $\gamma = id_{U'}$, где U' — компонента связности U, содержащая U_0.

Говорят, что псевдогруппа локальных диффеоморфизмов $\mathcal{G}$ возможно несвязного многообразия T является *квазианалитической,* если каждое преобразование $\gamma \in \mathcal{G}$ квазианалитическое.

Мы доказываем следующую теорему для произвольных слоений со связностью Эресмана, не используя понятие системы путей и слоений, согласованных с системами путей, в отличие от доказательства Н.И. Жуковой в [11].

Теорема 2.1. *Пусть* (M, F) — *слоение со связностью Эресмана. Для того, чтобы естественный эпиморфизм групп голономии*

$$\chi_a \colon H_{\mathfrak{M}}(L, a) \to \Gamma(L, a)$$

был изоморфизмом для любой точки $a \in M$, *необходимо и достаточно, чтобы голономная псевдогруппа диффеоморфизмов* $\langle \gamma_{ij} \rangle_{i,j \in J}$ *слоения* (M, F) *была квазианалитической.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для слоения (M, F), заданного коциклом $\theta = \{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j \in J}$ с квазианалитической псевдогруппой диффеоморфизмов $\mathcal{G} = \langle \gamma_{ij} \rangle_{i,j \in J}$ и $\chi_a \colon H_{\mathfrak{M}}(L, a) \to \Gamma(L, a)$ — естественный эпиморфизм, удовлетворяющий диаграмме (2.2), и $[h] \in \beta_a^{-1}(\ker \chi_a)$. Это означает, что петля h в слое $L = L(a)$ индуцирует голономное отображение H_h, совпадающее с тождественным в некоторой окрестности V_a трансверсального диска D_a к слоению (M, F). Росток диффеоморфизма H_h в точке $a = h(0) = h(1)$ будем обозначать через $\{H_h\}_a$, а тривиальный росток, то есть росток локального тождественного диффеоморфизма – через $\{H_h\}_a = \{id\}_a$. Возьмем любую горизонтальную кривую $\sigma \in \Omega_a$. Пусть $\sigma \overset{h}{\longrightarrow}> \tilde{\sigma}$ и $h \overset{\sigma|_{[0,s]}}{\longrightarrow}> h_s$. Положим $N := \{s \in [0,1] \mid h_s(0) = h_s(1), \{H_{h_s}\}_{\sigma(s)} = \{id\}_{\sigma(s)}\}$, то есть N — множество точек отрезка $[0,1]$, где путь h_s порождает тривиальный росток $\{H_{h_s}\}$ в точке $h_s(0) = \sigma(s)$. Заметим, что в любой точке $\sigma(s)$ существует такой трансверсальный диск $D_{\sigma(s)}$ и число $\delta = \delta(s) > 0$, что $\sigma((s - \delta, s + \delta)) \subset D_{\sigma(s)}$. Предположим, что $s \in N$, тогда, по определению N, росток $\{H_{h_s}\}_{\sigma(s)}$ тривиален. Согласно следствию 2.1, этот росток не зависит от выбора трансверсального диска в точке $\sigma(s)$, поэтому $\{H'_{h_s}\}_{\sigma(s)} = \{id\}_{\sigma(s)}$, где H'_{h_s} — голономный диффеоморфизм вдоль пути h_s некоторой окрестности $V_0 \subset D_{\sigma(s)}$ точки $\sigma(s)$ трансверсального диска $D_{\sigma(s)}$. Будем считать, что $V_0 = D_{\sigma(s)}$, в противном случае этого добьемся, уменьшая этот диск. Из определения голономного диффеоморфизма H'_{h_s} вытекает, что для любого $s' \in (s-\delta, s+\delta)$ имеет место равенство $H'_{h'_s} = H'_{h_s}$, поэтому $\{H'_{h'_s}\}_{\sigma(s')} = \{id\}_{\sigma(s')}$. Отсюда мы получаем, что $(s-\delta, s+\delta)) \subset N$, где $\delta = \delta(s)$. Таким образом, N — открытое подмножество отрезка $[0,1]$.

Покажем, что N — замкнуто в $[0,1]$. Пусть s_0 принадлежит замыканию $\overline{N}$ в $[0,1]$ и $\{s_n\}$ — последовательность из N, сходящаяся к s_0 при $n \to \infty$. Так как

$$\tilde{\sigma}(s_n) = h_{s_n}(0) = h_{s_n}(1) = \sigma(s_n),$$

то, благодаря непрерывности $\tilde{\sigma}$ и σ, выполняется равенство $\tilde{\sigma}(s_0) = \sigma(s_0)$, означающее, что h_{s_0} — петля в точке $\sigma(s_0)$. Пусть $D_0 = D_{\sigma(s_0)}$ — трансверсальный диск в точке $\sigma(s_0)$, а $H'_{h_{s_0}}$ — голономный диффеоморфизм, определенный в окрестности $W_0 \subset D_0$ точки $\sigma(s_0)$. Тогда существует такое число $\delta_0 > 0$, что $\sigma(s) \in W_0$ при всех $s \in (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0)$. Так как $s_0 \in \overline{N}$, то найдется $s_1 \in (s_0-\delta_0, s_0+\delta_0)$, для которого $\{H_{h_{s_1}}\}_{\sigma(s_1)} = \{H'_{h_{s_1}}\}_{\sigma(s_1)} = \{id\}_{\sigma(s_1)}$. При этом, в соответствии с леммой 2.1, $\mu_{\sigma(s_0)}(\{H'_{h_{s_1}}\}_{\sigma(s_1)}) = \{\gamma\}_{\sigma(s_1)} = \{id\}_{\sigma(s_1)}$. В силу квазианалитичности $\gamma \in \mathcal{G}$ отсюда вытекает, что $\gamma = id_V$ всюду в связной области определения V. Следовательно, $\{H'_{h_{s_0}}\}_{\sigma(s_0)} = \{\gamma\}_{\sigma(s_0)} = \{id\}_{\sigma(s_0)}$, то есть $s_0 \in N$ и $N = \overline{N}$. В силу выбора h множество N содержит нуль. Таким образом, N — непустое открытое и замкнутое подмножество связного отрезка $[0,1]$, поэтому $N = [0,1]$. Это означает, что $\tilde{\sigma} = \sigma$ и $\beta_a^{-1}(\ker\chi_a) = \ker\beta_a$, то есть, ядро $\ker\chi_a$ тривиально и χ_a — изоморфизм групп.

Для доказательства необходимости предположим, что $\chi_a\colon H_{\mathfrak{M}}(L,a) \to \Gamma(L,a)$ — изоморфизм групп, то есть, ядро $\ker\chi_a$ тривиально и $\ker\beta_a = \ker\gamma_a$, где β_a и γ_a — эпиморфизмы, удовлетворяющие коммутативной диаграмме (2.2). Не нарушая общности, будем полагать, что слоение (M,F) со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ задано таким коциклом $\theta = \{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$, где $\mathfrak{M}_i := \mathfrak{M}|_{U_i}$ — связность Эресмана для субмерсии $f_i\colon U_i \to V_i := f_i(U_i)$.

Покажем сначала, что любая композиция $\gamma = \gamma_{kk-1} \circ \ldots \circ \gamma_{32} \circ \gamma_{21}\colon U \to V$ образующих псевдогруппы $\mathcal{G}$ является квазианалитической. Предположим, что существует такое связное открытое подмножество $U_0 \subset U$, что $\gamma|_{U_0} = id_{U_0}$. Возьмем точку $b \in U_0$. Для простоты будем обозначать компоненту связности U, содержащую U_0, той же буквой U. Тогда $b \in U_0$ можно соединить с любой точкой $x \in U$ гладкой кривой ϕ в U, $\phi(0) = b$, $\phi(1) = x$. Заметим, что $U \subset f_1(U_1)$, $V \subset f_k(U_k)$. Так как определены γ_{i-1i}, $i = 1,\ldots,k-1$, то $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$, поэтому окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_k$ из коцикла θ образуют цепочку. Учитывая, что $\gamma(b) = b$, мы получаем $U_1 \cap U_k \neq \emptyset$. Следовательно, существует точка $a \in f_1^{-1}(b) \cap f_k^{-1}(b)$. Пусть σ — лифт пути ϕ в точку a относительно связности Эресмана для субмерсии $\mathfrak{M}|_{U_1}$. Тогда $f_1 \circ \sigma = \phi$, $\sigma \in \Omega_a$. Обозначим $b_1 = b$, $b_i := \gamma_{ii-1}(b_{i-1})$, $i = 2,\ldots,k$, при этом $b_k = b_1 = b$. Кроме того, существует путь h в слое $L = L(a)$, принадлежащий объединению локальных слоев $\cup_{i=1}^k f_i^{-1}(b_i)$, замкнутый в точке a. Заметим, что голономный диффеоморфизм H_h некоторой окрестности точки a трансверсального диска D_a удовлетворяет равенству $f_k \circ H_h = \gamma \circ f_1$. Отсюда, учитывая, что $\{\gamma\}_b = \{id\}_b$ вытекает $\{H_h\}_a = \{id\}_a$; следовательно, $[h] \in \ker\gamma_a$. Согласно предположению, $\ker\beta_a = \ker\gamma_a$, поэтому $[h] \in \ker\beta_a$ и перенос σ вдоль h не меняет σ, то есть, если $\sigma \overset{h}{\longrightarrow}> \tilde{\sigma}$, то $\tilde{\sigma} = \sigma$. Пусть $h \overset{\sigma}{\longrightarrow}> h_1$ и $h_1(1) = \sigma(1) = c$. При этом $f_1(c) = f_1(\sigma(1)) = \phi(1) = x$. Покажем, что $[h_1] \in \ker\beta_c$. Предположим противное, тогда существует кривая $\sigma \in \Omega_c$, обладающая свойством $\sigma' \overset{h_1}{\longrightarrow}> \tilde{\sigma}' \neq \sigma'$. Отсюда $\sigma\sigma' \overset{h}{\longrightarrow}> \sigma\tilde{\sigma}' \neq \sigma\sigma'$, где $\sigma\sigma'$ и $\sigma\tilde{\sigma}'$ — произведения соответствующих путей, что противоречит принадлежности $[h]$ ядру $\ker\beta_a$. Таким образом, $[h_1] \in \ker\beta_c$. По предположению, $\ker\beta_c = \ker\gamma_c$, следовательно, $[h_1] \in \ker\gamma_c$. Это означает, что $\{H_{h_1}\}_c = \{id\}_c$, где H_{h_1} — голономный диффеоморфизм некоторой окрестности точки c из трансверсального диска D_c вдоль петли h_1. Учитывая то, что кривая $h_1(I)$ покрыта той же цепочкой окрестностей $U_1,\ldots,U_k$, что и $h(I)$ и, применяя лемму 2.1, мы получаем равенство $\{\gamma\}_{x=f_1(c)} = \{id\}_x$. Таким образом, γ совпадает с id_U. Из доказанного вытекает квазианалитичность любой образующей γ_{ij} голономной псевдогруппы $\mathcal{G}$.

Пусть теперь γ — произвольный элемент из $\mathcal{G}$. Если γ — обратный элемент к образующей, то его квазианалитичность является прямым следствием квазианалитичности образующей.

Пусть γ является объединением образующих, то есть в каждой точке из области определения γ существует окрестность, где γ совпадает с одной из образующих. Предположим, что V — связная компонента области определения γ и существует окрестность $V_0 \subset V$ такая, что $\gamma|_{V_0} = id_{V_0}$. Соединим точку $b \in V_0$ с произвольной точкой $y \in V$ гладкой кривой ψ в V и рассмотрим конечную цепочку окрестностей $V_1, \ldots, V_m$, $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, покрывающую $\psi(I)$ и обладающую тем свойством, что $\gamma|_{V_i}$ совпадает с одной из образующих $\mathcal{G}$. Обозначим через $\gamma^{(i)}$ ту образующую из $\mathcal{G}$, с которой совпадает $\gamma|_{V_i}$, возможно разным i соответствует одна и та же образующая. Так как $V_1 \cap V_0$ — открытое подмножество, на котором $\gamma^{(1)}$ совпадает с тождественным отображением, то квазианалитичность $\gamma^{(1)}$ влечет $\gamma^{(1)}|_{V_1} = id_{V_1}$. Отсюда, поскольку $\gamma^{(1)}|_{V_1\cap V_2} = \gamma^{(2)}|_{V_1\cap V_2}$, благодаря квазианалитичности $\gamma^{(2)}$, вытекает $\gamma^{(2)}|_{V_2} = id_{V_2}$. Продолжая эти рассуждения, мы видим, что $\gamma|_{V_m} = id_{V_m}$. Отсюда, в силу произвольности $y \in V$, следует $\gamma|_V = id_V$. Это завершает проверку квазианалитичности псевдогруппы $\mathcal{G}$. □

3. Двуслоения, накрытые произведением

3.1. Теорема Касивабары. Пусть (M, F_1) и (M, F_2) – слоения коразмерности q_1 и q_2 соответстенно, причем $q_1+q_2 = n$. Если эти слоения трансверсальны, то есть $T_xM = T_xF_1 \oplus T_xF_2$ в каждой точке $x \in M$, то эта пара слоений называется *двуслоением* и обозначается через (M, F_1, F_2) или, для краткости, через (F_1, F_2).

Пусть (M, F) — слоение, допускающее интегрируемую связность Эресмана $\mathfrak{M}$ на n-мерном многообразии M. Совокупность максимальных интегральных многообразий распределения $\mathfrak{M}$ образует слоение (M, F^t). При этом (M, F, F^t) — двуслоение.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ распределение, касательное к слоям слоения (M, F). Подчеркнем, что, если $\mathfrak{M}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F), то $\mathfrak{N}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F^t).

Напомним, что слоение (M, F) имеет интегрируемую связность Эресмана $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда двуслоение (F, F^t) обладает следующим свойством. Для любой допустимой пары путей (σ, h) существует такое кусочно гладкое отображение $H\colon I_1 \times I_2 \to M$, что при любом фиксированном $s \in I_1$ сужение $H|_{\{s\}\times I_2}$ является кривой в слое $L(\sigma(s))$ слоения (M, F), проходящем через точку $\sigma(s)$, а при любом фиксированном $t \in I_2$ сужение $H|_{I_1\times\{t\}}$ — кривая в слое $N(h(t))$ слоения (M, F^t), проходящем через точку $h(t)$.

Пусть $L \times N$ – произведение многообразий M и N, тогда тройка $(L \times N, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1 := \{L \times \{y\}, y \in N\}$, $\mathcal{F}_2 := \{\{z\} \times N, z \in L\}$, называется *каноническим двуслоением произведения* $L \times N$.

Ш. Касивабара в [2] доказана теорема, которую мы сформулируем в следующем, удобном для нас виде. При этом через $\mathfrak{Fol}$ обозначается категория слоений, морфизмами в которой служат гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого.

Теорема Касивабары. *Пусть $\mathfrak{M}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F) и (M, F^t) — такое слоение, что $TF^t = \mathfrak{M}$. Пусть $L = L(x)$, $N = N(x)$ — слои слоений (M, F) и (M, F^t), соответственно, проходящие через произвольную точку $x \in M$. Если многообразие M односвязно, то существует диффеоморфизм*

$$\Theta\colon M \to L \times N,$$

являющийся изоморфизмом в категории $\mathfrak{Fol}$ как слоений (M, F) и $(L \times N, \mathcal{F}_1)$, так и слоений (M, F^t) и $(L \times N, \mathcal{F}_2)$, где $(L \times N, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ – каноническое двуслоение произведения $L \times N$.

Определение 3.1. *Двуслоение (M, F, F^t) называется двуслоением, накрытым произведением, если существует накрытие $\kappa\colon X_1 \times X_2 \to M$ произведения многообразий $X_1 \times X_2$ на M, которое переводит слои произведения в соответствующие слои слоений (M, F) и (M, F^t).*

Применяя указанную теорему Касивабары, нетрудно показать, что имеет место

Предложение 3.1. *Для того, чтобы двуслоение (F, F^t) было накрыто произведением, необходимо и достаточно, чтобы распределение $\mathfrak{M} = TF^t$ являлось интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M, F).*

Я.Л. Шапиро в [7], [8] называет M с двуслоением (F, F^t), накрытым произведением, приводимым многообразием, а пару (F, F^t) — его двулистной структурой.

3.2. Леммы. Пусть G — группа, действующая гладко на многообразии X слева как группа диффеоморфизмов. Действие G называется *собственно разрывным,* если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если x и y не принадлежат одной орбите группы G, то они имеют такие окрестности U_x и U_y соответственно, что $g(U_x) \cap U_y = \emptyset$ для любых $g \in G$;

2) стационарная подгруппа G_x в любой точке $x \in X$ конечна;

3) для каждой точки $x \in X$ существует окрестность U, удовлетворяющая равенствам $g(U) = U$ для любых $g \in G_x$ и $g(U) \cap U = \emptyset$ для любых $g \in G \setminus G_x$.

Напомним, что группа G действует на X свободно, если $G_x = \{id_X\}$ для любого $x \in X$.

Если G — собственно разрывная группа диффеоморфизмов, действующая свободно на дифференцируемом многообразии X, то фактор-пространство X/G имеет структуру дифференцируемого многообразия, причем естественная проекция $\pi\colon X \to X/G$ является гладким регулярным накрывающим отображением.

Имеет место следующая легко доказываемая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть G — собственно разрывная группа диффеоморфизмов многообразия X, действующая свободно, и H — ее нормальный делитель. Тогда на фактор-многообразии $X' := X/H$ свободно и собственно разрывно действует группа диффеоморфизмов Ψ, изоморфная факторгруппе G/H, причем существует диффеоморфизм $\Xi\colon X/G \to X'/\Psi$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X/H \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X/G & \xrightarrow{\Xi} & X'/\Psi, \end{array}$$

где f, π, π' — естественные проекции, являющиеся регулярными накрывающими отображениями с группами накрывающих преобразований H, G, Ψ соответственно.

Говорят, что диффеоморфизм $\tilde{f}$ многообразия $\tilde{X}$ лежит над диффеоморфизмом f многообразия X относительно отображения $\pi\colon \tilde{X} \to X$, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\kappa\colon \tilde{X} \to X$ — универсальное накрывающее отображение и Γ — группа накрывающих преобразований κ. Тогда:*

1) над каждым диффеоморфизмом g многообразия X лежит некоторый диффеоморфизм $\tilde{g}$ многообразия $\tilde{X}$;

2) для того, чтобы диффеоморфизм $\tilde{g}$ многообразия $\tilde{X}$ лежал над некоторым диффеоморфизмом многообразия X необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{g} \circ \Gamma = \Gamma \circ \tilde{g}$;

3) множество всех диффеоморфизмов многообразия $\tilde{X}$, лежащих над диффеоморфизмами из группы G, образует группу $\tilde{G}$, причем факторгруппа $\tilde{G}/G$ изоморфна группе Γ.

Доказательство. Это утверждение доказывается аналогично доказательству теорем 28.10 и 28.7 для G-пространств Буземана в [12]. □

Если $\tilde{G}$ и G связаны свойством 3) леммы 3.2, то будем говорить, что группа $\tilde{G}$ лежит над группой G относительно $\kappa\colon \tilde{X} \to X$.

Лемма 3.3. *Пусть Ψ — собственно разрывная группа диффеоморфизмов многообразия X, действующая свободно и $\kappa\colon X \to X/\Psi$ — естественная проекция. Пусть $\tilde{\kappa}\colon \tilde{X} \to X$ — универсальное накрывающее отображение и H — группа накрывающих преобразований накрытия $\tilde{\kappa}$. Тогда группа G накрывающих преобразований универсального накрытия $\kappa\circ\tilde{\kappa}\colon \tilde{X} \to X/\Psi$ лежит над группой Ψ относительно $\tilde{\kappa}\colon \tilde{X} \to X/\Psi$, причем группа Ψ изоморфна фактор-группе G/H.*

Доказательство. Группа G накрывающих преобразований универсального накрытия $\kappa \circ \tilde{\kappa}$ изоморфна фундаментальной группе многообразия X/Ψ, а группа накрывающих преобразований H универсального накрытия $\tilde{\kappa}$ изоморфна фундаментальной группе многообразия X.

Из леммы 3.2 вытекает, что диффеоморфизмы многообразия $\tilde{X}$, лежащие над диффеоморфизмами из группы Ψ относительно $\tilde{\kappa}$, образуют группу, которую обозначим через $\tilde{\Psi}$, причем группа Ψ изоморфна фактор-группе $\tilde{\Psi}/H$.

Покажем, что G совпадает с $\tilde{\Psi}$. Любое преобразование $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$ лежит над некоторым $\psi \in \Psi$, то есть $\tilde{\kappa}\circ\tilde{\psi} = \psi\circ\tilde{\kappa}$. Нетрудно проверить, что Ψ — группа накрывающих преобразований накрытия κ, поэтому для каждого $\psi \in \Psi$ выполняется равенство $\kappa \circ \psi = \kappa$. Из предыдущего вытекает цепочка равенств

$$(\kappa \circ \tilde{\kappa}) \circ \tilde{\psi} = \kappa \circ (\tilde{\kappa} \circ \tilde{\psi}) = \kappa \circ (\psi \circ \tilde{\kappa}) = (\kappa \circ \psi) \circ \tilde{\kappa} = \kappa \circ \tilde{\kappa}$$

или $(\kappa\circ\tilde{\kappa})\circ\tilde{\psi} = \kappa\circ\tilde{\kappa}$. Таким образом, каждое $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$ лежит над тождественным диффеоморфизмом относительно $\kappa \circ \tilde{\kappa}$, то есть $\tilde{\Psi} \subset G$.

Покажем, что выполняется обратное включение. Пусть H — группа накрывающих преобразований накрытия $\tilde{\kappa}$. Очевидно, что $H \subset G$. Естественная проекция $\kappa\colon X \to X/\Psi$ является регулярным накрывающим отображением, поэтому H является нормальным делителем группы G, то есть $g \circ H = H \circ g$. Отсюда, в силу второго утверждения леммы 3.2, следует, что каждый диффеоморфизм $g \in G$ лежит над некоторым диффеоморфизмом g^* многообразия X, то есть $\tilde{\kappa} \circ g = g^* \circ \tilde{\kappa}$. Отсюда $\kappa \circ \tilde{\kappa} \circ g = \kappa \circ g^* \circ \tilde{\kappa}$ и, учитывая равенство $\kappa \circ \tilde{\kappa} \circ g = \kappa \circ \tilde{\kappa}$, мы имеем $\kappa \circ g^* \circ \tilde{\kappa}(\tilde{x}) = \kappa \circ \tilde{\kappa}(\tilde{x})$ для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Поскольку $x = \tilde{\kappa}(\tilde{x})$ пробегает все X, когда $\tilde{x}$ пробегает все $\tilde{X}$, то из предыдущего равенства вытекает $\kappa\circ g^*(x) = \kappa(x)$ для любого $x \in X$, то есть $\kappa\circ g^* = \kappa$ и g^* — накрывающее преобразование для κ. Поэтому $g^* \in \Psi$ и $g \in \tilde{\Psi}$, следовательно, $G \subset \tilde{\Psi}$.

Таким образом, $G = \tilde{\Psi}$. □

Напомним, что G_δ-подмножество многообразия X является пересечением счетного семейства открытых всюду плотных в X подмножеств. Поскольку на любом многообразии X существует полная риманова метрика, согласно теореме Хопфа–Ринова, X можно рассматривать как полное метрическое пространство. Следовательно, по теореме Бэра, любое G_δ-подмножество всюду плотно в X.

Мы будем пользоваться следующим легко доказываемым утверждением.

Лемма 3.4. *Пусть $\kappa\colon \tilde{X} \to X$ — гладкое универсальное накрывающее отображение для многообразия X, а G — некоторая группа диффеоморфизмов многообразия $\tilde{X}$, лежащая над группой Ψ. Тогда, если одна из групп G или Ψ обладает одним из следующих свойств:*

1) существует точка, неподвижная только относительно тождественного диффеоморфизма;

2) группа действует свободно;

3) множество неподвижных точек относительно каждого диффеоморфизма группы, исключая тождественный, является всюду плотным G_δ-подмножеством;

4) группа вполне разрывна,

то этим же свойством обладает и другая группа.

Далее мы применяем следующую лемму из [13, Лемма 1].

Лемма Шапиро. *Пусть X_1, X_2 — некоторые множества, $X = X_1 \times X_2$ и G — некоторая группа преобразований X, сохраняющих его структуру произведения. Пусть, далее, pr_1 и pr_2 —*

канонические проекции множества X на X_1 и X_2, а G_1 и G_2 — группы преобразований X_1 и X_2, индуцированные на них (посредством pr_1 и pr_2) группой G, и $q_1\colon G \to G_1$, $q_2\colon G \to G_2$ — естественные гомоморфизмы. Пусть G'_{11} и G'_{22} — ядра гомоморфизмов q_1, q_2 и $G_{11} := q_1(G'_{22})$, $G_{22} := q_2(G'_{11})$. Тогда:

1) существует такой изоморфизм факторгрупп

$$\Theta\colon G_1/G_{11} \to G_2/G_{22},$$

что, если $\{g_i\} \in G_i/G_{ii}$, $i = 1, 2$, где $g_i \in G_i$, $\{g_i\}$ — соответствующий g_i класс и $\{g_2\} = \Theta(\{g_1\})$, то G образовано множеством пар $(g_1, g_2) = g_1 \circ g_2$, где $g_1(x_1, x_2) := (g_1(x_1), x_2)$, $g_2(x_1, x_2) := (x_1, g_2(x_2))$, $x_i \in X_i$;

2) обратное, пусть G_i — группы преобразований X_i, G_{ii} — указанные выше их нормальные делители, причем существует изоморфизм $\Theta\colon G_1/G_{11} \to G_2/G_{22}$, то пятерка $(G_1, G_2, G_{11}, G_{22}, \Theta)$ однозначно определяет группу преобразований G на $X_1 \times X_2$, сохраняющую структуру произведения, по отношению к которой упомянутая пятерка играет указанную в первой части леммы роль.

3.3. Категория двуслоений, накрытых произведением. Обозначим через $\mathfrak{BiF}$ категорию, объектами которой служат двуслоения (M, F_1, F_2), накрытые произведением. Морфизмами двух объектов (M, F_1, F_2) и (M', F'_1, F'_2) будем называть дифференцируемые отображения $f\colon M \to M'$, являющиеся морфизмами слоений (M_i, F_i), $i = 1, 2$, и (M'_i, F'_i) в категории слоений $\mathfrak{Fol}$.

Пусть X_1 и X_2 — многообразия размерности n_1 и n_2 соответственно. Пусть заданы

$$\Phi_1\colon \Psi \times X_1 \to X_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2\colon \Psi \times X_2 \to X_2$$

— левые действия группы Ψ, обладающие тем свойством, что индуцировнное действие группы Ψ

$$\Phi\colon \Psi \times X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2 \colon (\psi, (x_1, x_2)) \mapsto (\psi \cdot x_1, \psi \cdot x_2) \qquad \forall \psi \in \Psi$$

является свободным и собственно разрывным. Следовательно, проекция

$$\kappa\colon X_1 \times X_2 \to (X_1 \times X_2)/\Psi$$

на пространство орбит является регулярным накрывающим отображением с группой Ψ в качестве группы накрывающих преобразований. Поэтому на $(X_1 \times X_2)/\Psi$ индуцируется структура гладкого многообразия, относительно которой κ становится гладким накрывающим отображением. Поскольку действие Φ группы Ψ на $X_1 \times X_2$ сохраняет структуру произведения, то на $(X_1 \times X_2)/\Psi$ индуцируется двуслоение $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, накрытое произведением $X_1 \times X_2$.

Определение 3.2. *Фактормногообразие $(X_1 \times X_2)/\Psi$ называется каноническим, а тройка $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, полученная указанным выше образом, будем называть каноническим двуслоением.*

Везде далее в этом разделе индексы i и j принимают значения 1 и 2, причем $i \neq j$.

Предложение 3.2. *Любое двуслоение (M, F_1, F_2), накрытое произведением, изоморфно в категории $\mathfrak{BiF}$ некоторому каноническому двуслоению $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.*

Доказательство. Пусть $f\colon \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to M$ — универсальное накрытие, тогда, согласно теореме Касивабары, $\tilde{\mathcal{F}}_i = f^*\mathcal{F}_i$ — стандартные слоения произведения. Поскольку группа G накрывающих преобразований накрытия f является группой автоморфизмов $(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \tilde{\mathcal{F}}_1, \mathcal{F}_2)$ в категории $\mathfrak{BiF}$, то для любых $x_i \in \tilde{X}_i$ и $g \in G$ выполняются равенства

$$g(\{x_1\} \times \tilde{X}_2) = \{x'_1\} \times \tilde{X}_2 \quad \text{и} \quad g(\tilde{X}_1 \times \{x_2\}) = \tilde{X}_1 \times \{x'_2\},$$

где $x'_i \in \tilde{X}_i$. Поэтому, корректно определены отображения $g_i := pr_i \circ g$, где pr_1 и pr_2 — канонические проекции произведения $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ на сомножители, причем

$$g(x_1, x_2) = (g_1(x_1), g_2(x_2)) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2.$$

Пусть $G_i := \{g_i = pr_i \circ g \,|\, g \in G\}$ и $q_i \colon G \to G_i$ — естественный эпиморфизм групп, $G_{ii} := q_i(q_j^{-1}(1_j))$, где 1_j — единица группы G_j. При этом G_{ii} — нормальный делитель группы G_i и определены факторгруппы G_i/G_{ii}. Согласно лемме Шапиро, существует изоморфизм $\Theta \colon G_1/G_{11} \to G_2/G_{22}$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, "h_1"'] & G \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & G_2 \arrow[d, "h_2"] \\ G_1/G_{11} \arrow[rr, "\Theta"] & & G_2/G_{22}, \end{tikzcd}$$

где $h_i \colon G_i \to G_i/G_{ii}$ — естественные проекции.

Возьмем какую-либо точку $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ из $f^{-1}(x)$. Пусть

$$N_i(\tilde{x}_j) := \{g \in G \mid g(\tilde{X}_i \times \{\tilde{x}_j\}) = \tilde{X}_i \times \{\tilde{x}_j\}\} \quad \text{и} \quad N_i(\tilde{x}) := q_i N_i(\tilde{x}_j).$$

Так как группа накрывающих преобразований G действует на $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ свободно и собственно разрывно, то группы $N_i(\tilde{x}_j)$ и $N_i(\tilde{x})$ действуют на $\tilde{X}_i \times \{\tilde{x}_j\}$ и $\tilde{X}_i$ соответственно свободно и собственно разрывно. Нетрудно проверить, что сужение $f|_{\tilde{X}_i \times \{\tilde{x}_j\}} \colon \tilde{X}_i \times \{\tilde{x}_j\} \to L_i(x)$ — регулярное накрытие на слой $L_i(x) \in F_i$ с группой накрывающих преобразований $N_i(\tilde{x}_j)$. Поскольку $G_{ii} \subset N_i(\tilde{x}_j)$, то G_{ii} действует на $\tilde{X}_i$ свободно и собственно разрывно, поэтому определено фактор-многообразие $X_i := \tilde{X}_i/G_{ii}$. Прямое произведение $G_{11} \times G_{22}$ нормальных делителей G_{ii} групп G_i является нормальным делителем группы G, следовательно, определено гладкое фактор-многообразие $(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2)/(G_{11} \times G_{22})$, диффеоморфное произведению многообразий $(\tilde{X}_1/G_{11}) \times (\tilde{X}_2/G_{22})$. Согласно лемме 3.1, на произведении многообразий $X_1 \times X_2$ действует свободно и собственно разрывно группа Ψ, изоморфная факторгруппе $G/(G_{11} \times G_{22})$, причем существует диффеоморфизм $\Theta \colon M \to (X_1 \times X_2)/\Psi$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 & \xrightarrow{f_1 \times f_2} & X_1 \times X_2 \\ f \big\downarrow & & \big\downarrow \kappa \\ (\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2)/G = M & \xrightarrow{\Theta} & (X_1 \times X_2)/\Psi, \end{array} \tag{3.1}$$

где $f_i \colon \tilde{X}_i \to X_i = \tilde{X}_i/G_{ii}$ и $\kappa \colon X_1 \times X_2 \to (X_1 \times X_2)/\Psi$ — факторотображения на пространства орбит. Из леммы Шапиро вытекает, что группа Ψ изоморфна каждой факторгруппе G_1/G_{11} и G_2/G_{22}. Так как группа Ψ сохраняет структуру произведения, то на фактор-многообразии $(X_1 \times X_2)/\Psi$ определено каноническое двуслоение $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ и Θ — изоморфизм в категории $\mathfrak{BiF}$. $\square$

Определение 3.3. *Абстрактная группа Ψ, удовлетворяющая предложению 3.2, называется структурной группой двуслоения, накрытого произведением.*

Следующее утверждение вытекает из доказательства предложения 3.2.

Следствие 3.1. *Если $\xi = ((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ — каноническое двуслоение, то структурная группа Ψ изоморфна каждой из факторгрупп $G/(G_{11} \times G_{22})$, G_1/G_{11}, G_2/G_{22}, где группа G изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M)$ фактор-многоообразия $M \cong (X_1 \times X_2)/\Psi$, а группа G_{ii}, $i = 1, 2$, изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(X_i)$ многоообразия X_i.*

3.4. Интерпретация канонического двуслоения.

Лемма 3.5. *Пусть $\kappa \colon \tilde{M} \to M$ — гладкое регулярное накрывающее отображение для многообразия M. Если h и h' — пути с началом в точках $y = h(0)$ и $y' = h'(0)$, накрывающие кусочно гладкий путь σ в M, то существует единственное накрывающее преобразование ψ, удовлетворяющее равенству $\psi \circ h = h'$.*

Доказательство. Обозначим через Ψ группу накрывающих преобразований регулярного накрытия κ. Напомним, что Ψ действует просто транзитивно на любом слое $\kappa^{-1}(x)$, $x \in M$.

Поскольку $\sigma = \kappa \circ h = \kappa \circ h'$ для любого $s \in I$ существуют такие отрезок $I_s = [s - \delta, s + \delta] \subset I$ и накрывающее преобразование ψ_s, что $\psi_s \circ h|_{I_s} = h'|_{I_s}$. В силу компактности отрезка I найдется его разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = 1$, обладающее свойством $\psi_i \circ h|_{I_i} = h'|_{I_i}$, где $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, m$, $\psi_i \in \Psi$. Поскольку $\psi_i(t_{i+1}) = \psi_{i+1}(t_{i+1})$, мы имеем $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_m = \psi \in \Psi$ и $\psi \circ h = h'$. □

Определение 3.4. *Пусть (M, F) — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Регулярное накрывающее отображение $f : L_0 \to L$ на слой L этого слоения называется $\mathfrak{M}$-голономным, если группа его накрывающих преобразований изоморфна группе $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L)$.*

Согласно предложению 3.2, любое двуслоение (M, F_1, F_2) изоморфно в категории $\mathfrak{BiF}$ каноническому двуслоению $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Следующее утверждение раскрывает геометрический смысл многообразий X_1 и X_2.

Предложение 3.3. *Пусть $(M, F_1, F_2) \in Ob(\mathfrak{BiF})$ и $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ — изоморфное ему каноническое двуслоение, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Тогда многообразие X_i является пространством $\mathfrak{M}_i$-голономного накрывающего отображения для любого слоя слоения F_i, где $\mathfrak{M}_i := TF_j$.*

Доказательство. Отождествим M с $(X_1 \times X_2)/\Psi$ по диффеоморфизму Θ, удовлетворяющему коммутативной диаграмме 3.1. Пусть $L_1 = L_1(x)$ — произвольный слой слоения F_1, $(x_1, x_2) \in \kappa^{-1}(x)$, тогда $\kappa^1 := \kappa|_{X_1 \times \{x_2\}} \colon X_1 \times \{x_2\} \to L_1$ — накрывающее отображение. Сохраним обозначения, введенные выше, пусть

$$\Psi(x_2) := \{\psi \in \Psi \mid \psi(X_1 \times \{x_2\}) = X_1 \times \{x_2\}\},$$

при этом $\Psi(x_2)$ свободно и собственно разрывно действует на $X_1 \times \{x_2\}$. Пусть Ψ_1 и Ψ_2 — группы диффеоморфизмов X_1 и X_2, индуцированные группой Ψ, тогда $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, где $\psi_i \in \Psi_i$, причем канонические проекции $q_i \colon \Psi \to \Psi_i$ являются изморфизмами групп. Поскольку $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \Psi(x_2)$ тогда и только тогда, когда $\psi_2(x_2) = x_2$, то $q_i|_{\Psi(x_2)} \colon \Psi(x_2) \to \Psi_{x_2}$ — изоморфизм на стационарную подгруппу группы Ψ в точке $x_2 \in X_2$. Поскольку $L_1 = (X_1 \times \{x_2\})/\Psi(x_2)$, то накрывающее отображение κ^1 является регулярным, а $\Psi(x_2)$ — его группой накрывающих преобразований. Нам нужно показать, что группа $\Psi(x_2)$ изоморфна группе голономии $H_{\mathfrak{M}_2}(L_1, x)$.

Так как κ^1 — регулярное накрытие, то образ индуцированного гомоморфизма

$$\kappa^1_* \colon \pi_1(X_1 \times \{x_2\}, (x_1, x_2)) \to \pi_1(L_1, x)$$

является нормальным делителем ρ, причем группа $\Psi(x_2)$ изоморфна фактор-группе $\pi_1(L_1, x)/\rho$. Пусть

$$\nu \colon \pi_1(L_1, x) \to \Psi(x_2)$$

естественный эпиморфизм на указанную фактор-группу. Обозначим через

$$\beta \colon \pi_1(L_1, x) \to H_{\mathfrak{M}_2}(L_1, x)$$

естественный эпиморфизм, ядро которого $\ker \beta = K_{\mathfrak{M}_2}(L_1, x)$ образовано элементами $[h] \in \pi_1(L_1, x)$, тривиально действующими на множестве горизонтальных кривых Ω_x (по определению группы $\mathfrak{M}$-голономии). Напомним, как определяется перенос произвольного пути $\sigma \in \Omega_x$ вдоль пути h. Пусть $\sigma \overset{h}{\longrightarrow}> \tilde{\sigma}$ и $y = (x_1, x_2)$. Обозначим через υ, k, $\tilde{\upsilon}$ пути в $X_1 \times X_2$ с началом в y, накрывающие σ, h и $\tilde{\sigma}$ соответственно. Тогда стандартная вертикально-горизонтальная гомотопия относительно произведения $X_1 \times X_2$ определяет перенос $\upsilon \overset{k}{\longrightarrow}> \tilde{\upsilon}$.

Покажем, что $\ker \nu \subset \ker \beta$. Возьмем любой элемент $[h] \in \ker \nu = \rho$, тогда путь $\tilde{h}$, накрывающий h с началом в y, является петлей в точке y. Для любого $\sigma \in \Omega_x$ обозначим через $\tilde{\sigma}$ результат переноса σ вдоль h относительно интегрируемой связности Эресмана $\mathfrak{M}_2$. Пусть υ и $\tilde{\upsilon}$ — пути, накрывающие σ и $\tilde{\sigma}$ соответственно. Так как $\tilde{h}$ — петля, то $\upsilon = \tilde{\upsilon}$, следовательно, $\sigma = \tilde{\sigma}$ и $[h] \in \ker \beta$.

Обратно, пусть $[h] \in \ker \beta$. Предположим, что $[h] \notin \ker \nu$. Заметим, что включение $j \colon L_1 \to M$ индуцирует изоморфизм $j_* \colon \rho \to G_{11}$ на нормальный делитель фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$, рассматриваемой как группа накрывающих преобразований G накрытия $f : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to M$, причем G_{11} совпадает с преобразованиями из G, индуцирующими $id_{\tilde{X}_2}$ на $\tilde{X}_2$. Поэтому, из того, что $[h] \notin \rho$ вытекает, что $[h]$ индуцирует нетождественное преобразование

$\psi_2 \in \Psi_{x_2}$. Найдется $z \in X_2$, для которого $z' := \psi_2(z) \neq z$. Соединим x_2 с точкой z в X_2 кусочно гладкой кривой γ, тогда кривая $\tilde{\gamma} := \psi_2 \circ \gamma$ соединяет x_0 с z' в X_2. Пусть υ — такая кривая в слое $X_1 \times \{x_2\}$ произведения $X_1 \times X_2$, что $pr_2 \circ \upsilon = \gamma$. Так как $[h] \notin \rho$, то путь $\tilde{h}$ с началом в y, накрывающий h, не замкнутый. Пусть $\upsilon \overset{\tilde{h}}{\longrightarrow}> \tilde{\upsilon}$, при этом $pr_2 \circ \upsilon = \gamma$. Так как $[h] \in \ker \beta$, то $\sigma \overset{h}{\longrightarrow}> \tilde{\sigma} = \sigma$, где $\sigma := k \circ \upsilon$. Поэтому υ и $\tilde{\upsilon}$ — пути с началом в точках y и $v := \tilde{h}(1)$, накрывающие один и тот же путь σ. Согласно лемме 3.5, элемент $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ удовлетворяет равенству $\tilde{\upsilon} = \psi \circ \upsilon$. Отсюда, учитывая, что $\psi_2 = pr_2 \circ \psi$, мы получаем $\gamma = \psi_2 \circ \gamma = \tilde{\gamma}$, следовательно, $z = z'$. Это означает, что $\psi_2 = id_{X_2}$. Противоречие показывает, что имеет место включение $\ker \nu \supset \ker \beta$.

Итак, мы имеем $\ker \nu = \ker \beta$, отсюда вытекает существование изоморфизма групп

$$\Xi \colon \Psi(x_2) \to H_{\mathfrak{M}_2}(L_1, x),$$

удовлетворяющего равенству $\Xi \circ \nu = \beta$.

Таким образом, X_1 является $\mathfrak{M}_1$-голономным накрытием для любого слоя слоения (M, F_1). Аналогично, X_2 служит $\mathfrak{M}_2$-голономным накрытием для слоев слоения (M, F_2). □

4. Категория троек, эквивалентная категории $\mathfrak{BiF}$

4.1. Категория троек $\mathfrak{T}$. Пусть (X_1, X_2, Ψ) — тройка, состоящая из гладких многообразий X_i, $i = 1, 2$, произвольной размерности n_i, группы Ψ эффективно действующей на X_i и диагонально действующей на произведении многообразий $X_1 \times X_2$ по правилу

$$\Phi \colon \Psi \times X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2 \colon (\psi, (x_1, x_2)) \mapsto (\psi \cdot x_1, \psi \cdot x_2) \qquad \forall \psi \in \Psi,$$

причем группа Ψ действует на $X_1 \times X_2$ свободно и собственно разрывно.

Если (X_1, X_2, Ψ) и (X_1', X_2', Ψ') — две такие тройки, то морфизмом первой тройки во вторую называется пара (h, μ), где h — отображение $X_1 \times X_2 \to X_1' \times X_2'$, сохраняющее структуру произведения, а $\mu \colon \Psi \to \Psi'$ — гомоморфизм групп, удовлетворяющий равенству $h \circ \psi = \mu(\psi) \circ h \ \forall \psi \in \Psi$.

Полученную категорию троек (X_1, X_2, Ψ) обозначим через $\mathfrak{T}$.

Предложение 4.1. *Пусть (M, F_1, F_2) — двуслоение, накрытое произведением. Предположим, что*

$$\Theta_1 \colon M \to (X_1 \times X_2)/\Psi \quad \text{и} \quad \Theta_2 \colon M \to (Y_1 \times Y_2)/\Psi'$$

— изоморфизмы в категории $\mathfrak{BiF}$ двуслоения (M, F_1, F_2) и канонических двуслоений $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $((Y_1 \times Y_2)/\Psi', \mathcal{F}_1', \mathcal{F}_2')$. Тогда тройки (X_1, X_2, Ψ) и (Y_1, Y_2, Ψ') изоморфны в категории $\mathfrak{T}$.

Доказательство. Из единственности универсального накрытия для M, определения канонического двуслоения и леммы 3.1 вытекает существование изоморфизма групп $\mu : \Psi \to \Psi'$ и диффеоморфизма

$$h \colon (X_1 \times X_2)/\Psi \to (Y_1 \times Y_2)/\Psi',$$

реализующего эквивалентность действий групп Ψ и Ψ'. При этом пара (h, μ) является изоморфизмом троек (X_1, X_2, Ψ) и (Y_1, Y_2, Ψ') в категории $\mathfrak{T}$. □

4.2. Эквивалентность категорий $\widetilde{\mathfrak{BiF}}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — какая-либо категория. Через $\widetilde{\mathfrak{B}}$ будем обозначать категорию, объектами которой являются классы изоморфных объектов категории $\mathfrak{B}$, а морфизмами — классы изоморфных морфизмов в категории $\mathfrak{B}$. Если $B \in Ob(\mathfrak{B})$, то через $[B]$ будем обозначать соответствующий ему объект категории $\widetilde{\mathfrak{B}}$, аналогичное обозначение используем для морфизмов.

Теорема 4.1. *Существует ковариантный функтор $\Upsilon \colon \widetilde{\mathfrak{BiF}} \to \widetilde{\mathfrak{T}}$, реализующий эквивалентность категорий $\widetilde{\mathfrak{BiF}}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$.*

Доказательство. Построим функтор $\Upsilon \colon \widetilde{\mathfrak{BiF}} \to \widetilde{\mathfrak{T}}$ следующим образом.

Пусть $[\xi] = [(M, F_1, F_2)] \in Ob(\widetilde{\mathfrak{BiF}})$ и $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ — каноническое двуслоение, изоморфное $\xi = (M, F_1, F_2)$, согласно предложению 3.2. Тогда $(X_1, X_2, \Psi) \in \mathfrak{T}$. Положим по определению $\Upsilon([\xi]) := [(X_1, X_2, \Psi)]$. Из предложения 4.1 вытекает корректность этого определения.

Пусть $f:\xi\to\xi'$ — морфизм двуслоения $\xi=(M,F_1,F_2)$ в $\xi'=(M',F_1',F_2')$ в категории $\mathfrak{BiF}$ и
$$\Theta\colon M\to(X_1\times X_2)/\Psi,\qquad \Theta'\colon M'\to(X_1'\times X_2')/\Psi'$$
— изморфизмы ξ и ξ' соответствующим им каноническим двуслоениям $\eta=((X_1\times X_2)/\Psi,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ и $\eta'=((X_1'\times X_2')/\Psi',\mathcal{F}_1',\mathcal{F}_2')$ соответственно. Согласно предложению 3.2, $[\xi]=[\eta]$, $[\xi']=[\eta']$. Поэтому можно считать, что f — морфизм $[\eta]$ и $[\eta']$. Не нарушая общности, положим $\xi=\eta$ и $\xi'=\eta'$. Пусть $r_i\colon\tilde X_i\to X_i$ и $r_i'\colon\tilde X_i'\to X_i'$, — гладкие универсальные накрытия. Обозначим через $\kappa\colon\tilde X_1\times\tilde X_2\to M$ и $\kappa'\colon\tilde X_1'\times\tilde X_2'\to M'$ универсальные накрытия соответствующих двуслоений на M и M', сохраняющее структуру произведения. Возьмем произвольные точки $(x_1,x_2)\in\tilde X_1\times\tilde X_2$ и $(y_1,y_2)\in\tilde X_1'\times\tilde X_2'$ такие, что $f\circ\kappa(x_1,x_2)=\kappa'(y_1,y_2)$. Тогда f индуцирует дифференцируемое отображение $\tilde f\colon\tilde X_1\times\tilde X_2\to\tilde X_1'\times\tilde X_2'$, переводящее (x_1,x_2) в (y_1,y_2), удовлетворяющее равенству $\kappa'\circ\tilde f=f\circ\kappa$. При этом $\tilde f$ определяет диффеоморфизмы $\tilde f_i\colon\tilde X_i\to\tilde X_i'$, обладающие свойствами:

1) $\tilde f=(\tilde f_1,\tilde f_2)$,

2) для любого $g_i\in G_i$ существует $g_i'\in G_i'$, удовлетворяющий равенству $g_i'\circ\tilde f_i=g_i\circ\tilde f_i$.

Положим по определению $\nu_i\colon G_i\to G_i'\colon g_i\mapsto g_i'$, тогда ν_i — гомоморфизм групп. Заметим, что $\nu_i(G_{ii})\subset G_{ii}'$, где $G_{ii}:=q_i(q_j^{-1}(1_j))$, $G_{ii}':=q_i'(q_j'^{-1}(1_j'))$. Поэтому гомоморфизмы ν_i индуцируют гомоморфизмы факторгрупп $\mu_i\colon G_i/G_{ii}\to G_i'/G_{ii}'$. Так как $\Psi_i=G_i/G_{ii}$, $\Psi_i'=G_i'/G_{ii}'$, то $\mu_i:\Psi_i\to\Psi_i'$ — гомеоморфизм. Применяя лемму 3.1, нетрудно показать, что $\tilde f_i$ индуцирует отображение $f_i\colon\tilde X_i/G_{ii}=X_i\to\tilde X_i'/G_{ii}'=X_i'$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\tilde X_i \arrow[rr, "\tilde f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] \arrow[dd, "r_i"'] & & \tilde X_i' \arrow[dr, "g_i'"] \arrow[dd, "r_i'" near start] & \\
& \tilde X_i \arrow[rr, "\tilde f_i"' near end] \arrow[dd, "r_i" near start] & & \tilde X_i' \arrow[dd, "r_i'"] \\
X_i \arrow[rr, "f_i"' near end] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & X_i' \arrow[dr, "\psi_i'"'] & \\
& X_i \arrow[rr, "f_i"] & & X_i',
\end{tikzcd}$$

где $r_i\colon\tilde X_i\to X_i=\tilde X_i/G_{ii}$ и $r_i'\colon\tilde X_i'\to X_i'=\tilde X_i'/G_{ii}'$ — факторотображения на пространства орбит. Отображение $\mu_i\colon\Psi_i\to\Psi_i'\colon\psi_i\mapsto\psi_i'$ является таким гомоморфизмом групп, что пара (h,μ), где $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $h=(f_1,f_2)$, — морфизм троек (X_1,X_2,Ψ) и (X_1',X_2',Ψ'). Положим по определению $\Upsilon([f]):=[(h,\mu)]$. Прямая проверка, использующая предложение 4.1, показывает, что Υ — ковариантный функтор из категории $\widetilde{\mathfrak{BiF}}$ в категорию $\widetilde{\mathfrak{T}}$.

Проверим, что построенный функтор Υ реализует эквивалентность категорий $\widetilde{\mathfrak{BiF}}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$. Покажем существование обратного функтора $\Lambda\colon\widetilde{\mathfrak{T}}\to\widetilde{\mathfrak{BiF}}$. Рассмотрим любой объект $[(X_1,X_2,\Psi)]$ категории $\widetilde{\mathfrak{T}}$, где $(X_1,X_2,\Psi)\in\mathfrak{T}$. Из определения категории $\mathfrak{T}$ вытекает, что определено каноническое двуслоение $((X_1\times X_2)/\Psi,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, накрытое произведением $X_1\times X_2$. Положим по определению $\Lambda[(X_1,X_2,\Psi)]:=[((X_1\times X_2)/\Psi,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)]$.

Пусть
$$(h,\mu):(X_1,X_2,\Psi)\to(X_1',X_2',\Psi')$$
— морфизм в категории $\mathfrak{T}$. Он индуцирует дифференцируемое отображение
$$f\colon(X_1\times X_2)/\Psi\to(X_1'\times X_2')/\Psi':(x_1,x_2)\Psi\mapsto h(x_1,x_2)\Psi',$$
удовлетворяющее равенству
$$p'\circ h=f\circ p,$$
где $p\colon X_1\times X_2\to(X_1\times X_2)/\Psi$ и $p'\colon X_1'\times X_2'\to(X_1'\times X_2')/\Psi'$ — естественные проекции на пространства орбит. Так как h, p, $p'\in Mor(\mathfrak{BiF})$, то из указанного равенства вытекает, что f является морфизмом канонических двуслоений на многообразиях $(X_1\times X_2)/\Psi$ и $(X_1'\times X_2')/\Psi'$,

то есть f – морфизм в категории $Mor(\mathfrak{BiF})$. Положим $\Lambda[(h,\mu)] := [f]$. Нетрудно проверить, что Λ корректно определенный ковариантный функтор, удовлетворяющий равенствам

$$\Lambda \circ \Upsilon = Id_{\widetilde{\mathfrak{BiF}}} \quad \text{и} \quad \Upsilon \circ \Lambda = Id_{\widetilde{\mathfrak{T}}}.$$

Таким образом, Υ реализует эквивалентность категорий $\widetilde{\mathfrak{BiF}}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$. □

4.3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2. Теорема 1.1 вытекает из предложений 3.2 и 3.3. Теорема 1.2 следует из теоремы 4.1 об эквивалентности категорий $\widetilde{\mathfrak{BiF}}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$.

5. Классы слоений с интегрируемой связностью Эресмана

5.1. Слоения с интегрируемой связностью Эресмана коразмерности $q = 1$. Пусть (M,F) – слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ коразмерности один. Поскольку любое одномерное распределение интегрируемо, распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо и определяет слоение. Следовательно, такие слоения входят в класс исследуемых слоений.

5.2. Надстроечные слоения. Конструкция надстроечного слоения предложена А. Хефлигером и детально описана в [14]. Пусть (M,F) – слоение коразмерности q на n-мерном многообразии M, определенное надстройкой гомоморфизма

$$\rho : \pi_1(B,b) \to Diff(T)$$

фундаментальной группы $\pi_1(B,b)$ многообразия B в группу диффеоморфизмов q-мерного многообразия T. Тогда существует простое q-мерное слоение (M,F^t), образованное слоями локально тривиального расслоения $p : M \to B$ со стандартным слоем T такое, что двуслоение (M,F,F^t) накрыто произведением. Следовательно, распределение $\mathfrak{M} = TF^t$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M,F).

5.3. Невырожденно приводимые псевдоримановы многообразия. Пусть (V,g) — невырожденно приводимое n-мерное псевдориманово многообразие, тогда существует p-мерное подпространство $\mathfrak{M}_{x_0}$, касательного пространства $T_{x_0}V$, сужение метрики g на котором не вырождено, кроме того, $T_{x_0}V$ инвариантно относительно его группы голономии. Это означает, что $\mathfrak{M}_{x_0}$ инвариантно относительно параллельных переносов вдоль любых (кусочно гладких) кривых, замкнутых в x_0. Поскольку при параллельном переносе вдоль кривой сохраняются углы между векторами, то ортогональное дополнение $\mathfrak{M}^{\perp}_{x_0}$ к $\mathfrak{M}_{x_0}$ в $T_{x_0}V$ так же инвариантно относительно группы голономии риманова пространства (V,g). Параллельный перенос $\mathfrak{M}_{x_0}$ в произвольную точку $x \in V$ не зависит от выбора пути, соединяющего x_0 с x, и определяет подпространство $\mathfrak{M}_x \subset T_xV$. Таким образом, полученные распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{\perp}$ называются *параллельными.* Как известно, они являются вполне геодезическими и интегрируемыми, следовательно, определяют два дополнительных по ортогональности слоения $(F,F^{\perp})$, где $\dim(F^{\perp}) = n-p = q$, которые обозначим через (F_1,F_2). Эти слоения называются *параллельными.* Заметим, что параллельность распределения является локальным свойством в том смысле, что, если какое-либо распределение параллельно в некоторой окрестности каждой точки связного псевдориманова многообразия V, то оно параллельно на V. Поэтому для описания его глобальной структуры потребуем полноту метрики g.

Пусть $\kappa\colon \tilde{V} \to V$ — универсальное накрывающее отображение и $\tilde{F}_i := \kappa^*F_i$, $i = 1,2$. Тогда $(\tilde{V},\tilde{g})$, где $\tilde{g} := x^*g$ — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие с парой ортогональных параллельных распределений $(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2)$. Полнота псевдоримановой метрики g влечет полноту псевдоримановой метрики $\tilde{g}$. Согласно теореме Ву ([15]), существует изометрия псевдориманова многообразия $\tilde{V}$ на произведение псевдоримановых многообразий $\tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$, переводящее слои слоений $(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2)$ в соответствующие слои произведения. Таким образом, (V,F_1,F_2) — естественное двуслоение полного невырожденно приводимого псевдориманова многообразия, накрытое произведением. Псевдогруппы голономии слоений (V,F_i) образованы локальными изометриями, поэтому квазианалитичны. Следовательно, из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть (V, g) — полное невырожденно приводимое n-мерное псевдориманово многообразие и (F_1, F_2) — его параллельные слоения размерности $n-q$ и q соответственно, на слоях которых индуцируется псевдориманова метрика. Тогда:*

1) почти для каждой точки $x \in V$ включения $f_1 : X_1 \to V$ и $f_2 : X_2 \to V$ слоев $X_1 = X_1(x)$ и $X_2 = X_2(x)$ индуцируют мономорфизмы фундаментальных групп $f_{i*} : \pi_1(X_i, x) \to \pi_1(V, x)$, причем $G_{ii} = f_{i*}(\pi_1(X_i, x))$ — нормальные делители группы $\pi_1(V, x)$;

2) на псевдоримановом произведении $X_1 \times X_2$ слоев, проходящих через x, определено сободное и собственно разрывное действие группы изометрий Ψ, изоморфной факторгруппе $G/(G_{11} \times G_{22})$, и определено полное каноническое псевдориманово многообразие $(X_1 \times X_2)/\Psi$ с парой канонических параллельных слоений $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$;

3) определена изометрия $\Theta : V \to (X_1 \times X_2)/\Psi$, являющаяся изоморфизмом в категории $\mathfrak{BiF}$.

Замечание 5.1. *Теорема 5.1 обобщает результаты Я.Л. Шапиро* [7] *для приводимых римановых многообразий.*

Замечание 5.2. *Отметим, что любое параллельное слоение на псевдоримановом многообразии является вполе геодезическим. Поэтому для того, чтобы распределение TF_2 было связностью Эресмана для (V, F_1) достаточно полноты геодезических в слоях слоения (V, F_2), то есть достаточно трансверсальной полноты слоения (V, F_1). Иногда такую полноту называют частичной полнотой невырожденно приводимого риманова многообразия (V, g).*

5.4. G-слоения с интегрируемой связностью Эресмана. Напомним, что слоение (M, F), допускающее трансверсальную G-структуру, называются G-слоениями. Заметим, что псевдогруппа голономии любого G-слоения квазианалитична. Специфика G-слоения (M, F) с интегрируемой связностью Эресмана отражена в следующей теореме, вытекающей из теорем 1.1 и 1.2.

Теорема 5.2. *Пусть (M, F) — G-слоение с интегрируемой связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ на n-мерном многообразии M и (M, F^t) – такое слоение, что $TF^t = \mathfrak{M}$. Пусть $\kappa : \widetilde{M} \to M$ – универсальное накрывающее отображение. Тогда:*

1) многообразие $\widetilde{M}$ диффеоморфно произведению многообразий $X_1 \times X_2$, причем на X_2 индуцирована G-структура, относительно которой (M, F) — G-слоение;

2) определено каноническое многообразие $(X_1 \times X_2)/\Psi$, причем группа Ψ действует на X_2 автоморфизмами указанной G-структуры;

3) ростковые группы голономии слоения (M, F) изоморфны группам $\mathfrak{M}$-голономии, причем многообразие X_2 является пространством голономого накрытия для любого слоя (M, F);

4) двуслоение (M, F, F^t) изоморфно в категории $\mathfrak{BiF}$ каноническому двуслоению $((X_1 \times X_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, однозначно определенному с точностью до изоморфизма тройки (X_1, X_2, Ψ) в категории $\mathfrak{T}$, сохраняющего G-структуру на X_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.A. Blumenthal, J.J. Hebda. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. **33**:4, 597–611 (1984).
2. S. Kashiwabara. *The decomposition of differential manifolds and its applications* // Tohoku Math. J. **11**, 43–53 (1959).
3. M. Brunella, J.V. Rereira, F.E. Touze. *Kahler manifolds with split tangent bundle* // Bull. Soc. math. France. **134**:2, 241–252 (2006).
4. S. Druel, J.V. Pereira, B. Pym, F. Touzet. *A global Weinstein splitting theorem for holomorphic Poisson manifolds* // arXiv: 2102.12641, 1–17 (2021).
5. A. Horing. *Uniruled variates with split tangent bundle* // Math. Z. **256**, 467–479 (2007).
6. F. Etayo, R.S. Santamaria, U.R. Trias. *The geometry of a bi-Lagrangian manifold* // DGA. **24**:1, 33–59 (2006).

7. Я.Л. Шапиро. *О приводимых римановых пространствах и двулистных структурах на них* // ДАН СССР. **206**:4, 831–833 (1972).
8. Я.Л. Шапиро. *О приводимых римановых многообразиях в целом* // ДАН СССР. **206**:4, 1305–1308 (1972).
9. D.B.A. Epstein, K. Millet, D. Tischler. *Leaves without holonomy* // J. London Math. Soc. **16**, 548–552 (1977).
10. I. Tamura. *Topology of foliations.* Japan: Iwanami Shoten. 1979.
11. Н.И. Жукова *Слоения, согласованные с системами путей* // Изв. вузов. Матем. **33**:7, 5–15 (1989).
12. Г. Буземан. *Геометрия геодезических.* М.: ФизМатГиз. 1962.
13. Я.Л. Шапиро. *О приводимых многообразиях и локальных произведениях* // Изв. вузов. Математика. **121**:6, 78–85 (1972).
14. Н.И. Жукова. *Минимальные множества картановых слоений* // Труды МИАН. **256**, 115–147 (2007).
15. H. Wu. *On the de Rham decomposition theorem* // Illinois J. Math. **8**, 291–311 (1964).

Нина Ивановна Жукова,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, 25/12,
603155, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: nzhukova@hse.ru, nina.i.zhukova@yandex.ru

Ксения Игоревна Шеина
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печерская, 25/12,
603155, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: kse51091@mail.ru