

УДК 517.95, 517.956.6

## О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО И НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЖЕННОЙ ЧАСТЬЮ

Б.И. ИСЛОМОВ, О.Х. АБДУЛЛАЕВ

**Аннотация.** Данная работа посвящена доказательству однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральным условием склеивания для одного класса уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором, включающим дробную производную Капуто и нелинейное слагаемое, содержащее след решения  $u(x, 0)$ . Так как рассматриваемое уравнение является уравнением третьего порядка, в котором дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами  $a$ ,  $b$  и  $c$  действует на параболо-гиперболический оператор второго порядка, на корректную постановку краевых задач существенное влияние оказывают коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Поэтому, перед тем как приступить к полной формулировке исследуемых задач, приведем краевые условия в их постановке для различных случаев поведения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

В первой части данной работы сформулирована нелокальная задача (т.е. задача I.) с интегральным условием склеивания, в случае  $0 < b/a \leq 1$ . Исследование этой задачи эквивалентным образом сводится к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра и доказывается однозначная разрешимость методом последовательных приближений. Вторая часть работы посвящена корректной постановке и изучению других нелокальных задач, корректные постановки которых тесно связаны с другими возможными случаями  $a$  и  $b$ . Излагается подробное исследование нелокальной задачи II. Далее, в виде замечаний описываются ход исследования других поставленных задач.

**Ключевые слова:** параболо-гиперболический оператор, дробная производная Капуто, нелинейное нагруженное слагаемое, интегральное условие склеивания, нелинейное интегральное уравнение.

**Mathematics Subject Classification:** 35M10, 34K37, 35R11

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega$  – односвязная область, ограниченная при  $y > 0$  сегментами  $BB_0$ ,  $B_0A_0$ ,  $A_0A$  (соответственно на прямых  $x = 1$ ,  $y = h$ ,  $x = 0$ ) и при  $y < 0$  характеристиками

$$\begin{aligned} AC : \quad x + y &= 0, \\ BC : \quad x - y &= 1 \end{aligned}$$

уравнения

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) Lu = 0, \tag{1.1}$$

---

B.I. ISLOMOV, O.KH. ABDULLAEV, ON NON-LOCAL PROBLEMS FOR THIRD ORDER EQUATION WITH CAPUTO OPERATOR AND NON-LINEAR LOADED PART.

© Исломов Б.И., Абдуллаев О.Х. 2021.

Поступила 1 июля 2020 г.

где  $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ;  $a$ ,  $b$  и  $c$  – действительные постоянные, причем  $a^2 + b^2 \neq 0$ ,

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - {}_c D_{0y}^\alpha u + f_1(x, y; u(x, 0)), & (x, y) \in \Omega_1, \\ L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_2(x, y; u(x, 0)), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

${}_c D_{ay}^\alpha$  – дифференциальный оператор Капуто порядка  $(0 < \alpha < 1)$  [1], [2]:

$${}_c D_{0y}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t) dt \quad (1.2)$$

и

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}.$$

Хорошо известно, что локальные задачи для уравнения (1.1) с непрерывными и разрывными условиями склеивания при  $f_i(x, y; u(x, 0)) = 0$  и  $\alpha = 1$ , были исследованы в работе [3]. А для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором целого порядка, включающего линейные нагруженные части, исследованы только локальные задачи с непрерывным условием склеивания (см. [4], [5]). Хотелось бы отметить, что методы, использованные в работах Т.Д. Джураева [3] и У.И. Балтаевой [4], [5], не достаточны для уравнения (1.1) при  $f_i(x, y; u(x, 0)) \neq 0$  и  $0 < \alpha < 1$ . Это больше связано с оператором дробного дифференцирования (в нашем случае с оператором Капуто), а получаемые интегральные уравнения и методы их исследования, связаны с нелинейной частью рассматриваемого уравнения.

Локальные и нелокальные задачи с непрерывными и интегральными условиями склеивания для нагруженных параболо-гиперболических уравнений второго порядка, содержащие различные операторы как Капуто, Римана – Лиувилля и др., были исследованы в работах [6]–[8].

Отметим, что вышеизложенные уравнения описывают некоторые проблемы оптимального управления, регулирования этикет грунтовых вод и влажность почвы, подземных жидкостей и газодинамики, математической биологии, экономики, экологии и чистой математики [9]–[12]. Более того, краевые задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями встречаются в различных областях механики, физики, биологии, биотехнологии и др. (см. [13]–[15]).

Сначала, приведем некоторые условия, необходимые для постановки задач, связанных с возможными случаями коэффициентов  $a$ ,  $b$ :

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.3)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.4)$$

$$u_{xx}(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dx} u(\theta(x)) = a_1(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_x(x, -0) + a_3(x)u(x, 0) + a_4(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (1.8)$$

где  $n$  – внутренняя нормаль,  $\theta(x) = \theta\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$ ,  $\varphi_j(y)$ ,  $a_j(x)$  ( $j = \overline{1, 4}$ ),  $\psi_i(x)$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) – заданные функции.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Определение 2.1.** Функция  $u(x, y)$  называется регулярным решением уравнения (1.1), если она имеет непрерывные производные, входящие в оператор  $Lu$ , более того  $Lu \in C^1(\Omega \setminus AB)$ .

**Задача I.** Найти регулярное решение  $u(x, y)$  уравнения (1.1) в области  $\Omega \setminus AB$  со следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2} \setminus \overline{BC})$ ,  $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0)$ ;
- 2)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7);
- 3) имеет место интегральное условие склеивания:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} {}_c D_{0y}^\alpha u(x, y) = & \lambda_1(x)u_y(x, -0) + \lambda_2(x)u_x(x, -0) + \lambda_3(x)u(x, -0) \\ & + \lambda_4(x) \int_0^x r(t)u(t, 0)dt + \lambda_5(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\lambda_i(x)$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) – заданные функции, причем

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i^2(x) \neq 0.$$

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ I.

Обозначим,

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда, уравнение (1.1) мы можем переписать в виде двух систем:

$$\begin{cases} u_{1xx} - {}_c D_{0y}^\alpha u_1 + f_1(x, y; u_1(x, 0)) = v_1(x, y), \\ av_{1x} + bv_{1y} + cv_1 = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_1 \quad (3.1)$$

и

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} + f_2(x, y; u_2(x, 0)) = v_2(x, y), \\ av_{2x} + bv_{2y} + cv_2 = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (3.2)$$

где  $v_i(x, y) \in C^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$  – достаточно гладкие функции.

Пусть  $0 < b/a \leq 1$ , тогда, предполагая  $a > 0$ ,  $b > 0$ , получим

$$0 < b \leq \frac{b+a}{2}, \quad 0 \leq bx - ay \leq \frac{b+a}{2}, \quad (x, y) \in \Omega_2.$$

Отметим, что общее решение уравнения

$$av_{ix} + bv_{iy} + cv_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

имеет вид:

$$v_i(x, y) = w_i(bx - ay) \exp \left[ -\frac{c}{2ab}(bx + ay) \right], \quad (3.3)$$

где  $w_i(bx - ay)$ , ( $i = 1, 2$ ) – произвольные непрерывно-дифференцируемые функции.

На основе (3.3) вместе с (3.1) и (3.2) будем рассматривать следующие уравнения:

$$u_{1xx} - {}_c D_{0y}^\alpha u_1 + f_1(x, y; u_1(x, 0)) = w_1(bx - ay) \exp \left( -\frac{c}{2ab}(bx + ay) \right), \quad (3.4)$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} + f_2(x, y; u_2(x, 0)) = w_2(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right). \quad (3.5)$$

Легко заметить, что решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными данными  $u(x, -0) = \tau(x)$ ,  $u_y(x, -0) = \nu^-(x)$  в области  $\Omega_2$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = & \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu^-(t) dt \\ & - \frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} d\xi \int_{\xi}^{x-y} f_2\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}; \tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right) d\eta \\ & + \frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} d\xi \int_{\xi}^{x-y} w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right) \exp\left(\frac{-c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\eta\right)\right) d\eta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая  $(u_x + u_y)|_{AC} = \sqrt{2}\psi_1(x)$ , воспользовавшись условиями (1.6) и (1.7), из (3.6) соответственно, находим:

$$\begin{aligned} (2a_1(x) + 1)\nu^-(x) = & (1 - 2a_2(x))\tau'(x) - \frac{1}{2} \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right) d\xi - 2a_3(x)\tau(x) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}x\right) e^{\frac{-c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}x\right)} d\xi - 2a_4(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

и

$$w_2(x) = \left(f_2\left(\frac{x}{a+b}, -\frac{x}{a+b}; \tau\left(\frac{x}{a+b}\right)\right) - \sqrt{2}\psi_1'\left(\frac{x}{a+b}\right)\right) e^{\frac{c(b-a)x}{2ab(a+b)}}. \quad (3.8)$$

С другой стороны, в силу (1.4) и учитывая

$${}_c D_{0y}^\alpha u_1(0, y) = {}_c D_{0y}^\alpha \varphi_1(y), \quad \tau(0) = \varphi_1(0)$$

при  $x \rightarrow +0$ , из (3.4) следует, что

$$w_1(-ay) = [\varphi_3(y) - {}_c D_{0y}^\alpha \varphi_1(y) + f_1(0, y; \varphi_1(0))] \exp\left(\frac{cy}{2b}\right),$$

т.е.

$$w_1(y) = \left(\varphi_3\left(\frac{-y}{a}\right) - {}_c D_{0y}^\alpha \varphi_1\left(\frac{-y}{a}\right) + f_1\left(0, -\frac{y}{a}; \varphi_1(0)\right)\right) \exp\left(-\frac{cy}{2ab}\right). \quad (3.9)$$

### 3.1. Основной результат.

**Теорема 3.1.** *Если выполнены условия:*

$$\varphi_1(y) \in C^2(0, h) \cap C^1[0, h], \quad \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C^1(0, h) \cap C[0, h]; \quad (3.10)$$

$$a_j(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad \lambda_j(x), \lambda_5(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1), \quad j = 1, 4; \quad (3.11)$$

$$\psi_1(x) \in C^2\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap C^1\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f_i(x, y; u(x, 0)) \in C(\bar{\Omega}_i) \cap C^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2; \quad (3.12)$$

$$|f_i(x, y; \tau_1(x)) - f_i(x, y; \tau_2(x))| \leq L_i |\tau_1(x) - \tau_2(x)|, \quad i = 1, 2, \quad (3.13)$$

где  $L_i = \text{const} > 0$ ,  $i = 1, 2$ , то решение задачи I существует и единственно.

*Доказательство.* В силу обозначений,

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu^-(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} {}_c D_{0y}^\alpha u = \nu^+(x) \quad (3.14)$$

при  $y \rightarrow +0$  из (3.4) с учетом условия склеивания (2.1), имеем

$$\begin{aligned} \tau''(x) - \lambda_1(x)\nu^-(x) - \lambda_2(x)\tau'(x) - \lambda_3(x)\tau(x) - \lambda_4(x) \int_0^x r(t)\tau(t)dt \\ + f_1(x, 0; \tau(x)) = w_1(bx)e^{-\frac{cx}{2a}} + \lambda_5(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Учитывая (3.7), из (3.15) после несложных упрощений, при  $2a_1(x) + 1 \neq 0$  получим:

$$\begin{aligned} \tau''(x) + A_1(x)\tau'(x) + B_1(x)\tau(x) + C_1(x) \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right) d\xi \\ + f_1(x, 0; \tau(x)) + \lambda_4(x) \int_0^x r(t)\tau(t)dt = f(x), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(x) &= -2C_1(x)(2a_2(x) - 1) + \lambda_2(x), \\ B_1(x) &= -4C_1(x)a_3(x) + \lambda_3(x), \\ C_1(x) &= \frac{-\lambda_1(x)}{2(1 + 2a_1(x))}, \\ f(x) &= -\frac{\lambda_1(x)}{2(1 + 2a_1(x))} \int_0^x w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}x\right) e^{\frac{-c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}x\right)} d\xi \\ &\quad - \frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1 + 2a_1(x)} + w_1(bx)e^{-\frac{cx}{2a}} + \lambda_5(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Предполагая  $a \neq b$  и вводя замену  $\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}x = t$ , функцию  $f(x)$  можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda_1(x)}{(a-b)(1 + 2a_1(x))} \int_{\frac{b+a}{2}x}^{bx} w_2(t) e^{\frac{c(a+b)}{2ab(a-b)}t + \frac{c}{b-a}x} dt \\ &\quad - \frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1 + 2a_1(x)} + w_1(bx)e^{-\frac{cx}{2a}} + \lambda_5(x). \end{aligned}$$

Далее, учитывая (3.8) после некоторых упрощений окончательно имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(a+b)\lambda_1(x)}{(a-b)(1 + 2a_1(x))} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{bx}{a+b}} e^{\frac{c(2t-x)}{(a-b)}} \left( f_2(t, -t; \tau(t)) - \sqrt{2}\psi'_1(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1 + 2a_1(x)} + w_1(bx)e^{-\frac{cx}{2a}} + \lambda_5(x). \end{aligned}$$

Учитывая

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \sqrt{2}\psi_1(0) - \varphi'_1(0) \quad (3.18)$$

и дважды интегрируя (3.16) по  $x$  от 0 до  $x$ , получим

$$\begin{aligned}
\tau(x) &+ \int_0^x [(x-t)(B_1(t) - A_1'(t)) + A_1(t)]\tau(t)dt + \int_0^x \tau(t)dt \int_t^x r(t)(x-z)\lambda_4(z)dz \\
&+ \int_0^x (x-t)f_1(t, 0; \tau(t))dt + 2 \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{t/2}^t f_2(s, s-t; \tau(s))ds \\
&- \frac{2(a+b)}{a-b} \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{t/2}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} f_2(s, -s; \tau(s))ds = \int_0^x (x-t) \left( w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}} + \lambda_5(t) \right) dt \\
&- \frac{2\sqrt{2}(a+b)}{a-b} \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{t/2}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} \psi_1'(s)ds + x(\varphi_1(0)A_1(0) + \sqrt{2}\psi_1(0) - \varphi_1'(0)) \\
&+ \psi_1(0) - \int_0^x (x-t) \frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)} dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= 2 \int_0^x (x-t) \left( \frac{(a+b)}{a-b} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} f_2(s, -s; \tau(s))ds - \int_{\frac{t}{2}}^t f_2(s, s-t; \tau(s))ds \right) C_1(t)dt \\
&- \int_0^x K_1(x, t)\tau(t)dt - \int_0^x (x-t)f_1(t, 0; \tau(t))dt + f^*(x),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1(x, t) &= (x-t)(B_1(t) - A_1'(t)) + A_1(t) + r(t) \int_t^x (x-z)\lambda_4(z)dz, \\
f^*(x) &= \int_0^x (x-t) \left( w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}} - \frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)} + \lambda_5(t) \right) dt + x(\varphi_1(0)A_1(0) + \sqrt{2}\psi_1(0) - \varphi_1'(0)) \\
&- \frac{2\sqrt{2}(a+b)}{a-b} \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{t/2}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} \psi_1'(s)ds + \psi_1(0).
\end{aligned}$$

В силу (3.10)–(3.12), из последнего имеем:

$$\|K_1(x, t)\|_C \leq M, \quad 0 \leq t \leq x \leq 1; \quad \|f^*(x)\|_C \leq f_0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.20}$$

где  $M, f_0 = \text{const} > 0$ . Учитывая неравенства

$$\|f_i(x, y; \tau(x))\|_C \leq f_{0i}, \quad \|C_1(x)\|_C \leq c_0$$

и предполагая  $\tau_0(x) = f^*(x)$ , из

$$\begin{aligned} \tau_n(x) = & \frac{2(a+b)}{a-b} \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{bt}{a+b}} e^{\frac{c(2s-t)}{a-b}} f_2(s, -s; \tau_{n-1}(s))ds \\ & - 2 \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{\frac{t}{2}}^t f_2(s, s-t; \tau_{n-1}(s))ds \\ & - \int_0^x K_1(x, t)\tau_{n-1}(t)dt - \int_0^x (x-t)f_1(t, 0; \tau_{n-1}(t))dt + f^*(x), \end{aligned} \quad (3.21)$$

получим

$$\|\tau_1(x) - \tau_0(x)\|_C \leq x \cdot c_{01}, \quad (3.22)$$

где  $f_0, c_0, c_{01} = \text{const} > 0$ , причем

$$c_{01} = \frac{1}{4} \cdot \max \left\{ \frac{(a+b)c_0 f_{02}}{a-b}; \frac{c_0 f_{02}}{3}; M f_0; \frac{f_{01}}{2} \right\}.$$

Далее, в силу (3.13) с учетом (3.22), из (3.21) находим:

$$\begin{aligned} \|\tau_2(x) - \tau_1(x)\|_C & \leq x^2 \cdot c_{11} + x^3 \cdot c_{12} + x^4 \cdot c_{13} \leq \frac{x^2}{2!} \cdot c_{01}m; \\ \|\tau_3(x) - \tau_2(x)\|_C & \leq \frac{x^3}{3!} \cdot c_{21} + \frac{x^4}{4!} \cdot c_{22} + \frac{x^5}{5!} \cdot c_{23} \leq \frac{x^3}{3!} \cdot c_{01}m^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} & = c_{01} \cdot \frac{M}{2}, \quad c_{12} = c_{01} \cdot \frac{L_1}{6}, \quad c_{13} = c_{01} \cdot \frac{c_0 L_2 (2a+b)}{a-b}, \\ c_{21} & = m \cdot c_{11}, \quad c_{22} = m \cdot c_{12}, \quad c_{23} = m \cdot c_{13}, \\ m & = \frac{1}{3} \cdot \max \left\{ \frac{M}{2}; \frac{L_1}{6}; \frac{c_0 L_2 (2a+2)}{a-b} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\|\tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)\|_C \leq c_{01}m^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n!}. \quad (3.23)$$

На основе (3.23) заключаем, что уравнение (3.19) имеет сжатый оператор, более того имеется единственная неподвижная точка этого оператора. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (3.19) имеет единственное решение в классе  $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ .  $\square$

**Замечание 3.1.** Если  $a = b$ , то учитывая (см. (3.17))

$$f(x) = \frac{a\lambda_1(x)}{c(1+2a_1(x))} w_2(ax) \left( e^{\frac{-cx}{2a}} - 1 \right) - \frac{\lambda_1(x)a_4(x)}{1+2a_1(x)} + w_1(ax)e^{\frac{-cx}{2a}} + \lambda_5(x)$$

и

$$w_2(x) = f_2\left(\frac{x}{2a}, -\frac{x}{2a}; \tau\left(\frac{x}{2a}\right)\right) - \sqrt{2}\psi'_1\left(\frac{x}{2a}\right),$$

из (3.16) аналогично получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\tau(x) = \frac{4a}{c} \int_0^{\frac{x}{2}} (x-2t)C_1(2t) \left( e^{\frac{-ct}{a}} - 1 \right) f_2(t, -t; \tau(t))dt - 2 \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{t/2}^t f_2(s, s-t; \tau(s))ds$$

$$- \int_0^x K_1(x, t)\tau(t)dt - \int_0^x (x-t)f_1(t, 0; \tau(t))dt + f_1^*(x),$$

где

$$f_1^*(x) = x(\varphi_1(0)A_1(0) + \sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi_1'(0)) + \int_0^x (x-t) \left( w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}} + \lambda_5(t) - \frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)} \right) dt \\ - \frac{4\sqrt{2}a}{c} \int_0^{\frac{x}{2}} (x-2t)C_1(2t) \left( e^{-\frac{ct}{a}} - 1 \right) \psi_1'(t)dt + \psi_1(0).$$

Далее,  $\nu^-(x)$  можно будет найти из (3.7), и следовательно, решение исследуемой задачи в области  $\Omega_2$  восстанавливается как решение задачи Коши (см. (3.6)).

**Замечание 3.2.** В случаях  $2a_1(x) + 1 = 0$ ,  $2a_2(x) - 1 \neq 0$  и  $2a_1(x) + 1 = 0$ ,  $a_3(x) \neq 0$  неизвестная функция  $\tau(x)$  определяется как решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, которое следует из (3.7).

Решение исследуемой задачи в области  $\Omega_2$  восстанавливается аналогично (см. (3.6)), а в области  $\Omega_1$  как решение первой краевой задачи для уравнения (3.4) [16]:

$$u_1(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y, 0, \eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y, 1, \eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^1 G_0(x, \xi, y)\tau(\xi)d\xi \\ - \int_0^y \int_0^1 G(x, y, \xi, \eta) \left( \omega_1(b\xi - a\eta)e^{-\frac{c(b\xi+a\eta)}{2ab}} - f_1(\xi, \eta; \tau(\xi)) \right) d\xi d\eta, \quad (3.24)$$

где  $\omega_1(\cdot)$  определяется из (3.9) и

$$G_0(x, \xi, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \eta^{-\alpha} G(x, y, \xi, \eta)d\eta, \\ G(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e_{1, \frac{\alpha}{2}}^{1, \frac{\alpha}{2}} \left( -\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) - e_{1, \frac{\alpha}{2}}^{1, \frac{\alpha}{2}} \left( -\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right]$$

функция Грина первой краевой задачи,

$$e_{1, \delta}^{1, \delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\delta - \delta n)}$$

функция типа Райта [16].

Следует отметить, что в случаях  $2a_1(x) + 1 = 0$ ,  $2a_2(x) - 1 \neq 0$  и  $2a_1(x) + 1 = 0$ ,  $a_3(x) \neq 0$ , сначала определяется  $\nu^+(x)$  из решения первой краевой задачи (см. (3.24)), потом, воспользовавшись условием склеивания, находится  $\nu^-(x)$  при  $\lambda_1(x) \neq 0$ .

#### 4. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С УСЛОВИЕМ НА $a$ и $b$

**Задача II.** Найти регулярное решение  $u(x, y)$  уравнения (1.1) в области  $\Omega \setminus AB$  со следующими свойствами:

1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$ ,  $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0)$ ;

2)  $u(x, y)$  удовлетворяет всем условиям **задачи I** и (1.8) для  $1 < b/a < +\infty$ .

**Замечание 4.1.** Для корректной постановки задачи подбираются необходимые условия для определения неизвестной функций  $w_i(bx - ay)$ ,  $i = 1, 2$ , которые по аргументу полностью охватывают рассматриваемую область при соответственных условиях на коэффициенты  $a$  и  $b$ . С этой целью, в случае Задачи II включено дополнительное условие (1.8).

**Задача III.** Требуется определить регулярное решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$ ,  $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0)$  в (1.1) в области  $\Omega \setminus AB$ , удовлетворяющее всем условиям **задачи II**, при этом, (1.4) меняется на (1.5), для  $-\infty < b/a < -1$ .

**Задача IV.** Требуется определить регулярное решение

$$u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_2 \setminus \overline{AC}), \quad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0)$$

из уравнения (1.1) в области  $\Omega \setminus AB$ , удовлетворяющее всем условиям задачи III кроме (1.7) для  $-1 \leq b/a < 0$ .

**Замечание 4.2.** Учитывая условия на коэффициенты  $a$  и  $b$ , для корректности задач III и IV условие для определения неизвестных функций  $w_i(bx - ay)$ ,  $i = 1, 2$ , в отличие от задач I и II ставится на отрезке  $x = 1$ .

**4.1. Исследование задачи II.** Пусть  $1 < b/a < +\infty$ , тогда предполагая  $a > 0$  и  $b > 0$ , имеем  $b > (a + b)/2$ , следовательно

$$0 \leq bx - ay \leq \frac{b+a}{2}, \quad (x, y) \in \Omega_{21}, \quad (4.1)$$

$$\frac{b+a}{2} \leq bx - ay \leq b, \quad (x, y) \in \Omega_{22}. \quad (4.2)$$

Здесь  $\Omega_{21}$  и  $\Omega_{22}$  – характеристические треугольники  $ABE$  и  $BCE$  соответственно, где  $E = E\left(\frac{b+a}{2b}, 0\right)$ , причем  $\Omega_{21} \cup CE \cup \Omega_{22} = \Omega_2$ .

Пусть имеет место неравенство (4.1), тогда из решения (3.6), применяя (1.6) и (1.7), соответственно находим функциональное соотношение (3.7) и  $\omega_{21}(x)$  (см. (3.8)):

$$w_{21}((a+b)x) = e^{\frac{c(b-a)x}{2ab}} \left( f_2(x, -x; \tau(x)) - \sqrt{2}\psi'_1(x) \right). \quad (4.3)$$

В случае (4.2), пользуясь условием (1.8) и учитывая  $(u_y - u_x)|_{BC} = \sqrt{2}\psi_2(x)$  из (3.6), находим  $w_{22}(x)$ :

$$w_{22}((b-a)x + a) = e^{\frac{c}{2ab}((b+a)x-a)} \left( \sqrt{2}\psi'_2(x) + f_2(x, x-1; \tau(x)) \right). \quad (4.4)$$

Следует отметить, что

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{21}(x), & 0 \leq x \leq \frac{a+b}{2}; \\ w_{22}(x), & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases} \quad (4.5)$$

должна быть непрерывной для всех  $0 < x < b$ . Легко можем убедиться, что

$$w_{21}\left(\frac{a+b}{2}\right) = w_{22}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

при

$$\psi'_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\psi'_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

В силу (4.5) и (3.7), из (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \Phi(x, \tau(x)) - 2 \int_0^x (x-t)C_1(t)dt \int_{t/2}^t f_2(s, s-t; \tau(s))ds \\ & - \int_0^x K_1(x, t)\tau(t)dt - \int_0^x (x-t)f_1(t, 0; \tau(t))dt + g^*(x), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, \tau(x)) = & \frac{2}{a-b} \int_0^{\frac{a+b}{2}} w_{21}(z)K_2(x, z)dz \\ & + \frac{2}{a-b} \int_{\frac{a+b}{2}}^{bx} w_{22}(z)e^{-\frac{c(a+b)z}{2ab(b-a)}} dz \int_{z/2}^x (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}} dt, \\ K_2(x, z) = & \begin{cases} e^{-\frac{c(a+b)z}{2ab(b-a)}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{2z}{b+a}} (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}} dt, & 0 \leq z \leq \frac{a+b}{2}x; \\ e^{-\frac{c(a+b)z}{2ab(b-a)}} \int_{z/2}^x (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}} dt, & \frac{a+b}{2}x \leq z \leq \frac{a+b}{2}, \end{cases} \\ g^*(x) = & \int_0^x (x-t) \left( w_1(bt)e^{-\frac{ct}{2a}} + \lambda_5(t) - \frac{\lambda_1(t)a_4(t)}{1+2a_2(t)} \right) dt \\ & + x(\varphi_1(0)A_1(0) + \sqrt{2}\psi_3(0) - \varphi'_1(0)) + \psi_1(0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в (4.7), получим

$$\begin{aligned} \Phi(x, \tau(x)) = & \frac{2}{a-b} \int_0^{\frac{a+b}{2}} e^{\frac{c(b-a)z}{2ab(a+b)}} f_2\left(\frac{z}{a+b}, -\frac{z}{a+b}; \tau\left(\frac{z}{a+b}\right)\right) K_2(x, z)dz \\ & + \frac{2}{a-b} \int_{\frac{a+b}{2}}^{bx} e^{\frac{-c}{b-a}z} f_2\left(\frac{z-a}{b-a}, \frac{z-a}{b-a} - 1; \tau\left(\frac{z-a}{b-a}\right)\right) dz \int_{z/2}^x (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}} dt \\ = & \frac{2(a+b)}{a-b} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c(b-a)z}{2ab}} f_2(z, -z; \tau(z)) K_2(x, z(a+b))dz \\ & - 2e^{\frac{-c}{b-a}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{bx-a}{b-a}} f_2(z, z-1; \tau(z)) dz \int_{\frac{z(b-a)+a}{2}}^x (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}} dt. \end{aligned}$$

Более того, учитывая

$$\left\| \int_{\frac{z(b-a)+a}{2}}^x (x-t)C_1(t)e^{\frac{ct}{2(b-a)}} dt \right\|_C \leq const \quad \text{и} \quad \|K_2(x, z)\|_C \leq const,$$

выводим, что

$$\|\Phi(x, \tau(x))\|_C \leq m_1 \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} f_2(z, -z; \tau(z)) dz \right\|_C + m_2 \left\| \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{bx-a}{b-a}} f_2(z, z-1; \tau(z)) dz \right\|_C,$$

где  $m_1, m_2 = const > 0$ .

В силу (3.13) и второго условия (3.12), также предполагая  $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ , получим:

$$\|\Phi(x, \tau(x))\|_C \leq \frac{bx-a}{b-a} \cdot const;$$

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, \tau_{n-1}(x)) - \Phi(x, \tau_{n-2}(x))\|_C &\leq mL_2 \left\| \int_0^{\frac{bx-a}{b-a}} |\tau_{n-1}(z) - \tau_{n-2}(z)| dz \right\|_C \\ &\leq \frac{m_0 L_2}{n!} \left( \frac{bx-a}{b-a} \right)^n \cdot const. \end{aligned}$$

Далее, учитывая  $x < \frac{bx-a}{b-a}$  при  $b > a$ , аналогичными рассуждениями для уравнения (4.6), выводим:

$$\|\tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)\|_C \leq \frac{(bx-a)^n}{(b-a)^n n!} \cdot const.$$

Таким образом, заключаем, что уравнение (4.6) однозначно разрешимо как нелинейное интегральное уравнение Вольтерра.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Если имеют место все условия Теоремы 3.1 и*

$$\psi_2(x) \in C^2\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap C^1\left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

то задача II однозначно разрешима.

**Замечание 4.3.** При исследовании задачи II неизвестную функцию  $\tau(x)$ , можно определить как решение нелинейного интегрального уравнения при  $2a_1(x) + 1 = 0$ ,  $2a_2(x) - 1 \neq 0$ , или  $2a_1(x) + 1 = 0$ ,  $a_3(x) \neq 0$ , точно также, как и в задаче I.

**Замечание 4.4.** Исследования задач III и IV редуцируются к задаче Коши для уравнения (3.16) с начальными условиями  $\tau(1) = \varphi_2(0)$ ,  $\tau'(1) = \varphi_2'(0) - \sqrt{2}\psi_2(0)$ .

Пусть  $-1 \leq \frac{b}{a} < 0$ , тогда неизвестная функция  $w_2(x)$  определяется из условия (1.8), и имеет вид (4.4). В другом случае, т.е. при  $-\infty < \frac{b}{a} < -1$ , функция  $w_2(x)$  определяется как (4.5). Следует отметить, что в этих случаях мы получим линейное интегральное уравнение типа Фредгольма при  $f_i(x, y; \tau(x)) = 0$  и  $\lambda_4(x) \neq 0$ . Следовательно, требуется отдельно доказать единственность решения задачи, или наложить дополнительные условия на заданные функции, обеспечивающие однозначную разрешимость соответствующего линейного интегрального уравнения типа Фредгольма. Но, так как  $f_i(x, y; \tau(x)) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,

то мы получим нелинейное интегральное уравнение с Фредгольмовыми и Вольтерровскими операторами.

С другой стороны, если интегральное слагаемое условия склеивания (2.1) заменить на

$$\lambda_4(x) \int_x^1 r(t)\tau(t)dt,$$

и соответствующее нелокальное условие (см. (1.6)) ставить на характеристике  $BC$ , то мы опять получим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра.

**Замечание 4.5.** *Похожие задачи для (1.1) при  $b = 0$ ,  $a, c \neq 0$  можно исследовать аналогичным методом.*

Такие задачи были изучены в работе [17] при

$$f_i(x, y; u(x, 0)) = \sum_{k=1}^n p_k I_{0x}^{\beta_{ik}} u(x; 0), \quad i = 1, 2.$$

Как нам известно, краевые задачи для уравнения (1.1) при  $a = 0, b, c \neq 0$  не были исследованы даже при  $f_i(x, y; u(x, 0)) = 0$ . Отметим, что методы исследования, использованные в работе [3] при  $a = 0, b, c \neq 0$ , не применимы для таких уравнений, в которых содержатся операторы дробного дифференцирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York, 1999.
2. S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach, Longhorne, PA, 1993.
3. Т.Д. Джураев и др. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа*. Ташкент. ФАН. 1986.
4. B. Islomov, U. Baltaeva. *Boudanry-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic type equation with variable coefficients* // *EJDE* **2015**:221. 1–10 (2015).
5. U. Baltaeva, P. Agarwal. *Boundary value problems for a third-order loaded equation with noncharacteristic type change boundaries* // *Math. Meth. Appl. Sci.* **41**:9. 3305–3315 (2018).
6. O.Kh. Abdullaev, K. Sadarangani. *Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative* // *EJDE* **2016**:164. 1–10 (2016).
7. K. Sadarangani, O.Kh. Abdullaev. *About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives* // *International Journal of Differential Equations* **2016**:9815796. 1–6 (2016).
8. O.Kh. Abdullayev. *Solvability of a non-local problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi-Kober operators* // *Fractional Differ. Calc.* **7**:2. 371–383 (2017).
9. А.М. Нахушев. *Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги* // *ДАН СССР* **242**:5. 1243–1247 (1978).
10. А.М. Нахушев. *Нагруженные уравнения и их приложения*. М.Наука. 2012.
11. E.N. Zhuravleva, E.A. Karabut. *Loaded complex equations in the problem of impact of jets* // *Comput. Math. and Math. Phys.* **51**:5. 876–894 (2011).
12. I.S. Lomov. *A theorem on unconditional basis property of roots vectors of second order weighted differential operators* // *Differential Equations* **27**:9. 1550–1563 (1991).
13. F. Bloom. *Ill-posed Problems for Integro-differential Equations in Mechanics and Electromagnetic Theory*. SIAM. 1981.

14. K. Schumacher. *Traveling-front solutions for integro-differential equations II* // In.: Joger W., Rost H., Tautu P. (eds). *Biological Growth and Spread. Lecture Notes in Biomathematics*: **38**. 296–309 (1980).
15. N. Apreutesei, A. Ducrot, V. Volpert. *Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics* // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B* **11**:3. 541–561 (2009).
16. A.V. Pskhu. *Solution of boundary value problems fractional diffusion equation by the Green function method* // *Differential equation* **39**:10. 1509–1513 (2003).
17. O.Kh. Abdullaev, A.A. Matchanova. *Non-local boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation of third order involving Caputo operator* // *Bulletin of the Institute of Mathematics* **2018**:5. 36–42 (2018).

Бозор Исломович Исломов,  
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,  
ул. Университетская, 4,  
100174, г. Ташкент, Узбекистан  
E-mail: [islomovbozor@yandex.com](mailto:islomovbozor@yandex.com)

Обиджон Хайруллаевич Абдуллаев,  
Институт Математики им. В.И. Романовского,  
ул. Университетская, 4-а,  
100174, г. Ташкент, Узбекистан  
E-mail: [obidjon.mth@gmail.com](mailto:obidjon.mth@gmail.com)