ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 4 (2021). С. 23-41.

УДК 517.98

УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АРГУМЕНТА ФУНКЦИЙ

К.Ю. ЗАМАНА

Аннотация. Рассматриваются и изучаются понятия случайного оператора, случайной операторнозначной функции и случайной полугруппы, заданных на гильбертовом пространстве, а также их усреднения. Получены условия, при которых усреднение случайной сильно непрерывной операторнозначной функции само является сильно непрерывным. В частности, показано, что у всякой случайной сильно непрерывной сжимающей операторнозначной функции есть сильно непрерывное сжимающее усреднение.

Рассматриваются две конкретные случайные полугруппы: матричная полугруппа случайных ортогональных преобразований евклидова пространства и полугруппа операторов, заданных на гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых на сфере евклидова пространства, и осуществляющих случайные ортогональные преобразования пространства аргументов этих функций. Вторую из этих полугрупп будем называть полугруппой случайных поворотов; ее можно интерпретировать как случайное блуждание на сфере. Показано существование усреднений у обоих случайных полугрупп.

Изучается операторнозначная функция, получающаяся в результате замены временного параметра t на $\sqrt{t}$ в усреднении полугруппы случайных поворотов. С помощью теоремы Чернова доказана при некоторых условиях сходимость последовательности итераций Фейнмана – Чернова этой функции к сильно непрерывной полугруппе, описывающей диффузию на сфере евклидова пространства. Для этого предварительно находится и изучается производная этой операторнозначной функции в нуле, являющаяся одновременно генератором предельной полугруппы. Получена простая дивергентная форма этого генератора. С помощью этой формы получены условия, при которых генератор является эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка; при этих условиях доказана его существенная самосопряженность.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайная операторнозначная функция, усреднение, итерации Фейнмана – Чернова.

Mathematics Subject Classification: 47B80, 47D06, 60B20

1. Введение

Задача построения и исследования усреднений случайных линейных операторов и операторнозначных функций представляет интерес как с точки зрения математики, так и для различных приложений в задачах статистической физики и квантовой механики. Здесь можно отметить работы [1]–[3], в которых были установлены аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы для произведений независимых случайных матриц. В работе [4] исследовались предельные характеристики композиций случайных линейных преобразований. Применение случайных преобразований к описанию решений

K.Yu. Zamana, Averaging of random orthogonal transformations of independent variable of functions.

Поступила 10 марта 2021 г.

эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными приведено в работе [5]. Усреднение случайных преобразований и применение теоремы Чернова к исследованию предела композиций случайных полугрупп рассматривались в работах [6]–[8].

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работе [9], посвященной изучению композиций независимых случайных полугрупп $\mathbf{S}(t)$ со значениями в группе унитарных преобразований пространства $L_2(D)$ (где D — сферический слой пространства $\mathbb{R}^d$), порождаемых случайными ортогональными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^d$ по формуле $\mathbf{S}(t)u(x) = u(e^{t\mathbf{A}}x)$, где $\mathbf{A}$ — случайная кососимметрическая матрица. В предположении равномерной ограниченности этой матрицы на вероятностном пространстве, а также при условии равенства результата усреднения этой матрицы нулю, в [9] была показана сходимость последовательности усреднений композиций независимых случайных операторнозначных функций вида $\mathbf{S}(\sqrt{t})$ к полугруппе, разрешающей некоторую начально-краевую задачу для эволюционного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, являющегося аналогом уравнения диффузии.

При этом в [9] была допущена неточность при исследовании дифференциального оператора, являющегося генератором этой предельной полугруппы. Неточность заключается в том, что этот оператор не является равномерно эллиптическим, если рассматривать его на пространстве функций, определенных на сферическом слое. Это происходит из-за того, что сферы являются инвариантными многообразиями для случайных ортогональных преобразований, поэтому и для усреднения они являются таковыми. В результате возникает вырождение оператора вдоль радиального направления, что приводит к нарушению условия эллиптичности. Однако, как показано в теореме 4.4 данной статьи, если рассматривать его на пространстве функций, определенных на сфере, то эллиптичность можно восстановить. Таким образом, эта неточность легко устранима и не влияет на полученные в [9] выводы и результаты.

Целью данной работы является выполнение предельного перехода для последовательности итераций Фейнмана – Чернова операторнозначных функций, возникших при усреднении операторнозначной функции $\mathbf{S}(\sqrt{t})$, в предположении, когда случайная матрица $\mathbf{A}$ необязательно ограничена, но обладает конечным вторым моментом. Этот предельный переход осуществляется с использованием теоремы Чернова. В связи с этим в данной статье будет дано обоснование применимости теоремы Чернова к рассматриваемой последовательности итераций.

Схема исследований, представленных в данной статье, такова. Сначала даются необходимые для дальнейшего понятия случайного оператора и случайной операторнозначной функции, понятия об их усреднениях и перечисляются основные свойства этих понятий, выраженные в утверждениях 2.1, 2.2, 2.3 и следствиях 2.1, 2.2. Будут получены достаточные условия сильной непрерывности усреднения случайной операторнозначной функции, значения которой являются операторами, заданными на сепарабельном гильбертовом пространстве (утверждение 2.4). Затем излагаются некоторые вспомогательные оценки и результаты, касающиеся случайной матричной экспоненты $e^{t\mathbf{A}}$ (утверждение 3.1, следствие 3.1 и теорема 3.1), после чего в теореме 4.1 и следствии 4.1 обосновывается существование сильно непрерывного усреднения случайной операторнозначной функции $\mathbf{S}(\sqrt{t})$, действующей на пространствах $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и осуществляющей случайные ортогональные преобразования пространства аргументов $\mathbb{R}^d$. Наконец, в теоремах 4.2 и 4.3 будет получена производная этого усреднения в нуле в предположении конечности второго момента случайной матрицы $\mathbf{A}$, а в теореме 4.4 и следствии 4.2 из нее будет установлена сходимость итераций Фейнмана – Чернова этого усреднения в пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ к полугруппе, порожденной производной.

Таким образом, в статье предложен метод построения усреднения случайных ортогональных преобразований аргумента функций, приводящий к построению полугрупп, описывающих диффузии на сфере.

2. Предварительные сведения и терминология

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (конечномерное или бесконечномерное) над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ и порождаемой им нормой $\|\, .\, \|_{\mathcal{H}}$, $B(\mathcal{H})$ — нормированное пространство линейных ограниченных операторов $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с операторной нормой $\|\, .\, \|_{B(\mathcal{H})}$ и тождественным оператором I, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство.

Определение 2.1. *Отображение $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ со значениями $\mathbf{A}_\omega \in B(\mathcal{H})$, где $\omega \in \Omega$, будем называть случайным оператором на $\mathcal{H}$, если функции $\xi(\cdot) = \langle \mathbf{A}_{(\cdot)} u, v\rangle$ являются $(\Omega, \mathcal{F})$-измеримыми (т.е. являются случайными величинами) при всех $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{H}$.*

Если $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ — случайный оператор, то всякий вектор $u \in \mathcal{H}$ индуцирует отображение $\mathbf{A}_{(\cdot)} u\colon \Omega \to \mathcal{H}$, которое для краткости будем обозначать $\mathbf{A}u$. Аналогично для любых векторов $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{H}$ случайную величину $\langle \mathbf{A}_{(\cdot)} u, v\rangle$ будем обозначать как $\langle \mathbf{A}u, v\rangle$. Последовательность случайных операторов, индексированных натуральными числами, будем обозначать $(\mathbf{A})_n$, чтобы отличать от записи $\mathbf{A}_\omega$.

Случайный оператор в смысле определения 2.1 является отображением, измеримым относительно стандартной базы слабой операторной топологии (т.е. прообраз всякого элемента стандартной базы слабой операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$ при отображении $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathcal{F}$). Для каждого $u \in \mathcal{H}$ индуцирумое этим случайным оператором отображение $\mathbf{A}u$ измеримо относительно стандартной базы слабой топологии пространства $\mathcal{H}$.

Отметим некоторые свойства случайных операторов, которые будут использоваться в данном исследовании:

1. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — случайные операторы, то для любых скаляров α и β отображение $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$ также является случайным оператором.

2. Пусть последовательность случайных операторов $\{(\mathbf{A})_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к отображению $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ в слабой операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$ почти всюду на Ω. Тогда $\mathbf{A}$ также является случайным оператором.

3. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{D}$ — всюду плотное в $\mathcal{H}$ подпространство. Пусть отображение $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ таково, что для любых u и v из $\mathcal{D}$ функция $\langle \mathbf{A}u, v\rangle$ является случайной величиной. Тогда $\mathbf{A}$ является случайным оператором на $\mathcal{H}$.

Последнее свойство позволяет проверять измеримость отображения $\mathbf{A}$ лишь на плотном подпространстве.

Определение 2.2. *Усреднением (или математическим ожиданием, или интегралом по Ω) случайного оператора $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ будем называть оператор $\mathrm{M}\mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$ такой, что*

$$\langle (\mathrm{M}\mathbf{A})u, v\rangle = \mathrm{M}\langle \mathbf{A}u, v\rangle \qquad \forall u \in \mathcal{H} \quad \forall v \in \mathcal{H}, \tag{2.1}$$

где M в правой части равенства (2.1) обозначает математическое ожидание, т.е. интеграл по вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Усреднение обладает следующими свойствами:

1. Усреднение случайного оператора, если оно существует, единственно.

2. Если случайные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют усреднения, то для любых скаляров α и β случайный оператор $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$ также имеет усреднение, причем,

$$\mathrm{M}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\mathrm{M}\mathbf{A} + \beta\mathrm{M}\mathbf{B}.$$

Кроме того, нам понадобится следующее достаточное условие существования усреднения случайного оператора.

Утверждение 2.1 (см. [9]). *Пусть* $\mathbf{A}$ *— случайный оператор на гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$*, такой что* $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \xi$*, где* $\xi\colon \Omega \to [0;+\infty)$ *— случайная величина с конечным математическим ожиданием. Тогда* $\mathbf{A}$ *имеет усреднение* $\mathrm{M}\mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$*, причем*

$$\|\mathrm{M}\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \mathrm{M}\xi.$$

В частности, если функция $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$ *сама является случайной величиной, имеющей конечное математическое ожидание, то* $\mathbf{A}$ *имеет усреднение, причем*

$$\|\mathrm{M}\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}.$$

Напомним, что оператор $A \in B(\mathcal{H})$ называется *сжимающим*, если $\|A\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant 1$; случайный оператор будем называть *случайным сжимающим оператором*, если все его значения являются сжимающими операторами. Применяя утверждение 2.1 к такому случайному оператору, немедленно получаем

Следствие 2.1. *Всякий случайный сжимающий оператор на гильбертовом пространстве имеет усреднение, которое также является сжимающим оператором.*

В случае, когда пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, измеримость случайного оператора в слабой операторной топологии распространяется также на сильную и равномерную операторные топологии.

Утверждение 2.2. *Пусть* $\mathcal{H}$ *— сепарабельное гильбертово пространство,* $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ *— случайный оператор. Тогда*

а) $\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}$ *является случайной величиной при каждом* $u \in \mathcal{H}$*;*

б) $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$ *является случайной величиной.*

Если к тому же $\mathbf{A}$ *имеет усреднение* $\mathrm{M}\mathbf{A}$*, то* $\|(\mathrm{M}\mathbf{A})u\|_{\mathcal{H}} \leqslant \mathrm{M}\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}$ *при каждом* $u \in \mathcal{H}$ *и* $\|\mathrm{M}\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$ *(при этом* $\mathrm{M}\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}$ *и* $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$ *могут быть бесконечными).*

Доказательство. Пусть $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ — счетное всюду плотное в $\mathcal{H}$ множество векторов. Без ограничения общности можно считать, что все эти векторы ненулевые. Тогда векторы $e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{\mathcal{H}}}$ образуют счетное подмножество единичной сферы пространства $\mathcal{H}$, плотное на этой сфере. Следовательно, для каждого $u \in \mathcal{H}$

$$\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle \mathbf{A}u, e_n\rangle|.$$

Поскольку $\mathbf{A}$ является случайным оператором, то все функции $|\langle \mathbf{A}u, e_n\rangle|$ измеримы, поэтому и $\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}$ измерима как поточечный супремум счетного множества измеримых функций.

Аналогично измеримость $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$, с учетом только что доказанного, следует из равенства

$$\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{A}e_n\|_{\mathcal{H}}.$$

Пусть теперь $\mathbf{A}$ имеет усреднение $\mathrm{M}\mathbf{A}$. С учетом доказанного выше получаем

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{M}\mathbf{A})u\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle (\mathrm{M}\mathbf{A})u, v\rangle| = \sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1} |\mathrm{M}\langle \mathbf{A}u, v\rangle| \leqslant \sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1} \mathrm{M}|\langle \mathbf{A}u, v\rangle| \\ \leqslant \sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1} \mathrm{M}\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} = \mathrm{M}\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

и аналогично с учетом только что доказанного

$$\|\mathrm{M}\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} = \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \|(\mathrm{M}\mathbf{A})u\|_{\mathcal{H}} \leqslant \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \mathrm{M}\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}} \leqslant \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}\|u\|_{\mathcal{H}} = \mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})},$$

что и требовалось. □

Замечание 2.1. *Утверждение 2.2 остается в силе и в том случае, когда гильбертово пространство $\mathcal{H}$ не обязательно сепарабельно, но при этом вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ дискретно. Действительно, условие сепарабельности в утверждении 2.2 нужно только для вывода измеримости $\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}$ и $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$, что в случае дискретного вероятностного пространства выполнено автоматически.*

Для операции усреднения можно сформулировать аналог теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Утверждение 2.3. *Пусть последовательность случайных операторов $\{(\mathbf{A})_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к случайному оператору $\mathbf{A}$ в слабой операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$ почти всюду на Ω, причем $\|(\mathbf{A})_n\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \xi$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $\xi \colon \Omega \to [0; +\infty)$ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Тогда случайные операторы $(\mathbf{A})_n$ и $\mathbf{A}$ имеют усреднения, причем $\mathrm{M}(\mathbf{A})_n$ сходится к $\mathrm{M}\mathbf{A}$ в слабой операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$.*

Доказательство. В силу неравенства $\|(\mathbf{A})_n\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \xi$ по утверждению 2.1 случайные операторы $(\mathbf{A})_n$ имеют усреднения. Из этого же неравенства следует, что

$$|\langle(\mathbf{A})_n u, v\rangle| \leqslant \xi\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall u \in \mathcal{H} \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

Переходя в (2.2) к пределу при $n \to \infty$ и пользуясь тем, что $\{(\mathbf{A})_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\mathbf{A}$ в слабой операторной топологии, получаем почти всюду $|\langle\mathbf{A}u, v\rangle| \leqslant \xi\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}$. Переходя в этом неравенстве к супремуму последовательно по $\|v\|_{\mathcal{H}} = 1$ и по $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$, получаем почти всюду $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \xi$, откуда по утверждению 2.1 следует существование усреднения у $\mathbf{A}$. Далее, при фиксированных $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{H}$ последовательность случайных величин $\langle(\mathbf{A})_n u, v\rangle$, сходящаяся почти всюду к случайной величине $\langle\mathbf{A}u, v\rangle$, в силу (2.2) удовлетворяет всем условиям теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\langle\mathrm{M}(\mathbf{A})_n u, v\rangle = \lim_{n\to\infty}\mathrm{M}\langle(\mathbf{A})_n u, v\rangle = \mathrm{M}\langle\mathbf{A}u, v\rangle = \langle(\mathrm{M}\mathbf{A})u, v\rangle,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 2.2. *Для случая сепарабельного $\mathcal{H}$ или дискретного $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ справедливы аналоги утверждения 2.3, в которых слабая топология заменена на сильную или равномерную.*

Множество всех отображений $F \colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$, где $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, будем традиционно обозначать $B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}$, а всякий его элемент называть *операторнозначной функцией* (в дальнейшем прилагательное «операторнозначный» будет часто опускаться в тех ситуациях, когда это не приводит к недоразумениям). Пусть $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ — топологическое векторное пространство, состоящее из операторнозначных функций $F \colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$, непрерывных относительно сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$ (такие функции называются *сильно непрерывными*); топология τ_s в $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ порождается семейством полунорм $\Phi_{T,u}(F) = \sup\limits_{t\in[0;T]}\|F(t)u\|_{\mathcal{H}}$ при всех $T > 0$ и $u \in \mathcal{H}$. Отметим, что если F — операторнозначная функция и $F_n \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, то

$$F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H})) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{t\to t_0}\|F(t)u - F(t_0)u\|_{\mathcal{H}} = 0 \qquad \forall t_0 \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

$$F_n \xrightarrow{\tau_s} F \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0;T]}\|F_n(t)u - F(t)u\|_{\mathcal{H}} = 0 \qquad \forall T > 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Операторнозначная функция $S\colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$ называется *операторной полугруппой* (или просто *полугруппой*), если

$$S(0) = I, \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \qquad \forall t_1, t_2 \in [0; +\infty).$$

Определение 2.3. *Отображение $\mathbf{F}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}$ со значениями $\mathbf{F}_\omega\colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$, где $\omega \in \Omega$, будем называть случайной операторнозначной функцией (или просто случайной функцией), если $\mathbf{F}_{(\cdot)}(t)$ является случайным оператором при каждом $t \geqslant 0$. Если при этом $\mathbf{F}_\omega$ при каждом $\omega \in \Omega$ является операторной полугруппой, то отображение $\mathbf{F}$ будем называть также случайной операторной полугруппой (или просто случайной полугруппой).*

Сделаем некоторые важные замечания по поводу обозначений, связанных со случайной функцией $\mathbf{F}$:

— значение случайной функции $\mathbf{F}$ на исходе $\omega \in \Omega$ обозначается как $\mathbf{F}_\omega$ и представляет собой операторнозначную функцию;
— для всякого $t \geqslant 0$ отображение $\mathbf{F}_{(\cdot)}(t)\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$, являющееся в силу определения 2.3 случайным оператором, будем обозначать как $\mathbf{F}(t)$; такое обозначение не должно приводить к недоразумениям, поскольку в соответствии с предыдущим пунктом для записи значения случайной функции $\mathbf{F}$ на исходе $\omega \in \Omega$ вместо $\mathbf{F}(\omega)$ используется обозначение $\mathbf{F}_\omega$;
— для значения случайного оператора $\mathbf{F}(t)$ на исходе $\omega \in \Omega$, являющегося оператором, используется обозначение $\mathbf{F}_\omega(t)$;
— на случайный оператор $\mathbf{F}(t)$ распространяется замечание к определению 2.1, т.е. для всякого $u \in \mathcal{H}$ отображение $\mathbf{F}_{(\cdot)}(t)u$ будем обозначать как $\mathbf{F}(t)u$.

Если все значения случайной операторнозначной функции являются сильно непрерывными функциями, то такую случайную функцию будем называть *случайной сильно непрерывной операторнозначной функцией.*

Определение 2.4. *Усреднением случайной операторнозначной функции $\mathbf{F}$ будем называть функцию $\mathrm{M}\mathbf{F}\colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$ такую, что $(\mathrm{M}\mathbf{F})(t)$ является усреднением случайного оператора $\mathbf{F}(t)$ при каждом $t \geqslant 0$, т.е. $(\mathrm{M}\mathbf{F})(t) = \mathrm{M}\,(\mathbf{F}(t))$.*

Для доказательства существования усреднений случайных операторнозначных функций можно использовать утверждение 2.1 и следствие 2.1 из него. Однако усреднение случайной сильно непрерывной функции не обязательно само будет сильно непрерывной функцией. Поэтому полезно рассмотреть следующую модификацию утверждения 2.1, позволяющую гарантировать сильную непрерывность усреднения.

Утверждение 2.4. *Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathbf{F}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ — случайная сильно непрерывная операторнозначная функция, которая удовлетворяет следующему условию: для всякого $T > 0$ существует такая случайная величина ξ_T с конечным математическим ожиданием, что $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \xi_T$ на $[0; T]$. Тогда $\mathbf{F}$ имеет сильно непрерывное усреднение $\mathrm{M}\mathbf{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, причем $\|(\mathrm{M}\mathbf{F})(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \mathrm{M}\xi_T$ на всяком отрезке $[0; T]$.*

Доказательство. Существование усреднения $\mathrm{M}\mathbf{F} \in B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}$ и оценка для него следуют непосредственно из утверждения 2.1. Остается доказать сильную непрерывность.

Согласно утверждению 2.2, для всякого $u \in \mathcal{H}$

$$\|(\mathrm{M}\mathbf{F})(t)u - (\mathrm{M}\mathbf{F})(t_0)u\|_{\mathcal{H}} = \big\|\mathrm{M}\big(\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)\big)u\big\|_{\mathcal{H}} \leqslant \mathrm{M}\|\mathbf{F}(t)u - \mathbf{F}(t_0)u\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.3}$$

Поскольку $\mathbf{F}$ является случайной сильно непрерывной функцией, то $\|\mathbf{F}(t)u - \mathbf{F}(t_0)u\|_{\mathcal{H}}$ сходится поточечно на Ω к нулю при $t \to t_0$. При этом если $t \in [t_0 - 1; t_0 + 1] \cap \mathbb{R}_+$, то

$$\|\mathbf{F}(t)u - \mathbf{F}(t_0)u\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left(\|\mathbf{F}(t)\|_{B(\mathcal{H})} + \|\mathbf{F}(t_0)\|_{B(\mathcal{H})}\right) \|u\|_{\mathcal{H}} \leqslant 2\|u\|_{\mathcal{H}} \cdot \xi_{t_0+1},$$

т.е. $\|\mathbf{F}(t)u - \mathbf{F}(t_0)u\|_{\mathcal{H}}$ мажорируется интегрируемой случайной величиной $2\|u\|_{\mathcal{H}} \cdot \xi_{t_0+1}$ в окрестности t_0. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть неравенства в (2.3) стремится к нулю при $t \to t_0$, поэтому и левая часть в (2.3) стремится к нулю, что и требовалось. □

Замечание 2.3. *Так же, как и в случае с утверждением 2.2, в утверждении 2.4 условие сепарабельности $\mathcal{H}$ можно заменить на условие дискретности вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Если все значения операторнозначной функции являются сжимающими операторами, то такую функцию будем называть *сжимающей*; если все значения случайной операторнозначной функции являются сжимающими функциями, то такую случайную функцию будем называть *случайной сжимающей функцией*. Из утверждения 2.4 немедленно получаем

Следствие 2.2. *Всякая случайная сильно непрерывная сжимающая операторнозначная функция, действующая на сепарабельном гильбертовом пространстве, имеет усреднение, которое само является сильно непрерывной сжимающей операторнозначной функцией.*

Определение 2.5. *Будем говорить, что функция $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ эквивалентна по Чернову операторной полугруппе $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, если последовательность итераций Фейнмана – Чернова $(F(t/n))^n$ функции F сходится к полугруппе U в топологии пространства $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$.*

Следующая теорема дает достаточные условия эквивалентности по Чернову полугруппе операторов (см. [10, p. 220] и [11]).

Теорема (Chernoff). *Пусть функция $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ такова, что $F(0) = I$ и $\|F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant e^{\alpha t}$ при некотором $\alpha \geqslant 0$. Если замыкание оператора $F'(0)$ является генератором полугруппы $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, то функция F эквивалентна по Чернову полугруппе U.*

Проверка условий этой теоремы для усреднения случайной операторнозначной функции $\mathbf{T}(t)u = u(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x)$ будет занимать существенную часть выкладок в данной статье.

3. Свойства усреднений случайных матриц и матричных полугрупп

В этом разделе будут получены некоторые вспомогательные результаты, связанные со случайными матрицами и их усреднениями.

Если в качестве $\mathcal{H}$ взять $\mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$, то $B(\mathbb{R}^d)$ можно рассматривать как нормированное пространство $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ квадратных матриц порядка d со спектральной нормой. Более точно, существует изоформизм между пространствами $B(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, который каждому линейному оператору ставит в соответствие его матрицу в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^d$. В связи с этим случайный оператор $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathbb{R}^d)$ мы будем называть также *случайной матрицей*, а его значения будем отождествлять с соответствующими матрицами. Элементом $\mathbf{a}_{ij}$ случайной матрицы $\mathbf{A}$ будем называть случайную величину $(\mathbf{A}e_j, e_i)$, где $\{e_i\}_{i=1}^d$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^d$. Аналогично будем поступать и в случае $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$.

Здесь и далее скалярное произведение пространства $\mathbb{R}^d$ будем обозначать круглыми скобками $(\,.\,,\,.\,)$, евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать знаком модуля $|x|$, а спектральную норму матрицы $A \in B(\mathbb{R}^d)$, являющуюся также ее операторной нормой, будем обозначать $\|A\|$ без указания индекса $_{B(\mathbb{R}^d)}$.

Конечномерность пространств $\mathbb{R}^d$ и $B(\mathbb{R}^d)$ позволяет сделать более сильные выводы относительно измеримости и усреднений случайных матриц по сравнению с утверждением 2.2:

1. Отображение $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathbb{R}^d)$ является случайной матрицей в том и только том случае, когда все ее элементы являются случайными величинами.

2. Если $\mathbf{A}$ — случайная матрица, то при всяком $x \in \mathbb{R}^d$ отображение $\mathbf{A}x\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ является случайным вектором.

3. Случайная матрица $\mathbf{A}$ имеет усреднение тогда и только тогда, когда случайная величина $\|\mathbf{A}\|$ имеет конечное математическое ожидание. При этом элементы матрицы $\mathrm{M}\mathbf{A}$ являются математическими ожиданиями соответствующих элементов $\mathbf{A}$.

Под произведением случайных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будем понимать отображение $\mathbf{AB}\colon \Omega \to B(\mathbb{R}^d)$, которое каждому $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие матрицу $\mathbf{A}_\omega \mathbf{B}_\omega$. Произведение случайных матриц также является случайной матрицей.

Пусть $\mathbf{A}$ — случайная матрица. Рассмотрим матричную экспоненту

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.1}$$

Отметим, что $e^{t\mathbf{A}}$ является случайной непрерывной матричной полугруппой. Обратно, если $\mathbf{S}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathbb{R}^d))$ — случайная непрерывная матричная полугруппа, то существует случайная матрица $\mathbf{A}$ такая, что $\mathbf{S}(t) = e^{t\mathbf{A}}$. Эту случайную матрицу будем называть *случайным генератором* (или просто *генератором*) случайной полугруппы $\mathbf{S}$.

Для целей следующего раздела нас будет интересовать случайная непрерывная матричная полугруппа, осуществляющая случайные ортогональные преобразования (повороты) пространства $\mathbb{R}^d$. Такая полугруппа будет называться *ортогональной*. Учитывая сказанное выше, несложно заметить, что генератором всякой случайной непрерывной ортогональной матричной полугруппы является случайная кососимметрическая матрица. Обратно, всякая случайная кососимметрическая матрица генерирует случайную непрерывную ортогональную матричную полугруппу.

Применяя следствие 2.2 к случайной непрерывной ортогональной матричной функции, непосредственно получаем

Следствие 3.1. *Всякая случайная непрерывная ортогональная матричная функция имеет усреднение, являющееся непрерывной сжимающей матричной функцией.*

Нам понадобятся также некоторые свойства спектральной нормы кососимметрической матрицы A:

1) $\|A^n\| = \|A\|^n$;

2) $\|A^k\| \leqslant \|A^n\| + 1$ при всех k от 1 до n.

Отсюда получаем следующие свойства случайной кососимметрической матрицы $\mathbf{A}$:

1. Случайная матрица $\mathbf{A}^n$ имеет усреднение тогда и только тогда, когда случайная величина $\|\mathbf{A}\|^n$ имеет конечное математическое ожидание.

2. Если $\mathbf{A}^n$ имеет усреднение, то и случайные матрицы $\mathbf{A}^k$ при всех k от 1 до n имеют усреднения.

Наконец, получим некоторые полезные оценки для остатка ряда (3.1) в случае, когда матрица A кососимметрическая.

Утверждение 3.1. *Пусть A — кососимметрическая матрица, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t \geqslant 0$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\text{а)}\ \left\| e^{tA} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{t^{n+1}\|A^{n+1}\|}{(n+1)!}; \qquad \text{б)}\ \left\| e^{tA} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{2t^n\|A^n\|}{n!}.$$

Доказательство. Неравенство а) следует из формулы Тейлора порядка n в точке $t = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа (см. [12, стр. 656-657]), примененной к матричной функции e^{tA}. Действительно, $\left(e^{tA}\right)^{(k)}(0) = A^k$ при всех k от 0 до n, причем, поскольку матрица e^{tA} ортогональна, то

$$\left\| \left(e^{tA}\right)^{(n+1)} \right\| = \|A^{n+1}e^{tA}\| \leqslant \|A^{n+1}\| \cdot \|e^{tA}\| = \|A^{n+1}\|.$$

Неравенство б) следует из неравенства а):

$$\left\| e^{tA} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leqslant \left\| e^{tA} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| + \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leqslant \frac{2t^n\|A^n\|}{n!}.$$

□

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbf{A}$ — случайная кососимметрическая матрица такая, что $\mathbf{A}^n$ имеет усреднение при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^n} \left\| \mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}}) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!} \right\| = 0.$$

В частности, если $\mathrm{M}(\mathbf{A}^k) = 0$ при всех k от 1 до $n - 1$, то

$$\left(\mathrm{M}\left(e^{\sqrt[n]{t}\mathbf{A}}\right)\right)'(0) = \frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^n)}{n!},$$

и матричная функция $\mathrm{M}\left(e^{\sqrt[n]{t}\mathbf{A}}\right)$ эквивалентна по Чернову матричной полугруппе $e^{\frac{t\mathrm{M}(\mathbf{A}^n)}{n!}}$.

Доказательство. Обозначим при $t > 0$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{t^n}\left(e^{t\mathbf{A}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \right).$$

Случайные матрицы $\mathbf{A}^k$ при k от 1 до n, а также случайная непрерывная ортогональная матричная полугруппа $e^{t\mathbf{A}}$ имеют усреднения, поэтому $\mathbf{B}(t)$ при каждом $t > 0$ является случайной матрицей, имеющей усреднение

$$(\mathrm{M}\mathbf{B})(t) = \frac{1}{t^n}\left(\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}}) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!} \right).$$

Применяя неравенство а) утверждения 3.1, получаем

$$\|\mathbf{B}(t)\| \leqslant \frac{t\|\mathbf{A}^{n+1}\|}{(n+1)!} \xrightarrow{t\to 0+} 0,$$

т.е. случайная матрица $\mathbf{B}(t)$ сходится поточечно на Ω к нулевой матрице при $t \to 0+$. С другой стороны, согласно неравенству б) утверждения 3.1

$$\|\mathbf{B}(t)\| \leqslant \frac{2\|\mathbf{A}^n\|}{n!},$$

причем по условию случайная величина $\|\mathbf{A}^n\|$ имеет конечное математическое ожидание, т.е. $\mathbf{B}(t)$ мажорируется по норме интегрируемой случайной величиной в правой окрестности нуля. Тогда по утверждению 2.3 $(\mathrm{M}\mathbf{B})(t)$ сходится к нулевой матрице при $t \to 0+$, что и требовалось доказать. $\square$

4. Усреднение операторов случайного поворота аргумента

Пусть $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ — гильбертово пространство функций $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, квадратично интегрируемых относительно стандартной меры Лебега μ на $\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathbb{R}^d)$ — случайная кососимметрическая матрица порядка d.

В данном разделе рассматриваются случайные операторы $\mathbf{S}(t)u(x) = u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)$ и $\mathbf{T}(t) = \mathbf{S}(\sqrt{t})$, осуществляющие случайные ортогональные преобразования (повороты) пространства аргументов функции $u \in \mathcal{H}$, и исследуются их усреднения. Центральным результатом этого раздела является доказательство эквивалентности по Чернову усреднения $\mathrm{M}\mathbf{T}$ некоторой операторной полугруппе, описывающей диффузию на $(d-1)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, при условиях $\mathrm{M}\mathbf{A} = 0$ и $\mathrm{M}(\mathbf{A}^2) \in B(\mathbb{R}^d)$.

4.1. Корректность и существование усреднения. Итак, рассмотрим при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \geqslant 0$ оператор $\mathbf{S}_\omega(t) \in B(\mathcal{H})$, который каждой функции $u \in \mathcal{H}$ ставит в соответствие функцию $u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right)$.

Утверждение 4.1. *Пусть $U \in B(\mathbb{R}^d)$ — ортогональная матрица.*

а) если u и v — эквивалентные измеримые по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функции, то $u(U(\cdot))$ и $v(U(\cdot))$ — тоже эквивалентные измеримые по Лебегу функции;

б) если $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то $u(U(\cdot)) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, причем $\|u(U(\cdot))\|_{L_2} = \|u\|_{L_2}$;

в) если $u, v \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то $\langle u(U(\cdot)), v(U(\cdot))\rangle = \langle u, v\rangle$.

Доказательство. а) Измеримость функции u влечет измеримость функции $u(U(\cdot))$. Действительно, если G — произвольное открытое подмножество пространства $\mathbb{C}$, то из измеримости u следует измеримость по Лебегу множества $u^{-1}(G) \subset \mathbb{R}^d$, а поскольку семейство измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^d$ инвариантно относительно ортогональных преобразований этого пространства, то множество $A^{-1}(u^{-1}(G))$ также измеримо.

Далее, пусть $N \subset \mathbb{R}^d$ — множество нулевой меры, на котором эквивалентные измеримые функции u и v отличны. Тогда функции $u\left(U(\cdot)\right)$ и $v\left(U(\cdot)\right)$ измеримы по доказанному выше и отличны на множестве $U^{-1}(N)$, а так как мера Лебега инвариантна относительно ортогональных преобразований, то это множество тоже имеет нулевую меру. Следовательно, функции $u\left(U(\cdot)\right)$ и $v\left(U(\cdot)\right)$ эквивалентны.

б) Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда существует конечный интеграл $\|u\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2\,dx$. Выполняя в нем ортогональную замену переменных $x = Uy$ и учитывая, что $|\det U| = 1$, получаем искомое (см. [13, стр. 228-229]). Аналогично доказывается пункт в). $\square$

Из доказанного выше утверждения следует, что $\mathbf{S}_\omega(t)$ является корректно определенным унитарным оператором из $B(\mathcal{H})$.

Для изложения дальнейших результатов нам понадобится пространство $C_0(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}$ финитных (т.е. имеющих компактный носитель) непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций. Известно, что это пространство всюду плотно в $\mathcal{H}$ (см. [13, стр. 291]), поэтому всякая функция из $\mathcal{H}$ является пределом в смысле сходимости в среднеквадратичной последовательности функций из $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$. *Тогда для любых* $t \geqslant 0$ *и* $x \in \mathbb{R}^d$ *функция* $u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)$ *является случайной величиной, имеющей конечное математическое ожидание, причем* $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $t \geqslant 0$. Функция $u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^d$ является случайной величиной как композиция непрерывной функции u и измеримого отображения $e^{t\mathbf{A}}x$. Кроме того, $u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)$ ограничена на Ω, поскольку u ограничена на $\mathbb{R}^d$. Следовательно, при каждом $x \in \mathbb{R}^d$ существует $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)$.

Далее, для любых x и x_0 из $\mathbb{R}^d$

$$\left|\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right) - \mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}x_0\right)\right| = \left|\mathrm{M}\Big(u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right) - u\left(e^{t\mathbf{A}}x_0\right)\Big)\right| \leqslant \mathrm{M}\Big|u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right) - u\left(e^{t\mathbf{A}}x_0\right)\Big|. \tag{4.1}$$

При каждом $\omega \in \Omega$ функция $u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right)$ непрерывна на $\mathbb{R}^d$ как композиция непрерывных отображений u и $e^{t\mathbf{A}_\omega}$. Значит, $\left|u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right) - u\left(e^{t\mathbf{A}}x_0\right)\right|$ сходится поточечно на Ω к нулю при $x \to x_0$. При этом $\left|u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) - u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x_0\right)\right| \leqslant 2C$ при всех $\omega \in \Omega$ и $x \in \mathbb{R}^d$, где константа C ограничивает u на $\mathbb{R}^d$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть неравенства в (4.1) стремится к нулю при $x \to x_0$, поэтому к нулю стремится и левая часть неравенства в (4.1), откуда получаем непрерывность функции $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right)$ на $\mathbb{R}^d$.

Наконец, если B — замкнутый шар с центром в нулевом векторе, содержащий носитель функции u, то и носители функций $u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right)$ при всех $\omega \in \Omega$ содержатся в B, поэтому и носитель функции $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right)$ содержится в B. Итак, $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right)$ является непрерывной на $\mathbb{R}^d$ финитной функцией, т.е. $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right) \in C_0(\mathbb{R}^d)$. □

Теорема 4.1. *Отображение* $\mathbf{S}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}$ *со значениями* $\mathbf{S}_\omega\colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$, *задаваемыми по формулам*

$$\mathbf{S}_\omega(t)u(\cdot) = u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right) \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

где $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathbb{R}^d)$ — *случайная кососимметрическая матрица, является случайной сильно непрерывной унитарной операторной полугруппой, усреднение* $\mathrm{M}\mathbf{S}$ *которой является сильно непрерывной сжимающей операторнозначной функцией с* $(\mathrm{M}\mathbf{S})(0) = I$. *При этом если* $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$, *то* $(\mathrm{M}\mathbf{S})(t)u(\cdot) = \mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. **I**. Сначала проверим, что $\mathbf{S}_\omega \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ при всех $\omega \in \Omega$. Очевидно, что $\mathbf{S}_\omega$ является унитарной операторной полугруппой, поэтому согласно [10, p. 38] достаточно проверить только, что $\|\mathbf{S}_\omega(t)u - u\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{t\to 0+} 0$ для всех u из плотного подпространства $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутый шар с центром в нулевом векторе, содержащий носитель функции u, и пусть $|u(x)| \leqslant C$ на B. Тогда при всяком $t \geqslant 0$ и всяком $\omega \in \Omega$ носитель функции $u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right)$ также содержится в B, поскольку шар B инвариантен относительно ортогонального преобразования $e^{t\mathbf{A}_\omega}$, переводящего биективно носитель функции $u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right)$ в носитель функции u. Отсюда следует, что $\left|u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) - u(x)\right|^2 \leqslant 4C^2$ на B и $\left|u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) - u(x)\right|^2 = 0$ на $\mathbb{R}^d \setminus B$. Кроме того, в силу непрерывности функции u и матричной экспоненты $e^{t\mathbf{A}_\omega}$ как функции переменной t функция $u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right)$ сходится поточечно на $\mathbb{R}^d$ при $t \to 0+$ к u. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\|\mathbf{S}_\omega(t)u - u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int\limits_B \left|u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) - u(x)\right|^2 dx \xrightarrow{t\to 0+} 0 \qquad \forall u \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

что и требовалось.

II. Покажем теперь, что $\mathbf{S}(t)$ является случайным оператором при каждом $t \geqslant 0$. Для этого достаточно показать измеримость $\langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle$ при всех $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$ и $v \in \mathcal{H}$. Более того, покажем, что при таких u и v существует $\mathrm{M}\langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle \in \mathbb{C}$, причем

$$\mathrm{M}\langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle = \left\langle \mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right), v\right\rangle.$$

Итак, пусть $t \geqslant 0$, $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$ и $v \in \mathcal{H}$. Рассмотрим вектор-функцию

$$f_t\colon (\omega, x) \mapsto e^{t\mathbf{A}_\omega}x$$

на измеримом пространстве $\Omega \times \mathbb{R}^d$. Элементы случайной матрицы $e^{t\mathbf{A}}$ являются случайными величинами на Ω, поэтому компоненты вектор-функции f_t измеримы на $\Omega \times \mathbb{R}^d$ как конечные суммы произведений измеримых функций. Следовательно, f_t является измеримым отображением из $\Omega \times \mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$. При этом u непрерывна на $\mathbb{R}^d$, а v измерима на $\mathbb{R}^d$, поэтому функция

$$(u \circ f_t) \cdot \overline{v}\colon (\omega, x) \mapsto u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right)\overline{v(x)}$$

тоже измерима на $\Omega \times \mathbb{R}^d$.

Далее, поскольку

$$\mathrm{M}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)\right| |v(x)|\,dx\right) \leqslant \mathrm{M}\left\|\left(u\left(e^{t\mathbf{A}}x\right)\right)\right\|_{\mathcal{H}} \cdot \|v\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} < \infty,$$

то по теореме Тонелли функция $(u \circ f_t) \cdot \overline{v}$ интегрируема на $\Omega \times \mathbb{R}^d$. Следовательно, по теореме Фубини функция

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} u\big(f_t(\,\cdot\,, x)\big)\overline{v(x)}\,dx = \langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle$$

измерима на Ω, и существует $\mathrm{M}\langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle$. Учитывая, что по лемме 4.1 $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right) \in C_0(\mathbb{R}^d)$, снова по теореме Фубини получаем

$$\mathrm{M}\langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle = \left\langle \mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right), v\right\rangle,$$

что и требовалось.

III. Осталось подвести итоги и сделать заключительные выводы. Согласно доказанному в пунктах **I** и **II**, $\mathbf{S}$ является случайной сильно непрерывной унитарной операторной полугруппой. Тогда по следствию 2.2 $\mathbf{S}$ имеет усреднение $\mathrm{M}\mathbf{S}$, являющееся сильно непрерывной сжимающей операторнозначной функцией; $(\mathrm{M}\mathbf{S})(0) = I$, поскольку $\mathbf{S}_\omega(0) = I$ при всех $\omega \in \Omega$. При этом по доказанному в пункте **II**

$$\langle (\mathrm{M}\mathbf{S})(t)u, v\rangle = \mathrm{M}\langle \mathbf{S}(t)u, v\rangle = \left\langle \mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right), v\right\rangle \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall u \in C_0(\mathbb{R}^d) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Поскольку это равенство выполняется при всех $v \in \mathcal{H}$, то

$$(\mathrm{M}\mathbf{S})(t)u = \mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right) \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall u \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

что завершает доказательство теоремы 4.1. □

Поскольку функция $t \mapsto \sqrt{t}$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, то сильная непрерывность $\mathbf{S}_\omega$ влечет сильную непрерывность $\mathbf{T}_\omega\colon t \mapsto \mathbf{S}_\omega(\sqrt{t})$. Тогда из теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.1. *Отображение* $\mathbf{T}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}$ *со значениями* $\mathbf{T}_\omega\colon \mathbb{R}_+ \to B(\mathcal{H})$, *задаваемыми по формулам*

$$\mathbf{T}_\omega(t)u(\cdot) = u\left(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}(\cdot)\right) \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

где $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathbb{R}^d)$ — случайная кососимметрическая матрица, является случайной сильно непрерывной унитарной операторнозначной функцией, усреднение $\mathrm{M}\mathbf{T}$ которой является сильно непрерывной сжимающей операторнозначной функцией с $(\mathrm{M}\mathbf{T})(0) = I$. При этом если $u \in C_0(\mathbb{R}^d)$, то $(\mathrm{M}\mathbf{T})(t)u(\cdot) = \mathrm{M}u\left(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}(\cdot)\right) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при всех $t \geqslant 0$.

4.2. Производная усреднения в нуле. Исследуем теперь сильную производную в нуле усреднений $\mathrm{M}\mathbf{S}$ и $\mathrm{M}\mathbf{T}$. Для этого нам понадобится пространство $C_0^k(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}$ финитных k раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}^d$ функций. Так же как и $C_0(\mathbb{R}^d)$, это пространство всюду плотно в $\mathcal{H}$ (см. [13, стр. 291]).

Теорема 4.2. *Пусть $\mathrm{M}\mathbf{S}$ — операторнозначная функция из теоремы 4.1, и пусть существует $\mathrm{M}\mathbf{A} \in B(\mathbb{R}^d)$. Тогда для всякого $u \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ существует*

$$(\mathrm{M}\mathbf{S})'(0)u = \lim_{t\to 0+} \frac{(\mathrm{M}\mathbf{S})(t)u - u}{t} = \big(\nabla u, (\mathrm{M}\mathbf{A})x\big),$$

где предел понимается в смысле сходимости в $\mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть как и прежде $B \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутый шар с центром в нулевом векторе, содержащий носитель функции u. Поскольку u непрерывно дифференцируема и финитна, то существует $M_1 = \max\limits_{x\in B} |\nabla u(x)|$. При этом по формуле Тейлора для любых точек x и y шара B справедливо равенство

$$u(y) = u(x) + (\nabla u(x), y - x) + r_1(x, y) \cdot |y - x|, \tag{4.2}$$

где $r_1(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$|r_1(x, y)| \leqslant 2M_1 \qquad \forall x \in B \quad \forall y \in B, \tag{4.3}$$

$$\lim_{y\to x} r_1(x, y) = 0 \qquad \forall x \in B. \tag{4.4}$$

После подстановки $y = e^{t\mathbf{A}_\omega}x \in B$ в равенство (4.2) при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \geqslant 0$ получаем

$$u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) - u(x) = \left(\nabla u(x), e^{t\mathbf{A}_\omega}x - x\right) + r_1\left(x, e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) \cdot |e^{t\mathbf{A}_\omega}x - x|. \tag{4.5}$$

Согласно теореме 4.1, существует $\mathrm{M}u\left(e^{t\mathbf{A}}(\cdot)\right) = (\mathrm{M}\mathbf{S})(t)u \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, случайная матрица $e^{t\mathbf{A}}$ также имеет усреднение $\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}})$. Тогда остаточный член в правой части равенства (4.5) также имеет усреднение, являющееся при каждом $t \geqslant 0$ функцией пространства $C_0(\mathbb{R}^d)$. Поделив равенство (4.5) на t и перейдя к математическому ожиданию, получаем:

$$\frac{(\mathrm{M}\mathbf{S})(t)u(x) - u(x)}{t} = \left(\nabla u(x), \frac{\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}})x - x}{t}\right) + \mathrm{M}\left(r_1\left(x, e^{t\mathbf{A}}x\right) \cdot \left|\frac{e^{t\mathbf{A}}x - x}{t}\right|\right). \tag{4.6}$$

Покажем, что последнее слагаемое в правой части равенства (4.6) стремится в $\mathcal{H}$ к нулю при $t \to 0+$. Учитывая (4.3) и доказанную в утверждении 3.1 оценку $\|e^{t\mathbf{A}} - I\| \leqslant t\|\mathbf{A}\|$, получаем:

$$\left|r_1\left(x, e^{t\mathbf{A}}x\right)\right| \cdot \left|\frac{e^{t\mathbf{A}}x - x}{t}\right| \leqslant 2M_1 r_B \|\mathbf{A}\|, \tag{4.7}$$

где r_B — радиус шара B. Из существования $\mathrm{M}\mathbf{A}$ следует существование $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\|$, поэтому левая часть неравенства (4.7) при каждом $x \in B$ мажорируется интегрируемой случайной величиной. Кроме того, в силу (4.4) функция $r_1\left(x, e^{t\mathbf{A}}x\right)$ стремится поточечно на Ω к нулю при $t \to 0+$ при каждом $x \in B$, а $\frac{e^{t\mathbf{A}}x - x}{t}$ стремится к $\mathbf{A}x$, поэтому левая часть неравенства (4.7) стремится поточечно на Ω к нулю при $t \to 0+$ при каждом $x \in B$. Значит, по теореме

Лебега о мажорируемой сходимости последнее слагаемое в правой части равенства (4.6) стремится поточечно на B к нулю при $t \to 0+$. При этом из оценки (4.7) следует, что

$$\left| \mathrm{M} \left(r_1\big(x, e^{t\mathbf{A}}x\big) \cdot \left| \frac{e^{t\mathbf{A}}x - x}{t} \right| \right) \right| \leqslant 2M_1 r_B \mathrm{M}\|\mathbf{A}\| < \infty,$$

поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости последнее слагаемое в правой части равенства (4.6) стремится к нулю при $t \to 0+$ и в пространстве $\mathcal{H}$ (вне шара B это слагаемое тождественно нулевое).

Остается найти предел первого слагаемого в правой части (4.6). Для этого заметим, что в силу теоремы 3.1

$$\begin{aligned} \left| \left(\nabla u(x), \frac{\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}})x - x}{t} \right) - \big(\nabla u(x), (\mathrm{M}\mathbf{A})x\big) \right| &= \left| \left(\nabla u(x), \frac{\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}}) - I - t\mathrm{M}\mathbf{A}}{t} x \right) \right| \\ &\leqslant |\nabla u| \cdot |x| \cdot \left\| \frac{\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}}) - I - t\mathrm{M}\mathbf{A}}{t} \right\| \\ &\leqslant M_1 r_B \left\| \frac{\mathrm{M}(e^{t\mathbf{A}}) - I - t\mathrm{M}\mathbf{A}}{t} \right\| \xrightarrow{t\to 0+} 0, \end{aligned}$$

откуда следует равномерная на B сходимость (а, значит, и сходимость в $\mathcal{H}$) этого слагаемого к $\big(\nabla u, (\mathrm{M}\mathbf{A})x\big)$. □

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathrm{M}\mathbf{T}$ *— операторнозначная функция из следствия 4.1, и пусть существует* $\mathrm{M}(\mathbf{A}^2) \in B(\mathbb{R}^d)$, *причем* $\mathrm{M}\mathbf{A} = 0$. *Тогда для всякого* $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ *существует*

$$(\mathrm{M}\mathbf{T})'(0)u = \lim_{t\to 0+} \frac{(\mathrm{M}\mathbf{T})(t)u - u}{t} = \frac{1}{2}\big(\nabla u, \mathrm{M}(\mathbf{A}^2)x\big) - \frac{1}{2}\big(x, \mathrm{M}(\mathbf{A}H_u\mathbf{A})x\big), \tag{4.8}$$

где H_u *— матрица вторых частных производных функции* u *(матрица Гессе). Предел понимается в смысле сходимости в* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.2 рассмотрим $B \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутый шар с центром в нулевом векторе, содержащий носитель функции u. Пусть $M_1 = \max\limits_{x\in B} |\nabla u|$, $M_2 = \max\limits_{x\in B} \|H_u(x)\|$. Разложим u в шаре B по формуле Тейлора

$$u(y) = u(x) + \big(\nabla u(x), y - x\big) + \frac{1}{2}\big(y - x, H_u(x)(y - x)\big) + r_2(x, y) \cdot |y - x|^2, \tag{4.9}$$

где $r_2(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$|r_2(x, y)| \leqslant M_2 \qquad \forall x \in B \quad \forall y \in B, \tag{4.10}$$

$$\lim_{y\to x} r_2(x, y) = 0 \qquad \forall x \in B. \tag{4.11}$$

После подстановки $y = e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x \in B$ в равенство (4.9) при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \geqslant 0$ получаем

$$\begin{aligned} u\left(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x\right) - u(x) = \left(\nabla u(x), e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x - x\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x - x, H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x - x)\right) \\ + r_2\left(x, e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x\right) \cdot \left|e^{\sqrt{t}\mathbf{A}_\omega}x - x\right|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Согласно следствию 4.1, существует $\mathrm{M}u\left(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}(\cdot)\right) = (\mathrm{M}\mathbf{T})(t)u \in C_0(\mathbb{R}^d)$, а также существует $\mathrm{M}\big(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}\big) \in B(\mathbb{R}^d)$ при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, так как в силу утверждения 3.1

$$\left|\left(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x - x, H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x - x)\right)\right| \leqslant \|H_u(x)\| \cdot |x|^2 \cdot \left\|e^{\sqrt{t}\mathbf{A}} - I\right\|^2 \leqslant t\|H_u(x)\| \cdot |x|^2 \cdot \|\mathbf{A}\|^2,$$

а из существования $\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)$ следует интегрируемость случайной величины $\|\mathbf{A}\|^2$ на Ω, то существует и усреднение второго слагаемого правой части равенства (4.12); при этом, поскольку это слагаемое представляет собой сумму произведений координат вектора x и элементов матрицы Гессе $H_u(x)$, являющихся непрерывными функциями, на элементы случайной матрицы $e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I$, то после усреднения оно представляет собой при каждом $t\geqslant 0$ финитную непрерывную по x функцию. Из всего сказанного выше следует, что существует и усреднение остаточного члена в равенстве (4.12), являющееся при каждом $t\geqslant 0$ функцией пространства $C_0(\mathbb{R}^d)$. Поделив равенство (4.12) на t, переходя к математическому ожиданию и учитывая, что $\big(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I\big)^*=e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I$ в силу ортогональности матрицы $e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}$, получаем:

$$
\begin{aligned}
\frac{(\mathrm{M}\mathbf{T})(t)u(x)-u(x)}{t} &= \left(\nabla u(x), \frac{\mathrm{M}\big(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}\big)x-x}{t}\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(x, \frac{\mathrm{M}\Big((e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)\Big)x}{t}\right)\\
&+\mathrm{M}\left(r_2\big(x, e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x\big)\cdot\left|\frac{e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x-x}{\sqrt{t}}\right|^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Последовательно найдем предел каждого слагаемого в правой части (4.13) при $t\to 0+$. Пусть r_B — радиус шара B. Для первого слагаемого в силу теоремы 3.1 и условия $\mathrm{M}\mathbf{A}=0$ имеем

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\nabla u(x), \frac{\mathrm{M}\big(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}\big)x-x}{t}\right)-\frac{1}{2}\big(\nabla u(x), \mathrm{M}(\mathbf{A}^2)x\big)\right| &= \left|\left(\nabla u(x), \frac{\mathrm{M}(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}})-I-\frac{t}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)}{t}x\right)\right|\\
&\leqslant|\nabla u(x)|\cdot|x|\cdot\left\|\frac{\mathrm{M}(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}})-I-\frac{t}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)}{t}\right\|\\
&\leqslant M_1 r_B\left\|\frac{\mathrm{M}(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}})-I-\frac{t}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)}{t}\right\|\xrightarrow{t\to 0+}0,
\end{aligned}
$$

откуда следует равномерная на B сходимость (а, значит, и сходимость в $\mathcal{H}$) этого слагаемого к $\frac{1}{2}\big(\nabla u(x), \mathrm{M}(\mathbf{A}^2)x\big)$.

Для второго слагаемого заметим сначала, что с учетом утверждения 3.1

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left\|(e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)+t\mathbf{A}H_u(x)\mathbf{A}\right\|\\
&\leqslant\frac{1}{t}\left\|(e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)\big(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I-\sqrt{t}\mathbf{A}\big)\right\|+\frac{1}{t}\left\|\big(e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I+\sqrt{t}\mathbf{A}\big)H_u(x)\sqrt{t}\mathbf{A}\right\|\\
&\leqslant\frac{1}{t}\cdot\sqrt{t}\|\mathbf{A}\|\cdot\|H_u(x)\|\cdot 2\sqrt{t}\|\mathbf{A}\|+\frac{1}{t}\cdot 2\sqrt{t}\|\mathbf{A}\|\cdot\|H_u(x)\|\cdot\sqrt{t}\|\mathbf{A}\|\leqslant 4M_2\cdot\|\mathbf{A}^2\|.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Таким образом, левая часть неравенства (4.14) при каждом $x \in B$ мажорируется интегрируемой случайной величиной $4M_2\|\mathbf{A}^2\|$. С другой стороны, по тому же утверждению

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left\|(e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)+t\mathbf{A}H_u(x)\mathbf{A}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{t}\left\|(e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)\big(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I-\sqrt{t}\mathbf{A}\big)\right\|+\frac{1}{t}\left\|\big(e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I+\sqrt{t}\mathbf{A}\big)H_u(x)\sqrt{t}\mathbf{A}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{t}\cdot\sqrt{t}\|\mathbf{A}\|\cdot\|H_u(x)\|\cdot\frac{t}{2}\|\mathbf{A}^2\|+\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{2}\|\mathbf{A}^2\|\cdot\|H_u(x)\|\cdot\sqrt{t}\|\mathbf{A}\| \\
&\leqslant \sqrt{t}M_2\cdot\|\mathbf{A}^3\| \xrightarrow{t\to 0+} 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

т.е. левая часть неравенства (4.15) при каждом $x \in B$ сходится поточечно на Ω к нулю при $t \to 0+$. Тогда по утверждению 2.3

$$\frac{1}{t}\left\|\mathrm{M}\left((e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)\right)+t\mathrm{M}(\mathbf{A}H_u(x)\mathbf{A})\right\| \xrightarrow{t\to 0+} 0 \qquad \forall x \in B. \tag{4.16}$$

Пользуясь теперь оценкой (4.14), по утверждению 2.2 получаем на B

$$\begin{aligned}
&\left|\left(x, \frac{\mathrm{M}\left((e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)\right)x}{t}\right)+\big(x,\mathrm{M}(\mathbf{A}H_u(x)\mathbf{A})x\big)\right| \\
&\qquad=\left|\left(x,\frac{1}{t}\mathrm{M}\left((e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)+t\mathbf{A}H_u(x)\mathbf{A}\right)x\right)\right| \\
&\qquad\leqslant |x|^2\cdot\left\|\frac{1}{t}\mathrm{M}\left((e^{-\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)H_u(x)(e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}-I)+t\mathbf{A}H_u(x)\mathbf{A}\right)\right\| \leqslant 4M_2r_B^2\mathrm{M}\|\mathbf{A}^2\|<\infty,
\end{aligned}$$

поэтому из (4.16) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует сходимость в $\mathcal{H}$ второго слагаемого правой части равенства (4.13) к $-\frac{1}{2}\big(x,\mathrm{M}(\mathbf{A}H_u\mathbf{A})x\big)$.

Учитывая (4.10) и доказанную в утверждении 3.1 оценку $\|e^{t\mathbf{A}}-I\| \leqslant t\|\mathbf{A}\|$, получаем:

$$\left|r_2\big(x,e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x\big)\right|\cdot\left|\frac{e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x-x}{\sqrt{t}}\right|^2 \leqslant M_2r_B^2\|\mathbf{A}^2\|. \tag{4.17}$$

Поскольку случайная величина $\|\mathbf{A}^2\|$ интегрируема, то левая часть в (4.17) при каждом $x \in B$ мажорируется интегрируемой функцией. Кроме того, в силу (4.11) функция $r_2\big(x,e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x\big)$ стремится поточечно на Ω к нулю при $t \to 0+$ при каждом $x \in B$, а $\frac{e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x-x}{\sqrt{t}}$ стремится к $\mathbf{A}x$, поэтому левая часть в (4.17) стремится к нулю. Значит, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости последнее слагаемое в правой части равенства (4.13) стремится поточечно на B к нулю при $t \to 0+$. При этом из оценки (4.17) следует, что на B

$$\left|\mathrm{M}\left(r_2\big(x,e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x\big)\cdot\left|\frac{e^{\sqrt{t}\mathbf{A}}x-x}{\sqrt{t}}\right|^2\right)\right| \leqslant M_2r_B^2\mathrm{M}\|\mathbf{A}^2\|<\infty,$$

поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости последнее слагаемое в правой части равенства (4.13) стремится к нулю при $t \to 0+$ в пространстве $\mathcal{H}$. □

4.3. Дивергентная форма производной. Оператор (4.8) можно записать в дивергентной форме, если для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ и каждого $\omega \in \Omega$ ввести тензорное произведение $\mathbf{A}_\omega x \otimes \mathbf{A}_\omega x$, рассматриваемое в качестве билинейной формы на $\mathbb{C}^d$, действующей на пару векторов ξ, η по правилу

$$\left(\mathbf{A}_\omega x \otimes \mathbf{A}_\omega x\right)(\xi,\eta)=(\mathbf{A}_\omega x,\xi)(\mathbf{A}_\omega x,\eta).$$

Усреднение этого тензора вводится покомпонентно, как и в случае с операторами, т.е. под $\mathrm{M}\,(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)$ понимается тензор, действующий на пару векторов ξ,η по правилу

$$\mathrm{M}\,(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)\,(\xi,\eta)=\mathrm{M}\big((\mathbf{A}x,\xi)(\mathbf{A}x,\eta)\big).$$

Существование усреднения этого тензора следует из существования конечного $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\|^2$, что выполняется в силу условий теоремы 4.3.

В дальнейшем тензор $\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x$ будет удобно рассматривать как оператор из $\mathbb{C}^d$ в $\mathbb{C}^d$, который каждому вектору ξ ставит в соответствие вектор

$$(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)\,\xi=(\mathbf{A}x,\xi)\mathbf{A}x.$$

Заметим, что тогда для произвольной функции $u\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)\,\nabla u=\nabla\cdot\big((\mathbf{A}x,\nabla u)\mathbf{A}x\big)&=(\mathbf{A}^2x,\nabla u)+(\mathbf{A}x,H_u\mathbf{A}x)+(\mathbf{A}x,\nabla u)\operatorname{tr}\mathbf{A}\\&=\big(\nabla u,\mathbf{A}^2x\big)-\big(x,\mathbf{A}H_u\mathbf{A}x\big),\end{aligned}$$

где в последнем равенстве учтено, что $\operatorname{tr}\mathbf{A}=0$ и $(\mathbf{A}x,y)=-(x,\mathbf{A}y)$ в силу кососимметричности $\mathbf{A}$. Применяя теперь усреднение, пользуясь линейностью операторов $\mathbf{A}$, ∇, скалярного произведения и сравнивая с (4.8), приходим к выводу, что

$$(\mathrm{M}\mathbf{T})'(0)u=\frac{1}{2}\nabla\cdot\big(\mathrm{M}\,(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)\,\nabla u\big)\qquad\forall u\in C_0^2(\mathbb{R}^d).\tag{4.18}$$

4.4. Исследование производной в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Для краткости обозначим оператор (4.18) как $-\frac{1}{2}L$. Оператору L соответствует полуторалинейная форма

$$\begin{aligned}\langle Lu,v\rangle=-\int\limits_{\mathbb{R}^d}\nabla\cdot\big(\mathrm{M}\,(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)\,\nabla u\big)\overline{v}\,dx&=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(\mathrm{M}\,(\mathbf{A}x\otimes\mathbf{A}x)\,\nabla u,\overline{\nabla v}\Big)\,dx\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{M}\Big(\big(\mathbf{A}x,\nabla u\big)\big(\mathbf{A}x,\overline{\nabla v}\big)\Big)\,dx,\end{aligned}$$

где выше было произведено интегрирование по частям и использована финитность функций u и v. В частности,

$$\langle Lu,u\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{M}\big|\big(\mathbf{A}x,\nabla u\big)\big|^2\,dx\geqslant0,$$

т.е. оператор L является неотрицательным на $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ (и, следовательно, симметрическим). Однако он не является эллиптическим. Действительно, пусть $u(x)=v(|x|^2)$, где $v\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $\nabla u=2xv'(|x|^2)$, поэтому

$$\big(\mathbf{A}x,\nabla u\big)=2v'(|x|^2)(\mathbf{A}x,x)=0\qquad\forall\omega\in\Omega\quad\forall x\in\mathbb{R}^d$$

в силу кососимметричности $\mathbf{A}$. Значит, на таких функциях $\langle Lu,u\rangle=0$.

Причина заключается в вырождении оператора L вдоль радиального направления, что видно также и из определения этого оператора как производной $\mathrm{M}\mathbf{T}$: на функциях u, зависящих только от $|x|$, $(\mathrm{M}\mathbf{T})(t)u=u$ при любом t. Эти соображения приводят к выводу, что оператор L естественно рассматривать в полярных координатах и что в этих координатах он не должен содержать производных по $|x|$. Проверим это непосредственно.

Пусть $x=r\sigma$, где $r=|x|>0$, а $\sigma=\frac{x}{r}\in\mathbb{S}^{d-1}$, где $\mathbb{S}^{d-1}$ — $(d-1)$-мерная единичная сфера пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда $\nabla=\sigma\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}}$, где $\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}}$ — градиент на $\mathbb{S}^{d-1}$. Подставляя это в (4.18) и учитывая, что $(\mathbf{A}\sigma, \sigma) = 0$, получаем последовательно

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\left(\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x\right)\nabla u &= r^2 \mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\left(\sigma u'_r + \frac{1}{r}\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\right) \\
&= r^2 u'_r \mathrm{M}\big((\mathbf{A}\sigma, \sigma)\mathbf{A}\sigma\big) + r\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u \\
&= r\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u; \\
\nabla \cdot \big(\mathrm{M}\left(\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x\right)\nabla u\big) &= \left(\sigma \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}}\right) \cdot \big(r\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big) \\
&= \sigma \cdot \mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\big(r\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big)'_r + \nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} \cdot \big(\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big) \\
&= \mathrm{M}\Big((\mathbf{A}\sigma, \sigma)\Big(\mathbf{A}\sigma, \big(r\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big)'_r\Big)\Big) + \nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} \cdot \big(\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big) \\
&= \nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} \cdot \big(\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$L = -\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} \cdot \big(\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} u\big). \tag{4.19}$$

4.5. Исследование производной в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Заметим, что для всякой точки $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$ вектор $\mathbf{A}\sigma$ ортогонален σ и, потому, можно считать, что $\mathbf{A}\sigma$ принадлежит (комплексифицированному) касательному пространству $T_\sigma\mathbb{S}^{d-1}$ сферы $\mathbb{S}^{d-1}$ в точке σ. Следовательно, можно считать, что тензор $\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)$ действует в $T_\sigma\mathbb{S}^{d-1}$. При этом сферический градиент $\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}}$ является векторным оператором со значениями в $T_\sigma\mathbb{S}^{d-1}$ в каждой точке $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$. Таким образом, оператор L, представленный по формуле (4.19), является корректно определенным оператором на пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ с областью определения $C^2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Теорема 4.4. *Пусть случайная матрица* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Пусть, кроме того, существует такая константа* $\gamma > 0$, *что*

$$\mathrm{M}\big|\big(\mathbf{A}\sigma, \xi\big)\big|^2 \geqslant \gamma|\xi|^2 \qquad \forall\sigma \in \mathbb{S}^{d-1} \quad \forall\xi \in T_\sigma\mathbb{S}^{d-1}. \tag{4.20}$$

Тогда оператор L, *заданный на пространстве* $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ *по формуле (4.19), с областью определения* $C^2(\mathbb{S}^{d-1})$ *является существенно самосопряженным, а область определения его замыкания совпадает с пространством Соболева* $W_2^2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Доказательство. Аналогично сделанному выше устанавливается неотрицательность (и симметричность) оператора L, а условие (4.20) делает оператор L эллиптическим. Кроме того, коэффициенты формы $\mathrm{M}\left(\mathbf{A}\sigma \otimes \mathbf{A}\sigma\right)$ бесконечно дифференцируемы (в любой локальной системе координат) и ограничены числом $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\|^2$. Сфера $\mathbb{S}^{d-1}$ является компактным римановым многообразием. Итак, L — симметрический эллиптический оператор с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, заданный на пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ с областью определения $C^2(\mathbb{S}^{d-1})$, а для такого оператора согласно [14, p. 54] выполняется утверждение теоремы. □

Теорема 4.4 является ключевым результатом данного исследования: она дает условия, при которых производная усреднения случайной операторнозначной функции $\mathbf{T}(t) = \mathbf{S}(\sqrt{t})$ является существенно самосопряженным оператором и, следовательно, генератором некоторой сильно непрерывной операторной полугруппы. Из нее вытекает следующий итоговый результат статьи.

Следствие 4.2. *Пусть случайная матрица* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условиям теорем 4.3 и 4.4. Тогда операторнозначная функция* $\mathrm{M}\mathbf{T}$ *эквивалентна по Чернову сжимающей сильно непрерывной полугруппе, порождаемой замыканием оператора* $-\frac{L}{2}$, *где* L *задается формулой (4.19).*

Доказательство. По теореме 4.4 оператор L является неотрицательным и существенно самосопряженным. Тогда оператор $-\frac{L}{2} = (\mathrm{M}\mathbf{T})'(0)$ является неположительным существенно самосопряженным, поэтому его замыкание порождает сжимающую сильно непрерывную полугруппу. Остается применить теорему Чернова. □

Благодарности

Автор благодарит В.Ж. Сакбаева за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Furstenberg, H. Kesten. *Products of random matrices* // Ann. Math. Statist. **31**:2, 457–469 (1960).
2. H. Furstenberg. *Noncommuting random products* // Trans. Amer. Math. Soc. **108**:3, 377–428 (1963).
3. В.Н. Тутубалин. *О предельных теоремах для произведения случайных матриц* // Теория вероятн. и ее примен. **10**:1, 19–32 (1965).
4. В.И. Оселедец. *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем* // Труды Моск. Матем. Общества. **19**, 179–210 (1968).
5. А.В. Скороход. *Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы* // Успехи матем. наук. **37**:6, 157–183 (1982).
6. В.Ж. Сакбаев. *О законе больших чисел для композиций независимых случайных полугрупп* // Изв. вузов. Матем. **10**, 86–91 (2016).
7. V.Zh. Sakbaev. *Averaging of random flows of linear and nonlinear maps* // J. Phys. Conf. Ser. **990**, 012012 (2018).
8. Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп* // Труды МИАН. **306**, 210–226 (2019).
9. К.Ю. Замана, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов. *Случайные процессы на группе ортогональных матриц и описывающие их эволюционные уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **60**:10, 1741–1756 (2020).
10. K.J. Engel, R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (2000).
11. P. Chernoff. *Note on product formulas for operator semigroups* // J. Funct. Anal. **2**:2, 238–242 (1968).
12. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. *Действительный и функциональный анализ: Университетский курс.* М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ (2009).
13. В.И. Богачев. *Основы теории меры. Т. 1.* М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ (2003).
14. M.A. Shubin. *Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds* // Méthodes semi-classiques Volume 1 - École d'Été (Nantes, juin 1991), Astérisque, **207**, 35–108 (1992).

Константин Юрьевич Замана,
Московский физико-технический институт,
Институтский пер., 9,
141701, г. Долгопрудный, Россия
E-mail: zamana.kyu@phystech.edu