ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 74-85.

УДК 517.544, 517.538.7, 517.984.54

*Памяти Алексея Борисовича Шабата
и Алексея Федоровича Леонтьева*

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В.Ю. НОВОКШЕНОВ

Аннотация. Рассмотрены две задачи комплексного анализа, разрабатывавшиеся в Уфе в 1970-х годах. Это задача Римана о скачке кусочно-аналитической функции на контуре и задача интерполяции целой функции на счетном множестве точек в комплексной плоскости. Прослежено развитие этих задач в последующие годы и показано, что они имеют много общего. Первая из них служит эквивалентом обратной задачи рассеяния, применяемой для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Вторая задача является естественным обобщением формулы Лагранжа для нахождения полинома, принимающего заданные значения на конечном множестве точек. Показано, что обе задачи могут быть объединены обобщением задачи Римана на случай «дискретного контура», на котором происходит «скачок» аналитической функции. В такой формулировке рассмотрена дискретная матричная задача Римана, применяемая ныне во многих задачах для точно решаемых разностных уравнений и оценки спектра случайных матриц. В статье показано, как дискретная матричная задача Римана доставляет способ интегрирования нелинейных разностных уравнений математической физики, таких как разностные уравнения Пенлеве. С другой стороны продемонстрировано, как задание вычетов мероморфной матрицы-функции на счетном множестве в $\mathbb{C}$ с точкой накопления в бесконечности по сути сводится к задаче интерполяции целых функций. Указано другое приложение решений этой задачи, связанное с вычислением детерминантов Фредгольма, применяемых в комбинаторике и теории представления групп.

Ключевые слова: Задача Римана, обратная задача рассеяния, целые функции, интерполяция, каноническое произведение, разностные уравнения Пенлеве, детерминант Фредгольма, асимптотические разложения.

Mathematics Subject Classification: 30D30, 30E10, 33C10, 33E17, 34M50, 37K60

1. Введение

Алексей Борисович Шабат придумал метод задачи Римана как эквивалент метода обратной задачи рассеяния в Уфе в 1975 году [7], [8]. Его идея опиралась на адекватное описание аналитических свойств матричной Ψ-функции, которая удовлетворяет задаче рассеяния

$$\frac{d\Psi}{dx} = (i\lambda A + V(x))\,\Psi, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$\Psi(x,\lambda) \to \begin{cases} e^{i\lambda A x}, & x \to +\infty, \\ e^{i\lambda A x} S(\lambda), & x \to -\infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

V.Yu. Novokshenov, Discrete Riemann-Hilbert problem and interpolation of entire functions.

Поступила 28 марта 2021 г.

где $\Psi \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$,

$$\begin{gathered} A = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \\ V(x) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}), \quad V_{jj} = 0, \quad V_{jk} \in L_1(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Обратная задача рассеяния (ОЗР) состоит в восстановлении матрицы $\Psi(x, \lambda)$, при всех $x, \lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям (1.1) и (1.2), по заданной *матрице рассеяния* $S(\lambda)$ и постоянной матрице A. Тем самым восстанавливается потенциал $V(x)$ в уравнении (1.1).

Более точно, введем банахову алгебру Винера

$$\mathcal{W} = \left\{ f \,\middle|\, f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}) \right\}$$

и ее две подалгебры $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ f(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{i\lambda x} dx, \right\}, \quad \mathcal{W}_2 = \left\{ f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{f}(x) e^{i\lambda x} dx, \right\},$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{W}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| \tilde{f}(x) \right\| dx.$$

Нетрудно доказать [8], что матрица рассеяния $S(\lambda)$ уравнения (1.1) с условиями (1) обладает свойствами

$$\begin{gathered} 1 - S \in \mathcal{W}, \\ 1 - \mathrm{det}_j S \in \mathcal{W}_1, \quad 1 - \mathrm{det}_j S^{-1} \in \mathcal{W}_2, \end{gathered}$$

где $\mathrm{det}_j\, S$ - j-й главный минор матрицы S, $j = 1, 2, \dots, n$. Эти свойства позволяют однозначно перейти от матрицы S к *матрице скачка* Q, определяющей задачу Римана:

$$\begin{gathered} S = N_1 M_1^{-1} = N_2 M_2^{-1}, \\ Q = M_2 M_1^{-1} = N_2 N_2^{-1}, \\ \mathrm{diag}\, M_1 = \{\mathrm{det}_1 S, \dots, \mathrm{det}_n S\}, \quad \mathrm{diag}\, N_2 = \{\mathrm{det}_1 S^{-1}, \dots, \mathrm{det}_n S^{-1}\}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где M_1, N_2 - верхнетреугольные матрицы, а M_2, N_1- нижнетреугольные.

Теорема 1.1. [7, 8] *Пусть разрешима следующая задача Римана:*

1) $\Phi_{\pm}(x, \lambda) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *аналитические в верхней (+) и нижней (-) полуплоскости по* λ,

$$I - \Phi_+ \in \mathcal{W}_1, \quad I - \Phi_- \in \mathcal{W}_2, \quad \det \Phi_{\pm} = 1,$$

2) $\Phi_{\pm}(x, \lambda) \to I$ *при* $\lambda \to \infty, \quad \mathrm{Im}\, \lambda \gtrless 0$,

3) $\Phi_-(x, \lambda) = \Phi_+(x, \lambda) Q(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$, *где* $Q(x, \lambda) = e^{-ix\lambda A} Q(\lambda) e^{-ix\lambda A}$,

тогда функции

$$\Psi_1(x, \lambda) = \Phi_+(x, \lambda + i0) e^{ix\lambda A}, \quad \Psi_2(x, \lambda) = \Phi_-(x, \lambda - i0) e^{ix\lambda A} \tag{1.5}$$

удовлетворяют уравнению (1.1) с потенциалом

$$V(x) = \lim_{\lambda \to \infty} i\lambda [\Phi_+, A] \Phi_+^{-1}(x, \lambda)$$

и условию рассеяния (1.2) с матрицей S, *определяемой формулами (1).*

В теории солитонов Ψ-функция и потенциал V зависят, как правило, от дополнительной независимой переменной t, а (1.1) дополняется еще одним уравнением вида

$$\frac{d\Psi}{dt} = \left(i\lambda^n A + \lambda^{n-1} V_{n-1}(x, t) + \ldots + V(x, t) \right) \Psi.$$

Условие совместности этого уравнения с (1.1) (пара Лакса) доставляет нелинейное уравнение с частными производными на функцию $V(x,t)$, а задача рассеяния (1.1), (1.2) играет роль «преобразования Фурье» для нахождения его решения [2].

Теорема 1.1 А.Б. Шабата оказалась чрезвычайно полезна для теории солитонов, подобно тому как Фурье-анализ полезен для линейных дифференциальных уравнений. В частности, тот факт, что в задаче Римана переменные x, t и потенциал $V(x,t)$ фигурируют в качестве параметров, сильно облегчило асимптотический анализ решений нелинейного уравнения, которому удовлетворяет $V(x,t)$. В дальнейшем формулировка задачи Римана была распространена на другие точно решаемые нелинейные уравнения, в том числе различные эволюционные уравнения с двумя пространственными переменными, разностные уравнения, системы уравнений классической механики и т.д. В настоящее время метод обратной задачи зачастую формулируется только в виде той или иной задачи Римана.

Другой большой тематикой, разрабатывавшейся в Уфе в 1970-е годы, была теория целых функций и, в частности, задача интерполяции этих функций в различных пространствах. В 1976 году вышла монография Алексея Федоровича Леонтьева [4], в которой рассматривались различные аспекты теории рядов Дирихле, уравнений в свертках и другие классические вопросы теории целых функций. Еще в 1948 году А.Ф. Леонтьев впервые рассмотрел задачу интерполяции в пространстве целых функций конечного ненулевого порядка, которая получила впоследствии название задачи свободной интерполяции. Термин «свободная интерполяция» связан с тем, что на значения интерполирующей функции, принадлежащей данному пространству функций, накладываются наименьшие ограничения, которым обязательно должна удовлетворять любая функция из этого пространства.

Классическая задача интерполяции состоит в отыскании функции F данного класса, принимающей в заданных точках $\{a_n\}$ — узлах интерполяции — заданные значения $\{b_n\}$

$$F(a_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

В работе [5] А.Ф. Леонтьев сформулировал задачу свободной интерполяции так: определить, каким условиям должна удовлетворять последовательность различных точек $\{a_n\}$ комплексной плоскости для того, чтобы по каждой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей неравенству

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln r} \leqslant \rho, \quad \rho > 0,$$

можно было построить целую функцию $F(z)$ из класса $[\rho,\infty]$, удовлетворяющую равенствам (1.6). Класс $[\rho,\infty]$ состоит из целых функций, имеющих при данном уточненном порядке ρ нормальный или минимальный тип.

Функция из класса $[\rho,\infty]$ строится с помощью обобщенного ряда Лагранжа

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n\,\Phi(z)\omega(z)}{(z-a_n)\Phi'(a_n)\omega(a_n)}, \tag{1.7}$$

где $\omega(z)$ целая функция порядка не больше ρ и

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}, \quad P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{q_n}$$

— каноническая функция последовательности $\{a_n\}$, а q_n — последовательность натуральных чисел, обеспечивающая сходимость ряда (1.7) в пространстве $[\rho,\infty]$). А.Ф. Леонтьев доказал следующую теорему.

Теорема 1.2. [5] *Для того чтобы задача (1.6) была разрешима в пространстве* $[\rho,\infty]$, $\rho > 0$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+ \ln\frac{1}{\Phi'(a_n)} \leqslant \rho.$$

Две задачи комплексного анализа, рассмотренные выше, не имеют, казалось бы, никакой связи между собой. Так казалось в течение почти тридцати лет, пока в 2000-х годах в работах Алексея

Михайловича Бородина и Андрея Юрьевича Окунькова не появилась дискретная версия задачи Римана [9], [10], [11]. С одной стороны, как и классическая задача Римана на контуре в Теореме 1.1, она обслуживала решение некоторого нелинейного уравнения. С другой стороны, как в Теореме 1.2, она очень напоминала задачу о свободной интерполяции целой функции на счетном множестве узлов.

Следует отметить специфику задач Римана для дискретного случая. Здесь задача сопряжения граничных значений на непрерывном контуре в комплексной плоскости заменяется заданием вычетов мероморфной функции на дискретном множестве точек. В теории солитонов аналогом этой задачи служит восстановление собственных функций по дискретному спектру заданного оператора, что эквивалентно решению задачи Римана с конечным числом нулей $\det\Psi_\pm$ в соответствующих областях аналитичности. В дискретном случае происходит вырождение сингулярной части Ψ-функции на счетном числе точек. Ниже в §2 этот подход будет проиллюстрирован на примере интегрирования дискретного уравнения Пенлеве второго типа и вычисления детерминанта Фредгольма одного интегрального оператора, возникающего в теории случайных матриц.

В заключительном §3 обсуждается разрешимость дискретной матричной задачи Римана. Оказывается, что эта задача эквивалентна интерполяции целой функции на счетном множестве узлов. Интерполяционный ряд Лагранжа (1.7) модифицируется таким образом, чтобы обслужить случай матричных коэффициентов и условие сопряжения на счетном числе узлов. В качестве иллюстрации вычисляется интерполяционный ряд для одного точного решения дискретной матричной задачи Римана.

2. Дискретная задача Римана

Следуя работам А.М. Бородина [10], [11], определим дискретную матричную задачу Римана (ДМЗР) следующим образом.

Пусть Σ – некоторое счетное множество точек на комплексной плоскости $\lambda \in \mathbb{C}$, имеющее единственную предельную точку на бесконечности. Пусть $H(x)$ – нильпотентная матричная функция на Σ, $H : \Sigma \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, $H^2(x) = 0$.

Будем говорить, что матричнозначная функция $Y : \mathbb{C} \setminus \Sigma \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ с простыми полюсами в точках $x \in \Sigma$ является решением *дискретной задачи Римана* (Σ, H), если выполняются следующие условия:

1° $Y(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и имеет простые полюсы в точках Σ,

$$2^\circ\ \operatorname{Res}_{\lambda=x} Y(\lambda) = \lim_{\lambda\to x} \left(Y(\lambda)H(x)\right), \quad x \in \Sigma,$$

3° $Y(\lambda) \to I$ при $\lambda \to \infty$.

Также как и выше, $H(\lambda)$ называется *матрицей скачка*.

Заметим, что условие 3° означает, что функция $Y(\lambda)$ имеет существенную особенность на бесконечности. В самом деле, функция с полюсами, накапливающимися к бесконечности, не может иметь регулярную асимптотику. Для того, чтобы условие было корректным, нужно потребовать, например, равномерную асимптотику на последовательности окружностей $|\lambda| = a_k$, $a_k \to +\infty$. Кроме того, будем предполагать, что существует последовательность расширяющихся контуров, таких что расстояние от них до множества Σ отграничено от нуля, и мы будем требовать, чтобы решение $Y(\lambda)$ имело нужную асимптотику на этих контурах.

Вопрос о существовании решений матричных задач Римана, как классической (Теорема 1.1), так и дискретной $1^\circ - 3^\circ$, достаточно сложен [12], [13]. Мы рассмотрим его ниже в §3. Напротив, единственность этих решений доказывается достаточно просто.

Теорема 2.1. *В условиях Теоремы 1.1 решение задачи Римана $\Phi_\pm(x,\lambda)$ единственно.*

Доказательство. Пусть имеется два решения $\Phi_\pm(x,\lambda)$ и $\chi_\pm(x,\lambda)$. Рассмотрим матричные функции $\Phi_+(x,\lambda)\chi_+^{-1}(x,\lambda)$ и $\Phi_-(x,\lambda)\chi_-^{-1}(x,\lambda)$. Эти функции в силу условия 1) аналитичны по λ соответственно в верхней и нижней полуплоскости, а на вещественной оси совпадают в силу условия 3). На бесконечности они стремятся к единичной матрице по условию 2). Следовательно, по теореме Лиувилля они тождественно равны единице, то есть $\Phi_\pm(x,\lambda) = \chi_\pm(x,\lambda)$. □

Доказательство единственности решения ДМЗР несколько сложнее, но также основано на теореме Лиувилля.

Теорема 2.2. [10] *Решение задачи Римана* $Y(\lambda)$, *удовлетворяющей условиям* $1^\circ - 3^\circ$, *единственно.*

Доказательство. Докажем сначала, что матрица $Y(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)$ аналитична в окрестности точки x. В силу условия 1° имеем

$$Y(\lambda)=\frac{A(x)}{\lambda-x}+B(x)+O(\lambda-x),\quad \lambda\to x,$$

$$\operatorname{Res}_{\lambda=x}Y(\lambda)=A(x),\quad Y(\lambda)H(x)=\frac{A(x)H(x)}{\lambda-x}+B(x)H(x)+O(\lambda-x).$$

Тогда из условия 2° $\operatorname{Res}_{\lambda=x}Y(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to x}(Y(\lambda)H(x))$ следует

$$A(x)H(x)=0,\quad A(x)=\lim_{\lambda\to x}(Y(\lambda)H(x))=B(x)H(x). \tag{2.1}$$

Отсюда, учитывая условие $H^2(x)=0$, получим

$$Y(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)=B(x)+O(1), \tag{2.2}$$

что аналитично вблизи x.

Предположим, что $Y_1(\lambda)$ и $Y_2(\lambda)$ - два различных решения ДМЗР $1^\circ-3^\circ$. Тогда матрица

$$\begin{aligned}Y_1(\lambda)Y_2^{-1}(\lambda)=&Y_1(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)^{-1}Y_2^{-1}(\lambda)\\=&Y_1(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)\left(Y_2(\lambda)\left(I+\frac{H(x)}{\lambda-x}\right)\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2.3}$$

аналитична в $\mathbb{C}$, поскольку x - любая точка из Σ.

Из условия 3° функция $Y_1(\lambda)Y_2^{-1}(\lambda)\to I$ при $\lambda\to\infty$, тогда по теореме Лиувилля эта функция тождественно равна единичной матрице. □

Приведем примеры применения ДМЗР в нелинейных задачах математической физики.

Начнем с вывода пары Лакса для разностного нелинейного уравнения, которое решается с помощью ДМЗР. Для этого, также как и в непрерывном случае А.Б. Шабата, нужно получить два линейных матричных уравнения по переменной λ и x соответственно. Условием совместности этой пары Лакса будет искомое нелинейное уравнение [14], [17].

Обозначим

$$\mathbb{Z}'=\mathbb{Z}+\frac{1}{2}=\left\{\ldots,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots\right\}=\mathbb{Z}'_+\cup\mathbb{Z}'_-,$$

где $\mathbb{Z}'_+=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots\right\}$ и $\mathbb{Z}'_-=\left\{\ldots,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$.

Рассмотрим построение пары Лакса для задачи 1° – 3° в частном случае $N=2$ и $\Sigma=\Sigma_k$, где

$$\Sigma_k=\{k,k+1,k+2,\ldots\},\quad k\in\mathbb{Z}',$$

$$H(x)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & -\frac{\varkappa^{2x}}{\Gamma^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, & x\in\mathbb{Z}'_+,\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{\varkappa^{-2x}}{\Gamma^2\left(-x+\frac{1}{2}\right)} & 0\end{pmatrix}, & x\in\mathbb{Z}'_-.\end{cases} \tag{2.4}$$

Следуя [11] и [6], докажем, что для любого $n\in\mathbb{Z}_k$ существует постоянная нильпотентная матрица A_n,

$$A_n=\begin{pmatrix}p_n & q_n\\ r_n & -p_n\end{pmatrix},\quad p_n^2=-r_nq_n, \tag{2.5}$$

и функции a_n, b_n, $a_n b_n = 1$, такие что

$$Y_{n+1}(\lambda) = \left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right) Y_n(\lambda), \tag{2.6}$$

$$Y_n(\lambda - 1)\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda - \frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} Y_{n+1}(\lambda). \tag{2.7}$$

Действительно, поскольку H не зависит от n, мы видим, что $Y_n(\lambda)$ и $Y_{n+1}(\lambda)$ удовлетворяют одному и тому же условию скачка на Σ_n. Однако, Y_{n+1} имеет лишний полюс в точке $\{n\} = \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n$. Следовательно, отношение $Y_{n+1}Y_n^{-1}$ имеет один полюс в точке $\lambda = n$. Обозначая вычет в этой точке через A_n, мы заключаем, что функция

$$Y_{n+1}(\lambda)Y_n^{-1}(\lambda) - \frac{A_n}{\lambda - n}$$

является целой. Вычисляя асимптотику в окрестности $\lambda = \infty$, получаем по теореме Лиувилля, что эта функция тождественно равна I, что доказывает первое уравнение. Далее, из того, что $\det Y_n \equiv \det Y_{n+1} \equiv 1$, следует $\det(I + A_n/(\lambda - n)) \equiv 1$. Отсюда заключаем, что A_n нильпотентна.

Вывод уравнения (2.7) несколько сложнее. Из условия 3° следует, что

$$Y_n(\lambda) = I + \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to \infty, \tag{2.8}$$

с некоторыми константами $\alpha_n, \dots, \delta_n$.

Разделим обе части уравнения (2.7) слева на матрицу $Y_{n+1}(\lambda)$ и докажем, что его левая часть является полиномом по λ. В силу (2.8) асимптотика при $\lambda \to \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(I + \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \lambda^{-1}\right) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(I - \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} \lambda^{-1}\right) + O(\lambda^{-1}) \\ &\qquad = \varkappa^{-1} \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} + \alpha_n - \alpha_{n+1} & -\beta_{n+1} \\ \gamma_n & 0 \end{pmatrix} + O(\lambda^{-1}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Обозначим $a_n = -\varkappa^{-1}\beta_{n+1}$, $b_n = -\varkappa^{-1}\gamma_n$, $c_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Тогда из теоремы Лиувилля следует, что выражение (2) равно

$$\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - c_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение покажем, что $c_n = p_n$ и $a_n b_n = 1$. Второе равенство следует из того факта, что определитель $Y_n(\lambda)$ равен 1. Чтобы доказать, что $c_n = p_n$, подставим (2.6) в только что доказанное соотношение (2.7). Получаем

$$\begin{aligned} &Y_n(\lambda - 1)\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda - \frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - c_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} \left(I + (\lambda - n)^{-1} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & -p_n \end{pmatrix}\right) Y_n(\lambda). \end{aligned}$$

Сравнивая асимптотику матричных элементов $(\,\cdot\,)_{11}$ в этом равенстве, заключаем, что $c_n = p_n$. Тем самым доказана справедливость уравнений пары Лакса (2.6) и (2.7).

Теорема 2.3. *Условием совместности уравнений пары Лакса (2.6) и (2.7) является дискретное уравнение Пенлеве второго типа (dPII)*

$$v_{n+1} + v_{n-1} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) v_n}{\varkappa(v_n^2 - 1)}, \tag{2.10}$$

где $v_n^2 = \varkappa^{-1} a_n r_n$.

Доказательство. Сдвигая λ на 1 в (2.7) и подставляя правую часть (2.7) в правую часть (2.6), получаем

$$Y_{n+1}(\lambda)=\left(I+\frac{A_n}{\lambda-n}\right)\begin{pmatrix}\varkappa^{-1}(\lambda+\frac12-p_n) & a_n\\ -b_n & 0\end{pmatrix}$$
$$\cdot\, Y_{n+1}(\lambda+1)\begin{pmatrix}\varkappa(\lambda+\frac12)^{-1} & 0\\ 0 & \varkappa^{-1}(\lambda+\frac12)\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, сдвигая n и λ на 1 в (2.6) и (2.7) и подставляя правую часть (2.6) в правую часть (2.7), получаем

$$Y_{n+1}(\lambda)=\begin{pmatrix}\varkappa^{-1}(\lambda+\frac12-p_{n+1}) & a_{n+1}\\ -b_{n+1} & 0\end{pmatrix}\left(I+\frac{A_{n+1}}{\lambda-n}\right)$$
$$\cdot\, Y_{n+1}(\lambda+1)\begin{pmatrix}\varkappa(\lambda+\frac12)^{-1} & 0\\ 0 & \varkappa^{-1}(\lambda+\frac12)\end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти два соотношения, получим условие совместности для пары Лакса (2.6), (2.7)

$$\left(I+\frac{A_n}{\lambda-n}\right)\begin{pmatrix}\varkappa^{-1}(\lambda+\frac12-p_n) & a_n\\ -b_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varkappa^{-1}(\lambda+\frac12-p_{n+1}) & a_{n+1}\\ -b_{n+1} & 0\end{pmatrix}\left(I+\frac{A_{n+1}}{\lambda-n}\right). \tag{2.11}$$

Из матричного уравнения (2.11) легко получить скалярные уравнения на переменные p_n и r_n. А именно, вычисление асимптотики элементов $(\cdot)_{12}$ и $(\cdot)_{21}$ в равенстве (2.11) при $\lambda\to\infty$ дает соотношения

$$\begin{cases}a_n=a_{n+1}+\varkappa^{-1}q_{n+1}, \quad b_n=b_{n+1}+\varkappa^{-1}r_n,\\ a_nr_n=-b_{n+1}q_{n+1}.\end{cases} \tag{2.12}$$

Вычеты в простом полюсе в $\lambda=n$ в равенстве (2.11) имеют вид

$$\begin{pmatrix}p_n & q_n\\ r_n & -p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varkappa^{-1}(n+\frac12-p_n) & a_n\\ -b_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varkappa^{-1}(n+\frac12-p_{n+1}) & a_{n+1}\\ -b_{n+1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\\ r_{n+1} & -p_{n+1}\end{pmatrix}.$$

Матричный элемент $(\cdot)_{22}$ этого равенства совпадает с последним равенством (2.12), а элемент $(\cdot)_{12}$ дает

$$a_np_n=\varkappa^{-1}(\lambda+\tfrac12-p_{n+1})q_{n+1}-a_{n+1}p_{n+1}.$$

Умножая обе части на b_{n+1}, получаем (напомним, что $a_{n+1}b_{n+1}=1$)

$$b_{n+1}a_np_n=-\varkappa^{-1}(\lambda+\tfrac12-p_{n+1})a_nr_n-p_{n+1}. \tag{2.13}$$

Обозначим

$$s_n=a_nr_n,$$

тогда, умножая первое соотношение (2.12) на b_{n+1}, мы видим, что $a_nb_{n+1}=1-\varkappa^{-1}s_n$. Подставляя это выражение в (2.13), получаем

$$(p_n+p_{n+1})(s_n-\varkappa)=\left(n+\tfrac12\right)s_n,$$

Используя нильпотентность матрицы A_n (2.5), имеем

$$p_{n+1}^2=-q_{n+1}r_{n+1}=(-b_{n+1}q_{n+1})(a_{n+1}r_{n+1})=s_ns_{n+1}.$$

Тем самым, для любого $n\in\mathbb{Z}_k$ получается система скалярных уравнений

$$\begin{cases}(p_n+p_{n+1})(s_n-\varkappa)=\left(n+\frac12\right)s_n,\\ p_{n+1}^2=s_ns_{n+1}.\end{cases}$$

Из этой системы легко исключить переменную p_n, а именно, полагая

$$s_n=\varkappa v_n^2,$$

получим скалярное разностное уравнение (2.10). □

Отметим, что в работах [16], [18] дискретное уравнение Пенлеве dPII выведено из симметрийных соображений без использования техники ДМЗР.

Другим примером применения ДМЗР служит вычисление детерминантов Фредгольма интегральных операторов, связанных с теорией представлений групп и задачами комбинаторики. Таким оператором является интегральный оператор с бесселевым ядром [13], [19]

$$Q(x,y) = \varkappa \frac{J_{x-\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{y+\frac{1}{2}}(2\varkappa) - J_{y-\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{x+\frac{1}{2}}(2\varkappa)}{x-y}, \tag{2.14}$$

где $\varkappa$ - параметр, а J_ν - это J-функция Бесселя.

Положим $x, y \in \mathbb{Z}' = \left\{\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\right\}$ и обозначим

$$\Sigma_k = \{k, k+1, k+2\dots\}, \quad k \in \mathbb{Z}'.$$

Определим Q_k как сужение оператора Q на $\ell_2(\Sigma_k)$

$$Q_k f(x) = \sum_{y=k}^{\infty} Q(x,y)f(y), \quad f \in \ell_2(\Sigma_k).$$

Оператор Q_k является ядерным и положительным [11], поэтому существует его определитель Фредгольма

$$D_k = \det(1 - Q_k), \quad D_k \neq 0.$$

Положим $R_s = Q_k(1-Q_k)^{-1}$. Этот оператор выражается из решения следующей ДМЗР [11]:

(a) $Y(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и имеет простые полюсы в точках Σ,

(b) $\operatorname{Res}_{\lambda=x} Y(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to x} \left(Y(\lambda)H(x)\right), \quad x \in \Sigma_k, \quad H^2(x) = 0,$

(c) $\det Y(\lambda) \equiv 1,$

где матрица скачка H определяется формулой (2.4). Заметим, что задача $1^\circ - 3^\circ$ отличается от задачи (a) - (c) условием нормировки (c), то есть не требуется как в 3° ограниченности решения $Y(\lambda)$ на бесконечности.

Пусть существует решение ДМЗР (a) - (c) в виде

$$Y(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi & \hat{\phi} \\ \psi & \hat{\psi} \end{pmatrix},$$

тогда ядро оператора R_k представляется в виде

$$R_k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x)\psi(y) - \phi(y)\psi(x)}{x-y}, & x \neq y, \\ \psi(x)\hat{\psi}(x) - \phi(x)\hat{\phi}(x), & x = y. \end{cases} \tag{2.15}$$

Оказывается [11], что ДМЗР (a) - (c) допускает явное решение

$$Y(\lambda) = \sqrt{\varkappa} \begin{pmatrix} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) \\ -J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa^{-\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \varkappa^{\lambda}\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

причем

$$1 + R_k = \frac{\det(1-Q_{k+1})}{\det(1-Q_k)} = \frac{D_{k+1}}{D_k}.$$

Теорема 2.4. [9] *Пусть $k \in \mathbb{Z}'$ и v_k - решение дискретного уравнения Пенлеве (2.10) с начальными условиями*

$$v_{-\frac{1}{2}} = -1, \quad v_{\frac{1}{2}} = \frac{I_1(2\varkappa)}{I_0(2\varkappa)},$$

где I_0 и I_1 - это I-функции Бесселя. Тогда при всех $k \geq \frac{1}{2}$ справедливо соотношение

$$v_k^2 = 1 - \frac{D_k D_{k+2}}{D_{k+1}^2}.$$

3. Существование решения ДМЗР и задача интерполяции

Учитывая приложения ДМЗР, упомянутые в §2, упростим задачу поиска мероморфной функции, удовлетворяющей условиям $1^\circ - 3^\circ$. Рассмотрим множество простых полюсов $x_n \in \Sigma$, распределенных в $\mathbb{C}$ с условиями

$$0 < \operatorname{Re} x_1 \leqslant \operatorname{Re} x_2 \leqslant \ldots, \quad x_n = \frac{n+\alpha}{\sigma} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{3.1}$$

причем $x_0 = 0$ и $x_{-n} = -x_n$.

Определим каноническое произведение в виде

$$\Phi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{x_n^2}\right) \tag{3.2}$$

с индикатрисой роста

$$h(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|\Phi\left(re^{i\theta}\right)|}{r} = \pi\sigma|\sin\theta|.$$

Условия (3.1) заведомо удовлетворяют Теореме 1.2 об узлах интерполяции, поскольку предел, указанный там, равен нулю при $a_n = x_n$. Поэтому существует интерполяция целой функции $F(\lambda)$ с узлами в точках x_n. В данном случае, однако, можно применить более простую теорему ([3], гл. II, теорема 2.6.5)

Теорема 3.1. *Пусть $F(\lambda)$ - целая функция с условием*

$$|F(\mu + i\nu)| \leqslant |\mu|^{\alpha+1}\delta(|\mu|)e^{(\pi\sigma-\epsilon)|\nu|}, \quad \epsilon \to 0, \quad \delta(\mu) \to 0, \quad \mu \to \infty, \tag{3.3}$$

а последовательность x_n удовлетворяет условию (3.1). Тогда

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_n)}{\Phi'(x_n)} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda - x_n}.$$

Используем Теорему 3.1 для конструкции решения ДМЗР по заданной матрице скачка.

Предположим, что узлы x_n решения ДМЗР $1^\circ - 3^\circ$ удовлетворяют условиям (3.1), и определим каноническое произведение формулой (3.2). Пусть элементы матриц $B(\lambda)$ и $H(\lambda)$ являются целыми функциями и удовлетворяют оценкам (3.3)

$$|B_{ij}(\lambda)| \leqslant |\lambda|^{\alpha+1}\delta(|\lambda|)e^{(\pi\sigma-\epsilon)|\operatorname{Im}\lambda|},$$
$$|H_{ij}(\lambda)| \leqslant |\lambda|^{\alpha+1}\delta(|\lambda|)e^{(\pi\sigma-\epsilon)|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad \delta(|\lambda|) \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

По теореме 3.1 существует решение интерполяционной задачи

$$Y(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A(x_n)}{\lambda - x_n} + B(x_n)\right) \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi'(x_n)(\lambda - x_n)}, \tag{3.4}$$

где $A(x)$ имеет порядок роста не более $\pi\sigma$.

Очевидно, что $Y(\lambda)$ является мероморфной матрицей, имеющей простые полюсы в узлах $x_n = x$ с рядом Лорана

$$Y(\lambda) = \frac{A(x)}{\lambda - x} + \left(A(x)\frac{\Phi''(x)}{2\Phi'(x)} + B(x)\right) + O(\lambda - x), \quad \lambda \to x.$$

Из этого разложения следует условие скачка 2° в виде

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=x} Y(\lambda) = A(x) = \lim_{\lambda\to x} Y(\lambda)H(\lambda) = \lim_{\lambda\to x}\left(A(x)\frac{\Phi''(x)}{2\Phi'(x)} + B(x)\right)H(\lambda).$$

Для того, чтобы согласовать это равенство с (2.1), применим условие нильпотентности матрицы $H(\lambda)$

$$A(x)(I - \phi H(x)) = B(x)H(x), \quad (I - \phi H(x))(I + \phi H(x)) = I, \quad \phi = \frac{\Phi''(x)}{2\Phi'(x)}.$$

Умножая справа первое равенство на $(I + \phi H(x))$ и вновь применяя нильпотентность $H(x)$, получим

$$A(x) = B(x)H(x). \tag{3.5}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Существует решение $Y(\lambda)$ ДМЗР 1°, 2° (без условия нормировки 3°) при распределении узлов скачка (3.1) в классе целых функций $Y(\lambda)\Phi(\lambda)$ конечного порядка.*

Как указано в теореме 2.2, решение ДМЗР единственно при выполнении всех трех условий $1^\circ - 3^\circ$. Поэтому следует найти способ достижения условия нормировки на бесконечности 3°. Заменим для простоты условие нормировки 3° условием (c) $\det Y(\lambda) = 1$, которое фигурирует в ДМЗР (a) - (c). Для этого снова воспользуемся нильпотентностью главных членов ряда Лорана (3.4).

Согласно (3.4) и (3.5) в каждом узле $\lambda = x$ ряд Лорана имеет вид

$$Y(\lambda) = \left(\frac{A(x)}{\lambda - x} + B(x) + O(\lambda - x)\right) = B(x)\left(\frac{H(x)}{\lambda - x} + I + O(\lambda - x)\right).$$

Поскольку $H^2(x) = 0$ имеем

$$\left(\frac{H(x)}{\lambda - x} + I\right)\left(-\frac{H(x)}{\lambda - x} + I\right) = I,$$

то есть матрица $I + H(x)/(\lambda - x)$ невырождена и $\det Y(\lambda) = \det B(x)$ при $\lambda = x$.

Разделим обе части формулы (3.4) на скалярный множитель $\Phi(\lambda)$ - каноническое произведение (3.2). Сходимость ряда от этого не пострадает, он по-прежнему будет представлять мероморфную функцию с полюсами в точках $\lambda = x_n$

$$\tilde{Y}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A(x_n) + B(x_n)(\lambda - x_n)}{\Phi'(x_n)(\lambda - x_n)}. \tag{3.6}$$

Тогда эта функция ограничена на бесконечности,

$$\det \tilde{Y}(\lambda) = \det \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B(x_n)}{\Phi'(x_n)}, \quad \lambda \to \infty. \tag{3.7}$$

Условие (b) теперь превращается в систему уравнений

$$A(x_n) = \Phi'(x_n) \sum_{k \neq n} \frac{B(x_k)H(x_n)}{\Phi'(x_k)(x_k - x_n)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Тем самым, разрешимость ДМЗР (a) - (c) следует из разрешимости системы уравнений (3.7) и (3.8) на матрицы $A(x_n)$ и $B(x_n)$.

В качестве примера рассмотрим применение интерполяционного ряда (3.6) для точного решения ДМЗР (a) - (c) (2.16)

$$Y(\lambda) = \sqrt{\varkappa}\begin{pmatrix} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) \\ -J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) & J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa^{-\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \varkappa^{\lambda}\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

Заметим, что условие нормировки (c) $\det Y(\lambda) = 1$ следует из известных формул для гамма функции и функций Бесселя [1]

$$J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa) + J_{-\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa)J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\varkappa) = \frac{\cos\pi\lambda}{\pi\varkappa},$$
$$\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\pi\lambda}.$$

Теорема 3.3. *Пусть матрица $Y(\lambda)$ является решением ДМЗР (a) - (c), заданным формулой (2.16). Тогда его матричные элементы представимы в виде рядов интерполяции с узлами*

$x_n = n,\ n \in \mathbb{Z}$

$$Y_{11}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{J_n(2\varkappa)}{n + \lambda - \frac{1}{2}},$$
$$Y_{12}(\lambda) = -\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{J_n(2\varkappa)}{n - \lambda - \frac{1}{2}}.$$

Матричные элементы Y_{21} и Y_{22} имеют аналогичное представление.

Доказательство. Согласно (2.16) матричные элементы имею вид

$$Y_{11}(\lambda) = \varkappa^{-\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) J_{\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa), \quad Y_{12}(\lambda) = \varkappa^{\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma\left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(2\varkappa). \tag{3.9}$$

Заметим, что в задаче (a) - (c) условие скачка задано в точках $x \in \mathbb{Z}'$, то есть $\lambda = x$ отвечает полуцелым значениям, $\lambda \pm \frac{1}{2} = n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Воспользуемся известным рядом Неймана по функциям Бесселя с целым значком ([1], гл. 7.15, формула (10))

$$\Gamma(\zeta - \mu) J_\zeta(2\varkappa) = \Gamma(\mu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\Gamma(\zeta - \mu + n)}{\Gamma(\zeta + n + 1) n!} \varkappa^{\zeta - \mu + n} J_{n+\mu}(2\varkappa).$$

Полагая $\mu = 0$ и пользуясь соотношением $\Gamma(\zeta + n + 1) = (\zeta + n)\Gamma(\zeta + n)$, последний ряд можно переписать в виде

$$\Gamma(\zeta) J_\zeta(2\varkappa) = \varkappa^\zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{J_n(2\varkappa)}{\zeta + n}.$$

Переходя к переменной $\lambda - \frac{1}{2} = \zeta$ и снова используя формулу $\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$, получаем первую формулу (3.3). Вторая формула (3.3) получается заменой $\lambda + \frac{1}{2} = \zeta$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции.* Т.2, М.: Наука. 1974.
2. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. *Теория солитонов и метод обратной задачи.* М.:, Наука. 1980.
3. И.И. Ибрагимов. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* М.: Наука. 1971.
4. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.:, Наука. 1976.
5. А.Ф. Леонтьев. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // ДАН СССР. **61**:5, 785–787 (1948).
6. В.Ю. Новокшенов. *Дискретные интегрируемые уравнения и специальные функции* // Уфимск. матем. журн. **9**:3, 119–131 (2017).
7. А.Б. Шабат. *Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений* // Функц. анализ и его прилож. **9**:3, 75–78 (1975).
8. А.Б. Шабат. *Обратная задача рассеяния* // Дифференц. уравнения. **15**:10, 1824–1834 (1979).
9. A. Borodin, A. Okounkov. *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants* // Integral Equations Operator Theory. **37**:4, 386–396 (2000).
10. A. Borodin. *Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations* // Duke Math. J. **117**:3, 1–54 (2003).
11. A. Borodin. *Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations* // Ann. Math. **160**:3, 1141–1182 (2004).
12. K. Clancey, I. Gohberg. *Factorization of matrix functions and singular integral operators*, Operator Theory: Advances and Applications, **3**, Birkhauser Verlag, Basel (1981).
13. P. Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach* // Courant Lecture Notes, New York Univ. (1999).

14. A.S. Fokas, A.R. Its, A.A. Kapaev, V.Yu. Novokshenov. *Painlevé Transcendents. The Riemann-Hilbert Approach* // Math. Surveys and Monographs, V.128, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2006).
15. F.D. Gakhov. *Boundary value problems.* Dover Publications, New York (1990).
16. B. Grammaticos, F.W. Nijhof, A. Ramani. *Discrete Painlevé equations, The Painlevé property* // CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 413–516 (1999).
17. A.R. Its. *The Riemann-Hilbert Problem and Integrable Systems* // Notices of the Amer. Math. Soc. **50**:11, 1389–1400 (2003).
18. H. Sakai. *Rational Surfaces Associated with Affine Root Systems and Geometry of the Painlevé Equations* // Comm. Math. Phys. **220**:1, 165–229 (2001).
19. C.A. Tracy, H. Widom. *Random unitary matrices, permutations and Painlevé* // Comm. Math. Phys. **207**:3, 665–685 (1999).

Виктор Юрьевич Новокшенов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `novik53@mail.ru`