ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 69-77.

УДК 517.547

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНДЕКСА ВИМАНА-ВАЛИРОНА

К.Г. МАЛЮТИН, М.В. КАБАНКО, В.А. МАЛЮТИН

Аннотация. Рассмотрены некоторые свойства центрального индекса в теории Вимана-Валирона. Вводятся понятие определяющей последовательности центрального индекса $\nu(r)$, соответствующего фиксированной трансцендентной функции f, и понятие определяющей последовательности произвольного фиксированного центрального индекса $\nu(r)$. Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \dots$ – точки скачков функции $\nu(r)$ с учетом их кратностей. Это означает, что если в точке ρ_s величина скачка равна m_s, то в написанной выше последовательности величина ρ_s встречается m_s раз. Такая последовательность называется определяющей последовательностью функции $\nu(r)$. Вводится понятие регуляризации функции $\nu(r)$, которая применяется для доказательства основных утверждений. Изучены две экстремальные задачи в классе функций с заданным центральным индексом. Получено выражение максимума модуля экстремальной функции через ее центральный индекс. Основные полученные результаты таковы. Пусть T_ν–множество всех трансцендентных функций f с заданным центральным индексом $\nu(r)$, $M(r,f) = \max\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, и пусть $M(r,\nu) = \sup\{M(r,f) : f \in T_\nu\}$. Тогда для любого $r > 0$ величина $M(r,\nu)$ в классе функций T_ν достигается на функции (одной и той же для любого $r > 0$). Приводится вид такой экстремальной функции. Доказывается также, что при любом фиксированном $r_0 > 0$ и при любом заданном центральном индексе $\nu(r)$ в классе T_ν существует функция $f_0(z)$ такая, что $M(r_0, f_0) = \inf\{M(r_0, f) : f \in T_\nu\}$.

Ключевые слова: теория Вимана-Валирона, центральный индекс, определяющая последовательность, регуляризация, экстремальная задача.

Mathematics Subject Classification: 30D10, 30D20

1. Введение

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

– целая трансцендентная функция, отличная от многочлена (т.е. такая целая функция, что бесконечно много коэффициентов a_n в разложении (1.1) не равны нулю). Как известно (см., например, [1]), максимальный член функции $f(z)$ определяется формулой

$$\mu(r,f) = \max_n |a_n| r^n, \quad r \geqslant 0, \tag{1.2}$$

а ее центральный индекс – формулой

$$\nu(r,f) = \max\{n : |a_n| r^n = \mu(r,f)\}. \tag{1.3}$$

K.G. Malyutin, M.V. Kabanko, V.A. Maliutin, Extremal problems in the theory of central Wiman-Valiron index.

Исследование К.Г. Малютина выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Поступила 3 декабря 2020 г.

Далее, если известно о какой функции идет речь, мы символ f в обозначениях максимального члена функции $f(z)$ и ее центрального индекса будем опускать и писать $\mu(r)$, $\nu(r)$ вместо $\mu(r,f)$ и $\nu(r,f)$.

Таким образом, центральный индекс $\nu(r,f)$ характеризуется двумя свойствами:

1) при фиксированном r имеем $|a_{\nu(r)}|r^{\nu(r)} = \max\limits_n |a_n|r^n$;

2) $\nu(r)$ – наибольший номер, обладающий свойством 1).

Для полиномов n-й степени $P_n(z) = a_nz^n + \dots + a_0$, начиная с некоторого $r > 0$, роль центрального индекса играет степень n: $\nu(r, P_n) = n$. Для любой целой трансцендентной функции $\nu(r,f) \uparrow +\infty$ при $r \to +\infty$ (см. лемму 2.1).

Так как произвольную целую функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = cz^m f_0(z)$, где $f_0(0) = 1$, то, не сильно теряя в общности, можно считать, что в представлении (1.1) $a_0 = 1$. Отсюда следует, что

$$\nu(0) = 0, \qquad \mu(0) = 1. \tag{1.4}$$

В дальнейшем, не оговаривая это особо, мы будем считать условие (1.4) выполненным.

Теория максимального члена и центрального индекса, их роль в теории целых и мероморфных функций, различных приложениях (в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории вероятностей и др.) хорошо описана в уже упоминавшейся выше, классической монографии Г. Виттиха [1]. Связи между максимальным членом $\mu(r,f)$ и максимальным модулем

$$M(r,f) = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |f(re^{i\theta})|$$

подробно изучены в теории центрального индекса Вимана [2], [3] и Валирона [4].

Для теории обыкновенных дифференциальных уравнений особое значение имеет то, что производную трансцендентной функции $f(z)$ можно выразить через $f(z)$ и ее центральный индекс $\nu(r,f)$. В частности, если точка ζ – точка максимума функции $f(z)$ на окружности $|\zeta| = r$, т. е. $|f(\zeta)| = M(|\zeta|, f)$, то имеет место соотношение

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\nu(r,f)}{\zeta}(1 + o(\zeta)), \qquad \zeta \to \infty,$$

и соответствующие формулы для высших производных.

С помощью теории центрального индекса можно также доказать малую теорему Пикара [1]:

Целая трансцендентная функция $f(z)$ выпускает самое большее одно конечное значение.

Если исследованиям о соотношениях между максимальным членом и максимальным модулем трансцендентной функции уделялось большое внимание (отметим только некоторые работы П. Розенблума [5], Р. Лондона [6], П. Локгарта и Е. Страуса [7], М. Шереметы [8], [9], [10], [11], П. Филевича [12], [13], [14] и мн. др.), то центральному индексу, на наш взгляд, уделялось меньше внимания. В наше поле зрения попала только работа П. Филевича [15], в которой изучался рост максимума модуля целой функции в зависимости от роста ее центрального индекса.

Настоящая работа и направлена на то, чтобы частично устранить этот пробел. Выражаем признательность А. Ф. Гришину, идеи которого стимулировали написание данной работы.

Основные полученные результаты таковы. Пусть T_ν – множество всех трансцендентных функций с заданным центральным индексом $\nu(r)$, пусть

$$M(r,\nu) = \sup_{f\in T_\nu} M(r,f).$$

Тогда для любого $r > 0$ величина $M(r,\nu)$ в классе функций T_ν достигается на функции (одной и той же для любого $r > 0$). Приводится вид такой экстремальной функции (см. теоремы 2.2, 2.3). Доказывается также, что при любом фиксированном $r_0 > 0$ и при любом заданном центральном индексе $\nu(r)$ в классе T_ν существует функция $f_0(z)$ такая, что (теорема 3.1)

$$M(r_0, f_0) = \inf_{f\in T_\nu} M(r_0, f).$$

Приведены две леммы (леммы 3.1 и 3.2) о существовании функции $f_0(z) \in T_\nu$, такой, что

$$M(r_0, f_0) = \sup_{f\in T_\nu(r_0)} M(r_0, f) \quad \text{и} \quad M(r_0, f_0) = \sup_{f\in T_\nu(r_0)} M(r_0, f).$$

В заключение этого параграфа кратко опишем структуру статьи. В следующем параграфе вводятся основные обозначения и рассматривается первая экстремальная задача. В третьем параграфе рассматривается вторая экстремальная задача.

2. Первая экстремальная задача

Прежде всего, сформулируем лемму о характеризации центрального индекса.

Лемма 2.1. *Центральный индекс является неубывающей, непрерывной справа функцией на интервале* $(0; +\infty)$.

Доказательство. Поскольку

$$\ln\mu(e^x) = \max_n(\ln|a_n| + nx),$$

то $\ln\mu(e^x)$ является строго возрастающей выпуклой функцией.

Пусть $r_0 > 0$, $\nu = \nu(r_0)$ и $m < \nu$. Тогда, используя свойства 1) и 2) центрального индекса, получим при $r > r_0$

$$\left|\frac{a_m}{a_\nu}\right| r^{m-\nu} < \left|\frac{a_m}{a_\nu}\right| r_0^{m-\nu} = \frac{|a_m| r_0^m}{|a_\nu| r_0^\nu} \leqslant 1$$

откуда следует, что

$$|a_m| r^m \leqslant |a_\nu| r^\nu.$$

Поэтому $\nu(r) \neq m$ для любого $m < \nu$, следовательно,

$$\nu(r) \geqslant \nu = \nu(r_0).$$

Тем самым, доказано, что $\nu(r)$ – неубывающая функция.

В частности, имеет место неравенство $\nu(r_0 + 0) \geqslant \nu(r_0)$. Покажем, что, на самом деле, в этом соотношении имеет место знак равенства.

Поскольку функция $\ln\mu(r)$ выпуклая и поэтому непрерывная, то

$$\ln|a_{\nu(r_0+0)}| + \nu(r_0+0)\ln r_0 = \ln|a_{\nu(r_0)}| + \nu(r_0)\ln r_0$$

и потому

$$|a_{\nu(r_0+0)}| r_0^{\nu(r_0+0)} = |a_{\nu(r_0)}| r_0^{\nu(r_0)}.$$

Неравенство $\nu(r_0 + 0) > \nu(r_0)$ противоречит определению $\nu(r_0)$. Таким образом, функция $\nu(r)$ непрерывна справа. □

Свойства, формулируемые в лемме 2.1, общеизвестны (см., например, [16, отдел IV]) и часто цитируемы. Однако, в наше поле зрения не попало их подробное доказательство. Поэтому, не претендуя на авторство, мы сочли нужным сформулировать их в виде леммы.

Вычислим теперь правую производную функции $\ln\mu(r)$. Пусть $h>0$ – достаточно малое число. Имеем

$$\frac{1}{h}(\ln\mu(r+h)-\ln\mu(r))=\frac{1}{h}\nu(r)(\ln(r+h)-\ln r).$$

Тогда

$$(\ln\mu(r))'_+=\frac{\nu(r)}{r}. \tag{2.1}$$

Теперь из (1.4) и (2.1) следует, что

$$\ln\mu(r)=\int\limits_0^r\frac{\nu(t)}{t}\,dt=\int\limits_0^r\nu(t)\,d(\ln t).$$

Интегрированием по частям получаем далее

$$\ln\mu(r)=(\nu(t)\ln t)\,|_0^r-\int\limits_0^r\ln t\,d\nu(t)=\nu(r)\ln r-\int\limits_0^r\ln t\,d\nu(t). \tag{2.2}$$

Введем понятие определяющей последовательности функции $\nu(r)$. Пусть ρ_1, ρ_2, $\dots$, ρ_s, $\dots$ – точки скачков функции $\nu(r)$ с учетом их кратностей. Это означает, что если в точке ρ_s величина скачка равна m_s, то в написанной выше последовательности величина ρ_s встречается m_s раз. Такую последовательность будем называть *определяющей последовательностью функции* $\nu(r)$. Такое определение оправдывается тем, что функция $\nu(r)$ однозначно определяется своей определяющей последовательностью. Действительно, для любого $r\geqslant\rho_1$ найдется индекс s такой, что $\rho_s\leqslant r<\rho_{s+1}$. Тогда $\nu(r)=m_s$, если $r\in[\rho_s;\rho_{s+1})$. Если же $r\in[0;\rho_1)$, то $\nu(r)=0$.

Заметим также, что так как для трансцендентной функции $f(z)$ следующий предел бесконечен [16, отдел IV]

$$\lim_{r\to\infty}\nu(r,f)=+\infty,$$

то

$$\lim_{s\to\infty}\rho_s=+\infty.$$

Отметим далее равенство

$$\int\limits_0^r\ln t\,d\nu(t)=\ln\prod_{s=1}^{\nu(r)}\rho_s. \tag{2.3}$$

Так как из формул (1.2) и (1.3) следует, что

$$\ln\mu(r)=\ln|a_{\nu(r)}|+\nu(r)\ln r,$$

то вместе с формулами (2.2) и (2.3) это дает

$$|a_{\nu(r)}|=\prod_{s=1}^{\nu(r)}\frac{1}{\rho_s}. \tag{2.4}$$

Пусть теперь $n \in (\nu(r-0); \nu(r))$. Тогда, учитывая равенство (2.4), имеем

$$
\begin{aligned}
|a_n| r^n &\leqslant |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}, \\
|a_n| \leqslant |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)-n} &= \prod_{s=1}^{\nu(r)} \frac{1}{\rho_s} r^{\nu(r)-n} \\
&= \prod_{s=1}^{\nu(r-0)} \frac{1}{\rho_s} \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu(r)-\nu(r-0)} r^{\nu(r)-n} \\
&= \prod_{s=1}^{\nu(r-0)} \frac{1}{\rho_s} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-\nu(r-0)} = \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{\rho_s}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получаем неравенство

$$
|a_n| \leqslant \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{\rho_s}. \tag{2.5}
$$

Заметим, что если $n = \nu(r)$ для некоторого $r > 0$, то неравенство (2.5) обращается в равенство.

Обозначим

$$
\tilde{a}_n = \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{\rho_s}. \tag{2.6}
$$

Определение 2.1. *Последовательность $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая равенством* (2.6)*, называется выпуклой регуляризацией последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Ясно, что

$$
|a_n| \leqslant \tilde{a}_n, \tag{2.7}
$$

причем, если $n = \nu(r)$ для некоторого $r > 0$, то неравенство (2.7) обращается в равенство. Вообще говоря, неравенство (2.7) может обращаться в равенство и для других n.

Из приведенных выше рассуждений следует теорема.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,
$$

есть трансцендентные функции, $\nu(r, f)$ – центральный индекс функции $f(z)$, $\nu(r, f_1)$ – центральный индекс функции $f_1(z)$. Пусть выполняется неравенство $|b_n| \leqslant \tilde{a}_n$, где $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – выпуклая регуляризация последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем, если $n = \nu(r, f)$ для некоторого $r > 0$, то $|b_n| = \tilde{a}_n$. Тогда $\nu(r, f_1) = \nu(r, f)$.

Введем следующее определение.

Определение 2.2. *Пусть задан центральный индекс $\nu(r)$ и пусть $\{\rho_s\}_{s=1}^{\infty}$ — определяющая последовательность функции $\nu(r)$. Последовательность $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая равенством* (2.6)*, называется выпуклой регуляризацией функции $\nu(r)$.*

Заметим, что определение 2.1 соответствует заданной трансцендентной функции

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,
$$

в то время как определение 2.2 соответствует заданному центральному индексу $\nu(r)$.

Обозначим через T_ν множество всех трансцендентных функций с заданным центральным индексом $\nu(r)$, пусть $M(r,\nu) = \sup\limits_{f\in T_\nu} M(r,f)$. Из теоремы 2.1 получаем решение следующей экстремальной задачи.

Теорема 2.2. *Пусть задан центральный индекс $\nu(r)$. Тогда для любого $r > 0$ величина $M(r,\nu)$ в классе функций T_ν достигается на функции (одной и той же для любого $r > 0$)*

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n z^n,$$

где $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – выпуклая регуляризация функции $\nu(r)$.

Доказательство. Ясно, что $\tilde{f}(z) \in T_\nu$. Из неравенства (2.7) получаем, что для любой функции $f \in T_\nu$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, справедливо соотношение

$$M(r,f) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a|_n r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n r^n = M(r,\tilde{f}).$$

Теорема доказана. □

Следующая теорема дает представление для величины $M(r,\tilde{f})$.

Теорема 2.3. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – трансцендентная функция и $\nu(r) = \nu(r,f)$ – ее центральный индекс, $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ – определяющая последовательность точек скачков функции $\nu(r)$. Тогда*

$$M(r,\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n r^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{r}{\rho_m}\right). \tag{2.8}$$

В случае, если все скачки функции $\nu(r)$ равны 1, то

$$\begin{aligned} M(r,\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n r^n &= 1 + \int_0^{\infty} \exp\left(\int_{[0,s]} \ln\frac{r}{t}\, d\nu(t)\right) d\nu(s) \\ &= 1 + \int_0^{\infty} \mu(s) \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu(s)} d\nu(s). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство. Равенство (2.8) есть следствие равенства (2.6). В случае, если $\rho_n < \rho_{n+1}$, то

$$\prod_{m=1}^{n} \left(\frac{r}{\rho_m}\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{n} \ln\frac{r}{\rho_m}\right) = \exp\left(\int_{[0;\rho_n]} \ln\frac{r}{\rho_m}\, d\nu(t)\right).$$

Из этого соотношения уже следует второе равенство в (2.9).

Далее имеем

$$\int_{[0,s]} \ln\frac{r}{t}\, d\nu(t) = \nu(s)\ln\frac{r}{s} + \int_0^{s} \frac{\nu(t)}{t}\, dt = \ln\mu(s) + \nu(s)\ln\frac{r}{s}.$$

Отсюда получаем:

$$M(r,\tilde{f}) = 1 + \int_0^{\infty} \mu(s) \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu(s)} d\nu(s).$$

Заметим также, что если $\nu(s) = 0$ при $s < 1$, то

$$s^{\frac{\mu(s)}{\nu(s)}} = \exp\left(\int_1^s \frac{\nu(t) - \nu(s)}{t}\, d\nu(t)\right) \leqslant 1.$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.1. *В случае, если не все скачки функции $\nu(r)$ равны 1, то $M(r, \tilde{f})$ не представляется интегралом по мере ν.*

3. Вторая экстремальная задача

Центральный индекс любой трансцендентной функции $f(z)$, $f(0) = 1$, есть целочисленная, возрастающая, непрерывная справа функция $\nu(r)$ на полуоси $[0; \infty)$, причем $\nu(0) = 0$. Наоборот, любая такая функция $\nu(r)$ есть центральный индекс некоторой трансцендентной функции $f(z)$, $f(0) = 1$. Пусть, как и в параграфе 2, T_ν – это множество всех трансцендентных функций с заданным центральным индексом $\nu(r)$. Этот класс легко описывается в терминах коэффициентов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 = 1$.

Обозначим через $\mathcal{N}_\nu$ множество значений функции $\nu(r)$, и пусть $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ – определяющая последовательность точек скачков функции $\nu(r)$,

$$\tilde{a}_n = \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{\rho_s}.$$

Тогда функция $f(z) \in T_\nu$, тогда и только тогда, когда $|a_n| \leqslant \tilde{a}_n$, причем в случае $n \in \mathcal{N}_\nu$ неравенство должно обращаться в равенство.

Теорема 3.1. *Пусть $r_0 > 0$ и $\nu(r)$ – заданный центральный индекс. Тогда в классе T_ν существует функция $f_0(z)$ такая, что*

$$M(r_0, f_0) = \inf_{f \in T_\nu} M(r_0, f).$$

Доказательство. Пусть $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty} \subset T_\nu$, $\quad f_m(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} z^n$ – минимизирующая последовательность функций, т.е. такая, что

$$\lim_{m\to\infty} M(r_0, f_m) = \inf_{f \in T_\nu} M(r_0, f).$$

Из неравенства $|a_{m,n}| \leqslant \tilde{a}_n$ следует, что последовательность $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ является компактной последовательностью в топологии равномерной сходимости на компактах. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ является равномерно сходящейся на произвольном компакте комплексной плоскости. Пусть

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{m\to\infty} f_m(z).$$

Тогда

$$M(r_0, f_0) = \lim_{m\to\infty} M(r_0, f_m), \quad a_n = \lim_{m\to\infty} a_{m,n}.$$

Так как $|a_{m,n}| \leqslant \tilde{a}_n$, то $|a_n| \leqslant \tilde{a}_n$. Кроме того, поскольку $|a_{m,n}| = \tilde{a}_n$ при $n \in \mathcal{N}_\nu$, то при этих n и $|a_n| = \tilde{a}_n$. Таким образом, $f_0(z) \in T_\nu$. Теорема доказана. □

Для фиксированного $z_0 \neq 0$, $|z_0| = r_0$, обозначим через $T_\nu(r_0)$ множество функций $f(z) \in T_\nu$ таких, что $M(|z_0|, f) = |f(z_0)|$ (понятно, что множество $T_\nu(r_0)$ не пусто). Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *Существует ли функция $f_0(z) \in T_\nu(r_0)$ такая, что*
$$M(r_0, f_0) = \inf_{f\in T_\nu(r_0)} M(r_0, f)?$$

Задача 2. *Существует ли функция $f_0(z) \in T_\nu(r_0)$ такая, что*
$$M(r_0, f_0) = \sup_{f\in T_\nu(r_0)} M(r_0, f)?$$

Рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3.1, показывают, что задачи 1 и 2 разрешимы. Точнее верны следующие утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть $T_\nu(r_0)$ множество функций $f(z) \in T_\nu$ таких, что*
$$M(|z_0|, f) = |f(z_0)|.$$
Тогда существует функция $f_0(z) \in T_\nu(r_0)$ такая, что
$$M(r_0, f_0) = \inf_{f\in T_\nu(r_0)} M(r_0, f).$$

Лемма 3.2. *Пусть $T_\nu(r_0)$ множество функций $f(z) \in T_\nu$ таких, что*
$$M(|z_0|, f) = |f(z_0)|.$$
Тогда существует функция $f_0(z) \in T_\nu(r_0)$ такая, что
$$M(r_0, f_0) = \sup_{f\in T_\nu(r_0)} M(r_0, f).$$

Замечание 3.1. *В лемме* 3.1 *и в лемме* 3.2 *можно вместо класса $T_\nu(r_0)$ рассматривать класс функций $T^*_\nu(r_0) = \{f \in T_\nu : M(|z_0|, f) = f(z_0)\}$ (это множество не пусто для любого $z_0 \neq 0$). В этом случае утверждения леммы* 3.1 *и леммы* 3.2 *остаются верны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Wittich. *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen.* Springer-Verlag, Berlin. 1968.
2. A. Wiman. *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehorigen Taylor'schen Reihe* // Acta Mathematica. **37**, 305–326 (1914).
3. A. Wiman. *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Beitrage bei gegebenem Argumente der Funktion* // Acta Mathematica. **41**, 1–28 (1916).
4. G. Valiron. *Lectures on the general theory of integral functions.* AMS Chelsea Publ., New York. 2017.
5. P.C. Rosenbloom. *Probability and entire functions.* Calif. Univ. Press, Stanford. 1963.
6. R. London. *Note on a lemma of Rosenblom* // Quart. J. Math. **21**:1, 67–69 (1970).
7. P. Lockhart, E.G. Straus. *Relations between the maximum modulus and maximum term of entire functions* // Pacific J. Math. **118**:2, 479–485 (1985).
8. М.Н. Шеремета. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. **42**:2, 215–226 (1987).
9. М.Н. Шеремета. *О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. **47**:6, 119–123 (1990).
10. М.Н. Шеремета. *О соотношениях между максимальным членом и максимумов модуля целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. **51**:5, 141–148 (1992).

11. М.Н. Шеремета. *О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле* // Матем. заметки. **73**:3, 437–443 (2003).
12. П.В. Филевич. *Неравенства типа Вимана–Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка* // Сиб. матем. журн. **42**:3, 683–692 (2001).
13. П.В. Филевич. *Асимптотические соотношения между максимумом модуля и максимумом действительной части целой функции* // Матем. заметки. **75**:3, 444–452 (2004).
14. П.В. Филевич. *К теореме Валирона о соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Изв. вузов. Матем. **48**:4, 66–72 (2004).
15. П.В. Филевич. *О росте максимума модуля целой функции в зависимости от роста ее центрального индекса* // Уфимск. матем. журн. **3**:1, 94–102 (2011).
16. Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа. Т. 2.* Наука, Москва. 1978.

Константин Геннадьевич Малютин,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия

Юго-западный государственный университет,
ул. 50 лет Октября, 94,
305040, г. Курск, Россия
E-mail: `malyutinkg@gmail.com`

Михаил Владимирович Кабанко,
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: `kabankom@mail.ru`

Владислав Александрович Малютин,
Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2,
40007, г. Сумы, Украина

Riverstone International School,
5521 East Warm Springs Avenue,
Boise, ID 83716
United States of America
E-mail: `vladmaliutin2003@gmail.com`