ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 31-45.

УДК 517.537.3

СОВМЕСТНЫЕ ОЦЕНКИ КОРНЕЙ И ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Аннотация. В статье для целой функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ указаны асимптотические и равномерные границы соизмеримости скорости роста корней и убывания тейлоровских коэффициентов относительно друг друга. Отправной точкой этим исследованиям послужило следующее утверждение Адамара: если коэффициенты ряда удовлетворяют неравенству $|f_n| \leqslant \varphi(n)$ с некоторой функцией $\varphi(x)$, то модули корней растут быстрее, чем $1/\sqrt[n]{\varphi(n)}$. В работе улучшены полученные в последнее время оценки снизу совместного роста корней и коэффициентов через максимальный член ряда Тейлора функции $f(z)$ или считающую функцию ее корней. Привлечение спрямленных по Адамару коэффициентов ряда дало возможность установить соответствующие двусторонние оценки. Методами, развивающими классические идеи, найдена численная зависимость таких оценок от величин лакун степенного ряда, представляющего целую функцию. В частности, выделены случаи асимптотических равенств, связывающих корни и коэффициенты целой функции. Полученные оценки точны и усиливают известные результаты других авторов.

Ключевые слова: тейлоровские коэффициенты, корни целой функции, спрямленные по Адамару коэффициенты.

Mathematics Subjects Classifications: 30D20

1. Введение. Обзор известных результатов

В статье рассматриваются целые, т.е. аналитические во всей комплексной плоскости, трансцендентные (отличные от многочленов) функции. Такая функция представима рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

содержащим бесконечно много ненулевых членов. Будем использовать обычные в теории целых функций характеристики:

$M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ – максимум модуля функции,

$\mu_f(r) = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n| r^n$ – максимальный член ряда (1),

$\nu_f(r) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |f_n| r^n = \mu_f(r)\}$ – центральный индекс.

Пусть E_0 – класс целых функций, имеющих бесконечно много нулей. Не ограничивая общности, считаем, что в ряде (1) $f(0) \neq 0$. Последовательность $\Lambda_f = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ нулей функции $f \in E_0$ записываем с учетом кратностей в порядке возрастания модулей:

$$0 < |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{m_1}| < |\lambda_{m_1+1}| = \ldots = |\lambda_{m_2}| < \ldots, \tag{2}$$

G.G. Braichev, Joint estimates of zeros and Taylor coefficients of entire function.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-01-00236).

Поступила 15 ноября 2020 г.

а считающую и усредненную считающую функции нулей обозначаем через

$$n_f(r) = \max\{m \in \mathbb{N} : |\lambda_m| \leqslant r\} \quad \text{и} \quad N_f(r) = \int\limits_0^r \frac{n_f(t)}{t}\,dt$$

соответственно.

Имеется большое количество работ, в которых исследуется зависимость роста целой функции от скорости убывания ее тейлоровских коэффициентов или от роста и распределения ее нулей на комплексной плоскости. В одних работах (их большинство) такие характеристики роста $\ln M_f(r)$ как порядок, тип и другие вычисляются по коэффициентам ряда (1) (см. [1]–[9]). В других работах исследуется относительный рост $\ln M_f(r)$ и считающей функции корней $n_f(r)$ (обширную библиографию можно найти в работе Валирона [10]). Однако изучению непосредственной связи между тейлоровскими коэффициентами и нулями целой функции уделялось гораздо меньше внимания, хотя такая связь востребована в специальных вопросах спектральной теории операторов и интерполяционных задачах, где зачастую спектр или узлы интерполяции являются нулями некоторой целой функции. Прямые формулы, выражающие нули через коэффициенты или наоборот, слишком громоздки и не дают представления о взаимном поведении этих последовательностей ([11], [12]). Трудность преодолел Адамар [13], [14, с. 81], установив, что модули корней λ_n функции $f(z)$ растут быстрее, чем $|f_n|^{-1/n}$, и указав метод, дающий возможность сравнивать относительное поведение тейлоровских коэффициентов и нулей. Возможности метода расширил Борель [15], а Валирон придал оценкам более точную форму. Приведем один из результатов Валирона (см. [6, с. 134]).

Если коэффициенты ряда (1) *удовлетворяют условию*

$$\frac{f_{n-1}f_{n+1}}{f_n^2} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

то справедливы следующие формулы, связывающие нули и коэффициенты:

$$f_n \sim \frac{(-1)^n f_0}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}, \qquad n \to \infty,$$

$$\lambda_n \sim -\frac{f_{n-1}}{f_n}, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

Следует сказать, что функции, коэффициенты которых удовлетворяют условию (3), имеют медленный рост, точнее, удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r} = 0.$$

В своей докторской дисертации Осколков [16] при исследовании интерполяционной задачи Ньютона для быстрорастущих узлов доказал такое утверждение.

Если нули $\{\lambda_n\}$ *функции* $f(z)$ *подчинены требованию*

$$\frac{\ln n}{|\lambda_n|} \searrow 0, \qquad n \to \infty, \tag{5}$$

то коэффициенты ряда Тейлора этой функции удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|} = 1. \tag{6}$$

Приведем также (в наших обозначениях) результаты, полученные в последнее время украинскими математиками.

Пельчарська, Шеремета [17]. *Если* $f \in E_0$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n| \sqrt[n]{|f_n|} \geqslant 1. \tag{7}$$

Существует $f \in E_0$*, для которой* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\lambda_n| \sqrt[n]{|f_n|} = 1$.

Андрусяк [18]. *Если* $f \in E_0$*, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n| \sqrt[n]{|f_n|} \geqslant e^{\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)}}. \tag{8}$$

Существует функция из класса E_0*, доставляющая равенство в* (8).

Андрусяк, Филевич [19]. *Если* $f \in E_0$*, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n| \sqrt[n]{|f_n|} \geqslant e^{\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{N_f(r)}{n_f(r)}}. \tag{9}$$

Существует функция из класса E_0*, доставляющая равенство в* (9)[1].

Сформулируем результат неасимптотического характера, полученный в 1938 году Островским [20] (обозначения см. ниже, в п. 2).

Пусть $p \in \mathbb{N}$*. Если целая функция имеет по крайней мере* p *нулей, причем* $|\lambda_p| \leqslant R_p$*, то*

$$\prod_{n=1}^{p} \left(1 - \frac{|\lambda_n|}{R_p}\right) < \frac{1}{2}, \qquad |\lambda_p| > \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) R_p$$

(второе неравенство следует из первого). Константы не могут быть улучшены ни для какого p.

Целью настоящей работы является доказательство более точных оценок снизу, из которых вытекают все приведенные выше результаты. Кроме того, мы получим двусторонние оценки для нулей функции через ее тейлоровские коэффициенты, распространяя некоторые результаты Валирона [6] на лакунарные ряды. Возможность такого продвижения подсказана еще Адамаром [13]. В частности, мы показываем, что для любой целой функции $f \in E_0$ спрямленные по Адамару коэффициенты F_n ряда (1) (см. определение ниже) удовлетворяют неравенству

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{F_n |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \geqslant 1,$$

а также, что усиливает (9), – неравенству

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n \sqrt[n]{|\lambda_n|} \geqslant e^{\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{N_f(r)}{n_f(r)}}.$$

Перейдем к основной части работы.

2. Предварительные сведения

Пусть функция f задана рядом (1), т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad f(0) = f_0 = 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

(значение $f(0) = 1$ выбрано для удобства). Пусть, далее, $y = G(x)$ – уравнение ломаной Ньютона–Адамара, т.е. уравнение границы выпуклой оболочки точек $(n, -\ln|f_n|)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Эта ломаная состоит из прямолинейных звеньев, соединяющих последовательно ее вершины $(n_k, -\ln|f_{n_k}|)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Абсциссы вершин ломаной n_k, $k \in \mathbb{N}_0$, называют, согласно Валирону, центральными индексами f (точнее, ряда Тейлора функции f). Обозначим

$$F_n = e^{-G(n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и} \quad R_0 = 1, \quad R_n = e^{G(n) - G(n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[1] В работах [17]–[19] рассматривались не нули функции $f(z)$, а ее a-точки, т.е. нули функции $f(z) - a$.

Имеем очевидно

$$R_n = \frac{F_{n-1}}{F_n} \quad \text{и} \quad F_n = \frac{1}{R_1 R_2 \cdots R_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Перечислим известные свойства ломаной Ньютона–Адамара (см., например, [7]). Справедливы соотношения

$$|f_n| \leqslant F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и} \quad |f_{n_k}| = F_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ и $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ имеют одинаковые максимальные члены и центральные индексы:

$$\mu_f(r) = \max_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n| r^n = \max_{n\in\mathbb{N}_0} F_n r^n = \mu_F(r),$$

$$\nu_f(r) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |f_n| r^n = \mu_f(r)\} = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : F_n r^n = \mu_F(r)\} = \nu_F(r),$$

причем выполняются неравенства

$$|f_n| \leqslant \min_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\mu_f(r)}{r^n} = F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Коэффициенты F_n называются «спрямленными по Адамару» коэффициентами функции $f(z)$. Кусочная линейность $G(x)$ влечет выполнение соотношений

$$\nu_f(r) = 0, \quad r \in [0, R_{n_1}) \quad \text{и} \quad \nu_f(r) = n_k, \quad r \in [R_{n_k}, R_{n_{k+1}}), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\mu_f(r) = 1, \quad r \in [0, R_{n_1}) \qquad \text{и} \qquad \mu_f(r) = F_{n_k} r^{n_k}, \quad r \in [R_{n_k}, R_{n_{k+1}}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть, как и ранее, $\Lambda_f = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность нулей функции f, расположенных в порядке возрастания модулей с учетом кратностей (см. (2))

$$0 < |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{m_1}| < |\lambda_{m_1+1}| = \ldots = |\lambda_{m_2}| < \ldots.$$

Считающая функция нулей Λ_f функции f, определяемая формулой

$$n(r) = n_f(r) = \max\{m \in \mathbb{N} : |\lambda_m| \leqslant r\},$$

задается следующими равенствами

$$n(r) = 0, \quad r \in [0, |\lambda_{m_1}|) \quad \text{и} \quad n(r) = m_k, \quad r \in [|\lambda_{m_k}|, |\lambda_{m_{k+1}}|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Сравнивая с (11), видим, что $n(r)$ – центральный индекс функции

$$\Psi(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{|\lambda_1 \cdots \lambda_m|},$$

и, значит, обладает такими же свойствами, как и $\nu_f(r)$.

3. Основные результаты

Следующая теорема усиливает неравенство (7).

Теорема 3.1. *Пусть целая функция* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in E_0$ *и* F_n *– спрямленные по Адамару коэффициенты* $f(z)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \geqslant 1. \tag{12}$$

Доказательство. Согласно теореме Иенсена для всех $r > 0$ справедливо равенство

$$\ln \frac{r^{n(r)}}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n(r)}|} = N_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Отсюда при всех $r > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ вытекает неравенство

$$\ln \frac{r^n}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \leqslant N_f(r) \leqslant \ln M_f(r). \tag{13}$$

Поскольку при любом $h > 1$ выполняется условие $M_f(r) = o(\mu_f(hr)), \quad r \to +\infty$, то для достаточно больших r имеем

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(hr), \quad r > r_0(h). \tag{14}$$

Очевидным следствием неравенств (13) и (14) является оценка

$$N_f(r) \leqslant \ln \mu_f(hr), \quad h > 1, \quad r > r_0(h).$$

Из этой оценки последовательно получаем

$$\frac{r^n}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \leqslant \mu_f(hr), \qquad \frac{1}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \leqslant \frac{\mu_f(hr)}{r^n},$$

$$\frac{1}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \leqslant h^n \inf_{r > r_0(h)} \frac{\mu_f(hr)}{(hr)^n} = h^n F_n, \quad n > n_0(h).$$

Мы учли, что центральный индекс неограниченно возрастает с увеличением r. Последнее неравенство влечет соотношения

$$F_n |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \geqslant h^{-n}, \qquad n > n_0(h), \qquad \varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{F_n |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \geqslant h^{-1}.$$

Пользуясь произвольностью $h > 1$, отсюда выводим требуемую оценку (12). $\square$

Отметим, что эта оценка точна. Равенство в ней в силу результата Осколкова (см. (6)) достигается, например, на функциях с логарифмически выпуклыми коэффициентами (тогда $|f_n| = F_n, n \in \mathbb{N}_0$), нули которых удовлетворяют условию (5).

В качестве следствия, учитывая возрастание последовательности $|\lambda_n|$, получаем утверждение из теоремы Адамара [14, с. 81]:

$$\varliminf_{n \to \infty} |\lambda_n| \sqrt[n]{F_n} \geqslant 1.$$

Кроме того, используя (10), выводим

$$\varlimsup_{n \to \infty} |\lambda_n| \sqrt[n]{|f_n|} \geqslant \varlimsup_{k \to \infty} |\lambda_{n_k}| \sqrt[n_k]{|f_{n_k}|} = \varlimsup_{k \to \infty} |\lambda_{n_k}| \sqrt[n_k]{F_{n_k}} \geqslant \varliminf_{n \to \infty} |\lambda_n| \sqrt[n]{F_n} \geqslant 1,$$

т.е. выполняется оценка (7):

$$\varlimsup_{n \to \infty} |f_n| \sqrt[n]{|\lambda_n|} \geqslant 1.$$

Наконец, используя (12) и тот факт, что верхний предел Даламбера не меньше, чем верхний предел Коши[1], выводим

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{|\lambda_n|}{R_n} \geqslant \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|}{R_1 R_2 \cdots R_n}} = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{F_n |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|} \geqslant 1.$$

Таким образом, справедливо

[1]Следует из неравенства Штольца.

Следствие 3.1. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in E_0,\quad F_n$ *– спрямленные по Адамару коэффициенты* $f(z),\quad R_n=\frac{F_{n-1}}{F_n}$ *и* $\{\lambda_n\}$ *– последовательность (всех) ее нулей, расположенных в порядке неубывания модулей. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|\lambda_n|}{R_n}\geqslant 1. \tag{15}$$

Полученное неравенство является точным, равенство достигается на некотором классе целых функций с лакунарными тейлоровскими рядами. Это будет видно из результатов следующего раздела, в котором устанавливаются двусторонние оценки отношений $\dfrac{|\lambda_n|}{R_n}$ (см., например, теорему 4.1).

Покажем сейчас, что из неравенства (15) вытекает оценка (8) работы [18], цитируемая во введении. Действительно, предположение, что оценка (8) не выполняется, влечет при некотором $q\in(0,1)$ неравенство

$$|\lambda_m|\sqrt[m]{F_m}<qe^{\frac{\ln F_m R_m^m}{m}},\quad m>m_0.$$

После элементарных преобразований приходим к оценке

$$|\lambda_m|<qR_m,\quad m>m_0,$$

которая противоречит (15).

Следующим нашим шагом будет доказательство результата, уточняющего оценку (9). Предварительно введем следующие величины

$$\underline{\nu}_f=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N_f(r)}{n_f(r)},\qquad \overline{\nu}_f=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_f(r)}{n_f(r)},$$

названные в работе [21] нижней и верхней относительными плотностями последовательности Λ_f соответственно.

Теорема 3.2. *Пусть целая функция* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n\in E_0,\quad F_n$ *– спрямленные по Адамару коэффициенты* $f(z)$, *а* $\underline{\nu}_f$ *– нижняя относительная плотность последовательности ее нулей. Тогда выполняется неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty}|\lambda_n|\sqrt[n]{F_n}\geqslant e^{\underline{\nu}_f}. \tag{16}$$

Доказательство. Последовательно преобразуем

$$\underline{\nu}_f=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N_f(r)}{n_f(r)}=\varliminf_{k\to\infty}\left(\inf_{r\in[|\lambda_{m_k}|,|\lambda_{m_{k+1}}|)}\frac{N_f(r)}{n_f(r)}\right)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{N(|\lambda_{m_k}|)}{m_k}$$
$$=\varliminf_{k\to\infty}\left(\inf_{m\in(m_{k-1},m_k]}\frac{N(|\lambda_m|)}{m}\right)=\varliminf_{m\to\infty}\frac{N(|\lambda_m|)}{m}.$$

Мы учли то, что $|\lambda_m|=|\lambda_{m_k}|$ для $m\in(m_{k-1},\,m_k]$. Пусть теперь M — множество индексов, на которых достигается нижний предел в оценке (16), т.е.

$$\varliminf_{m\to\infty}|\lambda_m|\sqrt[m]{F_m}=\lim_{m\in M}|\lambda_m|\sqrt[m]{F_m}.$$

Предположим, что неравенство (16) не выполняется. Тогда для некоторого $q\in(0,1)$ и всех $m\in M$, $m>m_0$ имеем

$$|\lambda_m|\sqrt[m]{F_m}<qe^{\frac{N(|\lambda_m|)}{m}},$$

или, возводя в степень m,

$$|\lambda_m|^m F_m < q^m e^{N(|\lambda_m|)} = q^m \frac{|\lambda_m|^m}{|\lambda_1|\cdots|\lambda_m|}.$$

После сокращения на $|\lambda_m|^m$ имеем последовательно

$$F_m < \frac{q^m}{|\lambda_1|\cdots|\lambda_m|}, \qquad F_m|\lambda_1|\cdots|\lambda_m| < q^m,$$
$$\varliminf_{m\to\infty} \sqrt[m]{F_m|\lambda_1\cdots\lambda_m|} \leqslant \varliminf_{m\in\mathbb{M}} \sqrt[m]{F_m|\lambda_1\cdots\lambda_m|} \leqslant q < 1.$$

Но это противоречит неравенству (12) теоремы 3.1. Теорема 3.2 доказана. □

В оценке (16) фигурируют нижние пределы. Относительно верхних пределов аналогичных величин справедлив следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть целая функция* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in E_0$ *и* F_n *– спрямленные по Адамару коэффициенты* $f(z)$*, а* $\overline{\nu}_f$ *– верхняя относительная плотность последовательности ее нулей. Тогда выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\lambda_{n+1}| \sqrt[n]{F_n} \geqslant e^{\overline{\nu}_f}. \tag{17}$$

Доказательство. Действуем так же, как и при доказательстве неравенства (16). В этом случае имеем

$$\overline{\nu}_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_f(r)}{n_f(r)} = \varlimsup_{k\to\infty} \left(\sup_{r\in[|\lambda_{m_k}|,|\lambda_{m_{k+1}}|)} \frac{N_f(r)}{n_f(r)} \right)$$
$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N_f(|\lambda_{m_{k+1}}|)}{m_k} =: \lim_{k\in K} \frac{N_f(|\lambda_{m_{k+1}}|)}{m_k}.$$

Здесь K – множество индексов, на которых достигается верхний предел в последнем равенстве. Из определения верхней относительной плотности находим для малого $\varepsilon > 0$ номер k_0, такой, что при всех $k > k_0$, $k \in \mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$\frac{N_f(|\lambda_{m_{k+1}}|)}{m_k} > \overline{\nu}_f - \varepsilon. \tag{18}$$

Понадобится также связь

$$N_f(|\lambda_{m_{k+1}}|) - N_f(|\lambda_{m_k}|) = \int\limits_{|\lambda_{m_k}|}^{|\lambda_{m_{k+1}}|} \frac{n_f(t)}{t}\,dt = m_k \ln\frac{|\lambda_{m_{k+1}}|}{|\lambda_{m_k}|}, \tag{19}$$

вытекающая из определения $N_f(r)$. Предположим, что (17) не выполняется, т.е.

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\lambda_{n+1}| \sqrt[n]{F_n} < e^{\overline{\nu}_f}.$$

Тогда для некоторого $q \in (0,1)$ при всех достаточно больших $n > n_0$ имеем

$$|\lambda_{n+1}| \sqrt[n]{F_n} < q e^{\overline{\nu}_f - \varepsilon}.$$

Полагая здесь $n = m_k$, $k \in K$, $k > k_0$, с учетом (18) и (19) получим

$$|\lambda_{m_{k+1}}| \sqrt[m_k]{F_{m_k}} < q e^{\frac{N_f(|\lambda_{m_{k+1}}|)}{m_k}} = q\frac{|\lambda_{m_{k+1}}|}{|\lambda_{m_k}|} e^{\frac{N_f(|\lambda_{m_k}|)}{m_k}},$$

или, после сокращения и возведения в степень m_k,

$$F_{m_k} < \frac{q^{m_k}}{|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{m_k}|}.$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, отсюда получаем противоречие неравенству (12). Теорема 3.3 доказана. $\square$

Принимая во внимание известные соотношения между порядками и относительными плотностями [22, теорема 2.6.1(d)]

$$\underline{\nu}_f \leqslant \frac{1}{\rho_f} \leqslant \frac{1}{\lambda_f} \leqslant \overline{\nu}_f$$

(здесь ρ_f и λ_f – порядок и нижний порядок целой функции f соответственно), можем вывести из теоремы 3.3

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Тогда справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_{n+1}| \sqrt[n]{F_n} \geqslant e^{\frac{1}{\lambda_f}}.$$

В частности, для целых функций нулевого нижнего порядка имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_{n+1}| \sqrt[n]{F_n} = +\infty.$$

Рассмотрим пример. Пусть $f(z) = e^{z^\rho} - 1$, $\rho \in \mathbb{N}$. Имеем $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^{\rho k}}{k!}$, и простые подсчеты дают

$$R_n = \sqrt[\rho]{\frac{n}{\rho}}, \quad \nu(r) = \max\{n : R_n \leqslant r\} = [\rho r^\rho], \quad \ln \mu(r) \sim \ln M(r) = r^\rho, r \to \infty.$$

Нули функции находятся из условия $z^\rho = 2\pi k i$, где $k \in \mathbb{Z}$. Все нули простые, кроме $z = 0$ кратности ρ. На окружности радиуса $\sqrt[\rho]{2\pi|k|}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, с центром в начале расположены 2ρ нулей. Для нетривиальных нулей, занумерованных индексом $n \in \mathbb{N}$ в порядке неубывания модулей, запишем

$$|\lambda_n| = \sqrt[\rho]{2\pi \left(1 + \left[\frac{n-1}{2\rho}\right]\right)} \sim \sqrt[\rho]{\frac{\pi n}{\rho}}, \quad n \to \infty$$

($[x]$ – целая часть числа x). Проведенные вычисления приводят к формулам

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{R_n} = \sqrt[\rho]{\pi}, \qquad \nu := \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu(r)}{\nu(r)} = \frac{1}{\rho},$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n| \sqrt[n]{F_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_{n+1}| \sqrt[n]{F_n}$$
$$= \lim_{m\to\infty} |\lambda_{\rho m}| \sqrt[\rho m]{F_{\rho m}} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[\rho]{\pi m} \sqrt[\rho m]{\frac{1}{m!}} = \sqrt[\rho]{\pi e}.$$

Заметим, что ряд Тейлора рассмотренной функции является лакунарным с лакунами размера ρ. При этом, каждая из общих формул (15)–(17) отличается от соответствующей формулы из данного примера на множитель $\sqrt[\rho]{\pi}$, стремящийся к единице при неограниченном возрастании ρ. Эта тенденция проявится в следующем разделе, посвященном лакунарным рядам (см. ниже теорему 4). Точность полученных выше результатов подтверждает также рассмотренный в работе [23, теорема 3] пример функции $f(z) = e^{z^\rho} g(z) + a$, где $\rho \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ и $g(z)$ – целая функция минимального типа при порядке ρ.

4. Оценки для лакунарных рядов Тейлора

В этом разделе, совершенствуя методы, восходящие к Адамару, Борелю, Валирону, мы находим асимптотические и равномерные оценки, связывающие нули и тейлоровские коэффициенты целых лакунарных степенных рядов

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n, \qquad f_n \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_1 = \{n_i\} \subset \mathbb{N}. \tag{20}$$

Используем ранее введенные обозначения: F_n – спрямленные по Адамару коэффициенты, $R_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$, m_k – центральные индексы ряда (20). Положим также

$$\alpha_k = \frac{R_{m_{k+1}}}{R_{m_k}}, \qquad \gamma_i = n_i - n_{i-1}, \qquad n_i \in \mathbb{N}_1.$$

Центральными лакунами назовем лакуны, примыкающие к центральным индексам m_k функции f. Речь идет о лакунах

$$\gamma_k' = m_k - n_k', \quad \gamma_k'' = n_k'' - m_k, \quad \tilde{\gamma}_k = \min\{\gamma_k', \gamma_k''\},$$

где

$$n_k' = \max\{n \in \mathbb{N}_1 : n < m_k\}, \quad n_k'' = \min\{n \in \mathbb{N}_1 : n > m_k\}.$$

Все готово для формулировки результата.

Теорема 4.1. *Пусть ряд* (20) *имеет неограниченные центральные лакуны, точнее, выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\gamma}_k = \infty. \tag{21}$$

Пусть также выполнено следующее условие на коэффициенты

$$\frac{R_{m_{k+1}}}{R_{m_k}} := \alpha_k \geqslant \left(1 + \frac{\ln \tilde{\gamma}_k}{\tilde{\gamma}_k}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Тогда функция (20) *имеет бесконечно много нулей* $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, *причем справедливо асимптотическое соотношение*

$$|\lambda_n| \sim R_n, \qquad n \to \infty. \tag{23}$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Для значений $r \in [R_{m_k}, R_{m_{k+1}})$ центральным индексом функции f служит $\nu_f(r) = m_k$, а максимальным членом будет $\mu_f(r) = |f_{m_k}| r^{m_k}$. Разобьем ряд в (20) на части следующим образом:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n = \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n + f_{m_k} z^{m_k} + \sum_{n>m_k, n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n.$$

Выберем числа p_k, q_k из интервала $(0,1)$ так, чтобы $p_k q_k > \alpha_k^{-1}$, и оценим суммы

$$S_1(z) := \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n, \qquad S_2(z) := \sum_{n>m_k, n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n$$

на окружностях $|z| = r = \alpha R_{m_k}$, где $\alpha \in \left[\frac{1}{p_k}, q_k\alpha_k\right)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{|S_1(z)|}{\mu_f(r)} &\leqslant \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} \left|\frac{f_n}{f_{m_k}}\right| \frac{1}{r^{m_k-n}} \leqslant \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} \frac{F_n}{F_{m_k}} \frac{1}{r^{m_k-n}} \\
&\leqslant \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} \frac{R_{n+1}\cdots R_{m_k}}{r^{m_k-n}} \leqslant \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} \left(\frac{R_{m_k}}{r}\right)^{m_k-n} = \sum_{n<m_k, n\in\mathbb{N}_1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m_k-n} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m_k-n_k'} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{-i} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m_k-n_k'}}{1-\alpha^{-1}} \leqslant \frac{p_k^{m_k-n_k'}}{1-p_k}.
\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|S_1(z)| \leqslant \mu_f(r)\frac{p_k^{\gamma_k'}}{1-p_k}, \qquad |z| = r = \alpha R_{m_k} \in [p_k^{-1}R_{m_k}, R_{m_{k+1}}). \tag{24}$$

Далее, для тех же $z \in \mathbb{C} : |z| = r = \alpha R_{m_k}$ имеем

$$\left|\frac{f_n}{f_{m_k}} z^{n-m_k}\right| \leqslant \frac{F_n}{F_{m_k}} r^{n-m_k} = \frac{r^{n-m_k}}{R_{m_{k+1}} \cdots R_n} \leqslant \left(\frac{r}{R_{m_{k+1}}}\right)^{n-m_k} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_k}\right)^{n-m_k},$$

$$\frac{|S_2(z)|}{\mu_f(r)} \leqslant \sum_{n>m_k,\, n\in\mathbb{N}_1} \left|\frac{f_n}{f_{m_k}} z^{n-m_k}\right| \leqslant \sum_{n>m_k,\, n\in\mathbb{N}_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha_k}\right)^{n-m_k}$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha_k}\right)^{n_k''-m_k} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha_k}\right)^i = \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha_k}\right)^{n_k''-m_k}}{1-\frac{\alpha}{\alpha_k}} \leqslant \frac{q_k^{n_k''-m_k}}{1-q_k}.$$

Таким образом, выполняется оценка

$$|S_2(z)| \leqslant \mu_f(r)\frac{q_k^{\gamma_k''}}{1-q_k}, \qquad |z| = r = \alpha R_{m_k} \in [R_{m_k},\, q_k R_{m_{k+1}}). \tag{25}$$

Объединяя оценки (24) и (25), заключаем

$$|S_1(z)| + |S_2(z)| \leqslant \mu_f(r) T(p_k, q_k), \qquad |z| = r \in [p_k^{-1}R_{m_k}, q_k R_{m_{k+1}}), \tag{26}$$

где

$$T(p_k, q_k) = \frac{p_k^{\gamma_k'}}{1-p_k} + \frac{q_k^{\gamma_k''}}{1-q_k}.$$

Несколько огрубляя и считая для простоты $p_k \leqslant q_k$, $k \in \mathbb{N}$, отсюда получаем

$$T(p_k, q_k) \leqslant 2\frac{q_k^{\tilde{\gamma}_k}}{1-q_k}.$$

Покажем, что можно выбрать q_k так, чтобы были выполнены условия

$$q_k^{-2} \leqslant \alpha_k, \qquad \frac{q_k^{\tilde{\gamma}_k}}{1-q_k} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{27}$$

Для этого обозначим $\varepsilon_k = \dfrac{\ln \tilde{\gamma}_k}{\tilde{\gamma}_k}$ и положим $q_k^{-1} = 1 + \varepsilon_k$. Действительно,

$$q_k^{-2} = (1+\varepsilon_k)^2 \leqslant \alpha_k,$$

и первое условие в (27) выполняется. Далее, поскольку $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $q_k \to 1$, и мы получаем

$$\frac{q_k^{\tilde{\gamma}_k}}{1-q_k} = 1/q_k \frac{(1/q_k)^{-\tilde{\gamma}_k}}{1/q_k - 1} \sim \frac{1}{\varepsilon_k}(1+\varepsilon_k)^{-\tilde{\gamma}_k} = \frac{1}{\varepsilon_k}\left[(1+\varepsilon_k)^{\frac{1}{\varepsilon_k}+1}\right]^{\frac{-\tilde{\gamma}_k}{\frac{1}{\varepsilon_k}+1}}$$

$$< \frac{1}{\varepsilon_k} e^{\frac{-\tilde{\gamma}_k}{\frac{1}{\varepsilon_k}+1}} < \frac{2}{\varepsilon_k} e^{-\tilde{\gamma}_k \varepsilon_k} = \frac{2\tilde{\gamma}_k}{\ln \tilde{\gamma}_k} e^{-\frac{\tilde{\gamma}_k \ln \tilde{\gamma}_k}{\tilde{\gamma}_k}} = \frac{2}{\ln \tilde{\gamma}_k} \to 0, \quad k \to \infty,$$

и второе условие в (27) также выполняется. Учитывая оценки (26) и (27), заключаем

$$|S_1(z)| + |S_2(z)| < \mu_f(r), \qquad |z| = r \in [p_k^{-1}R_{m_k}, q_k R_{m_{k+1}}), \quad k > k_0. \tag{28}$$

Согласно теореме Руше функция $f(z) = S_1(z) + S_2(z) + f_{m_k} z^{m_k}$ при $k > k_0$ в круге $|z| < p_k^{-1} R_{m_k}$ имеет столько же нулей, сколько и функция $f_{m_k} z^{m_k}$, т.е. m_k, а в круге $|z| < q_{k-1}^{-1} R_{m_k}$ имеет m_{k-1} нулей. Отсюда следует, что для достаточно больших k в кольце

$$q_{k-1}^{-1} R_{m_k} < |z| < p_k^{-1} R_{m_k}, \quad k > k_0, \tag{29}$$

находятся $m_k - m_{k-1}$ нулей функции $f(z)$. Значит, для нулей λ_n этой функции с индексами $n \in (m_{k-1}, m_k]$ выполняются неравенства

$$q_{k-1}^{-1} < \frac{|\lambda_n|}{R_{m_k}} < p_k^{-1}, \qquad n \in (m_{k-1}, m_k], \quad k > k_0.$$

Однако, для таких индексов n имеем $R_n = R_{m_k}$, и в итоге получаем

$$q_{k-1}^{-1} < \frac{|\lambda_n|}{R_n} < p_k^{-1}, \qquad n \in (m_{k-1}, m_k], \quad k > k_0.$$

Отсюда выводим, что

$$1 = \lim_{k\to\infty} q_{k-1}^{-1} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{R_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{R_n} \leqslant \lim_{k\to\infty} p_k^{-1} = 1,$$

и соотношение (23) выполняется. Теорема доказана. □

Отметим, что асимптотика (23) доказывает точность оценки (15) следствия 3.1 теоремы 3.1. Сделаем еще ряд замечаний.

Замечание 4.1. *Величина начального члена f_0 ряда* (20) *не влияет на асимптотику нулей функции f, поэтому утверждение теоремы остается в силе не только для нулей, но также и для всех a-точек функции f, т.е. для нулей функции $f - a$, $\quad a \in \mathbb{C}$.*

Замечание 4.2. *Условие* (21) *теоремы очевидным образом выполняется, если все, а не только центральные лакуны ряда* (20) *неограничены, т.е. если*

$$\lim_{i\to\infty} \gamma_i = \lim_{i\to\infty} (n_i - n_{i-1}) = \infty.$$

Это условие легче проверяется, так как не требует нахождения значений центрального индекса ряда. Такой проверки не требуется и если последовательность $\{|f_n|\}$, где $n \in \mathbb{N}_1$, строго логарифмически выпукла, так как тогда множество $\mathbb{N}_1 = \{m_k\}$, т.е. состоит из всех центральных индексов ряда (20). В этом случае можно уточнить положение нулей.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и, кроме того, последовательность $\{|f_n|\}$, где $n \in \mathbb{N}_1$, строго логарифмически выпукла. Тогда для нулей $\{\lambda_n\}$ функции* (20) *справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda_n = \left(-\frac{f_{m_{k-1}}}{f_{m_k}}\right)^{\frac{1}{m_k - m_{k-1}}} (1 + o(1)), \qquad n \in (m_{k-1}, m_k], \quad k \to \infty, \tag{30}$$

где при каждом n выбирается свое значение степени.

Доказательство. Действительно, в этом случае множество, по которому суммируется ряд (20), состоит из значений центральных индексов: $\mathbb{N}_1 = \{m_k\}$. Поэтому выполняются равенства

$$|f_{m_k}| = F_{m_k}, \quad \gamma_k = m_k - m_{k-1}, \quad R_{m_k} = \left|\frac{f_{m_{k-1}}}{f_{m_k}}\right|^{\frac{1}{\gamma_k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ряд в (20) представим в следующем виде

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n = \sum_{n<m_{k-1},n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n + f_{m_{k-1}} z^{m_{k-1}} + f_{m_k} z^{m_k} + \sum_{n>m_k,n\in\mathbb{N}_1} f_n z^n$$
$$=: S_1'(z) + f_{m_{k-1}} z^{m_{k-1}} + f_{m_k} z^{m_k} + S_2(z).$$

Очевидно, сумма S_1' имеет ту же оценку (24), что и S_1; сумма S_2 и ее оценка (25) не изменились. Поэтому сохранится и оценка (26):

$$|S_1'(z)| + |S_2(z)| \leqslant \mu_f(r) T(p_k, q_k), \qquad |z| = r \in [p_k^{-1} R_{m_k}, q_k R_{m_{k+1}}).$$

Учитывая эту оценку, для z, удовлетворяющих неравенству

$$|f_{m_{k-1}} z^{m_{k-1}} + f_{m_k} z^{m_k}| \geqslant |f_{m_k} z^{m_k}|,$$

получаем

$$|f(z)| = |S_1'(z) + f_{m_{k-1}}\, z^{m_{k-1}} + f_{m_k}\, z^{m_k} + S_2(z)|$$
$$\geqslant |f_{m_{k-1}}\, z^{m_{k-1}} + f_{m_k}\, z^{m_k}| - (|S_1'(z)| + |S_2(z)|) > \mu_f(r)(1 - T(p_k,\, q_k)) > 0$$

при $k > k_0$. Следовательно, нули функции f лежат в пересечении колец (29) и множеств

$$\left|\frac{f_{m_{k-1}}}{f_{m_k}} + z^{m_k - m_{k-1}}\right| < r^{m_k - m_{k-1}}, \qquad |z| = r, \quad k > k_0.$$

Каждое такое множество есть прообраз полуплоскости $\left|\dfrac{f_{m_{k-1}}}{f_{m_k}} + t\right| < |t|$ при отображении функцией $t = z^{m_k - m_{k-1}} = z^{\gamma_k}$. Обозначая $\varphi_k = \arg\left(-\dfrac{f_{m_{k-1}}}{f_{m_k}}\right)$, в этой полуплоскости имеем $\arg t \in (\varphi_k - \pi/2, \varphi_k + \pi/2)$. Возвращаясь в плоскость переменной z, для нулей λ_n получаем при некоторых целых $s_n \in [0,\, \gamma_k)$

$$\arg \lambda_n \in \left(\frac{\varphi_k + 2\pi s_n}{\gamma_k} - \frac{\pi}{2\gamma_k}, \frac{\varphi_k + 2\pi s_n}{\gamma_k} + \frac{\pi}{2\gamma_k}\right).$$

Здесь для каждого n выбирается свое значение $s_n \in [0, \gamma_k)$, фиксирующее значение корня. Это завершает доказательство, поскольку $\dfrac{\pi}{2\gamma_k} \to 0$, $k \to \infty$. $\square$

Отметим, что формула (30) является аналогом формулы Валирона (4), полученной для ряда (1) без лакун.

Замечание 4.3. *Возможно, условие* (22) *не является необходимым для справедливости теоремы 4.1. Однако автору не удалось исключить его из формулировки. Тем не менее, это условие можно немного облегчить, потребовав, чтобы при некотором $a \in (0,1)$ имело место неравенство*

$$\frac{R_{m_{k+1}}}{R_{m_k}} = \alpha_k \geqslant \left(1 + \frac{\ln(\tilde{\gamma}_k / \ln^a \tilde{\gamma}_k)}{\tilde{\gamma}_k}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > k_0.$$

Замечание 4.4. *Из доказательства теоремы 4.1 видно, что если выполняются условие* (22) *и условие*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \min\{\tilde{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k-1}\} = +\infty,$$

причем верхий предел достигается на множестве индексов $k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N}$, то асимптотика (23) *сохраняет силу на множестве $\mathbb{K}$:*

$$|\lambda_n| \sim R_n, \quad n \in (m_k, m_{k+1}], \quad \mathbb{K} \ni k \to \infty.$$

Рассмотрим теперь случай, когда лакуны ряда (20) (точнее, центральные лакуны) вместо (21) удовлетворяют условию

$$\varliminf_{k\to\infty} \tilde{\gamma}_k = \rho < +\infty. \tag{31}$$

Очевидно, $\rho \in \mathbb{N}$. Введем функцию

$$\varphi_\rho(\tau) = \varphi(\tau) = \frac{\tau^\rho}{1-\tau}, \quad \tau \in [0,1)$$

и обозначим через τ_ρ корень уравнения $\varphi(\tau) = 1/2$, т.е. корень на $(0,1)$ уравнения

$$2\tau^\rho + \tau - 1 = 0. \tag{32}$$

Нетрудно проверить, что $\tau_1 = 1/3, \tau_2 = 1/2, \tau_3 = 0.5897\ldots$, и, вообще, $\tau_\rho \nearrow 1$ при неограниченном возрастании $\rho \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.3. *Пусть лакуны ряда* (20) *удовлетворяют условию* (31), *а его коэффициенты – следующему условию*

$$\frac{R_{m_{k+1}}}{R_{m_k}} \geqslant \beta > \tau_\rho^{-2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > k_0, \tag{33}$$

в котором τ_ρ – корень уравнения (32). *Тогда нули λ_n функции* (20) *удовлетворяют неравенствам*

$$x_\rho \leqslant \frac{|\lambda_n|}{R_n} \leqslant \frac{1}{x_\rho}, \qquad n \geqslant n_0,$$

где x_ρ – больший корень уравнения

$$\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x\beta}\right) = \frac{x^\rho}{1-x} + \frac{(\beta x)^{1-\rho}}{\beta x - 1} = 1. \tag{34}$$

Доказательство. Обозначим через G область, ограниченную кривыми, определяемыми уравнениями $yx = 1/\beta$ и $\varphi(x) + \varphi(y) = 1$, $x \in (0,1)$. Условие (33) обеспечивает непустоту этой области. Будем использовать оценки, полученные при доказательстве теоремы 4.1, полагая в них $p_k = p$, $q_k = q$ с константами p, q, подчиненными условию $\dfrac{1}{pq} < \beta$. Поскольку в рассматриваемом случае $\tilde{\gamma}_k \geqslant \rho$, то оценка (26) примет вид

$$|S_1(z)| + |S_2(z)| \leqslant \mu_f(r) T(p,q), \qquad |z| = r \in [p^{-1}R_{m_k}, qR_{m_{k+1}}),$$

где $T(p,q) = \dfrac{p^\rho}{1-p} + \dfrac{q^\rho}{1-q}$. Оценка (28) также сохранится и примет вид

$$|S_1(z)| + |S_2(z)| < \mu_f(r), \qquad |z| = r \in [p^{-1}R_{m_k}, qR_{m_{k+1}}), \quad k > k_0,$$

если потребовать, чтобы точка $(p,q) \in G$, т.е. чтобы выполнялось условие

$$T(p,q) = \frac{p^\rho}{1-p} + \frac{q^\rho}{1-q} = \varphi(p) + \varphi(q) < 1.$$

Отсюда, как и ранее, основываясь на теореме Руше, получаем неравенства

$$q < \frac{|\lambda_n|}{R_n} < p^{-1}, \qquad n \in (m_{k-1}, m_k], \quad k > k_0.$$

Для завершения доказательства осталось устремить точку $(p,q) \in G$ поочередно к точкам пересечения кривых, ограничивающих область G. □

Поскольку область G симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то выполняется неравенство $\tau_\rho < x_\rho$. Это позволяет сформулировать результат, не требующий нахождения корня уравнения (34).

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда нули λ_n функции (20) удовлетворяют неравенствам*

$$\tau_\rho < \frac{|\lambda_n|}{R_n} < \frac{1}{\tau_\rho}, \qquad n \geqslant n_0,$$

где $\tau_\rho \in (0,1)$ есть корень уравнения $2\tau^\rho + \tau - 1 = 0$.

В частности, для четных (нечетных) целых функций с логарифмически выпуклыми тейлоровскими коэффициентами, удовлетворяющими при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ условию

$$\frac{R_{2k+2}}{R_{2k}} \geqslant \beta > 4, \qquad \left(\frac{R_{2k+1}}{R_{2k-1}} \geqslant \beta > 4\right),$$

можно утверждать, что выполняется двусторонняя оценка

$$1/2 < \frac{|\lambda_n|}{R_n} < 2, \qquad n \geqslant n_0.$$

Отметим, что в случае $\rho = 1$ (например, когда лакуны в ряде (20) отсутствуют), из теоремы 4.3 получаем результат Адамара [13], улучшенный затем Валироном [6, с. 132], который ослабил требование $\beta > 9$ в условии (33) на требование $\beta > 4.8$. В этом случае, как и для рядов (20) с неограниченными лакунами, теорему 4.3 можно было бы уточнить, указав углы на комплексной плоскости, свободные от нулей функции $f(z)$. Например, если коэффициенты ряда (20) положительны и логарифмически выпуклы, то при выполнении условий теоремы 4.3 все нули $f(z)$ находятся в левой полуплоскости. Некоторые уточнения теоремы 4.3, полученные другими методами для полиномов и целых функций, удовлетворяющих условию $\frac{R_{m_{k+1}}}{R_{m_k}} \geqslant \beta$ при различных β, можно найти в работе [24]. Однако, желаемой точности в общем случае здесь достичь пока не удалось, и такая задача еще ждет своего решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Hadamard. *Sur la croissance des fonctions entières* // Bull. Soc. math. **24**, 186–187 (1896).
2. E. Borel. *Leçons sur les fonctions entières.* Paris: Gauthier-Villars, 2e édition. 1921.
3. E. Lindelöf. *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* // Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. **XXXI**:1 (1903).
4. E. Lindelöf. *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor* // Bull. Sciences math. deuxieme serie. **XXVII**, 213–232 (1903).
5. A. Pringsheim. *Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung* // Mathematische Annalen. **58**, 257–342 (1904).
6. G. Valiron. *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière* // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, **5**, 117–257 (1913).
7. G. Valiron. *Lectures on the general Theory of integral functions.* Toulouse: Private. 1923.
8. В.А. Осколков. *О некоторых вопросах теории целых функций* // Матем. сб. **184**:1, 129–148 (1993).
9. М.Н. Шеремета. *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* // Изв. вузов. Математика. **2**, 100–108 (1967)
10. G. Valiron. *Fonctions entières et mèromorphes d'une varable. Mémorial des sciences mathématiques.* Paris: Gauthier-Villars, fascicule 2. 1925.
11. M.E. Iaggi. *Relations entre les zero et les coefficients d'une fonction entière* // Nouvelles Annales de mathématiques. Série 4, **1**, 16-19 (1901).
12. M.E. Iaggi. *Sur les zéros des fonctions entières* // Nouvelles annales de mathématiques. Série 4, **2**, 218–226 (1902).
13. J. Hadamard. *Sur les fonctions entières* // C.R. Acad. Science Fr. séance du 29 decembre, 1309–1311 (1902).

14. J. Hadamard.*Étude sur les propriétées des fonctions entières et en parliculièr, une fonction, etudié par Riemann.* Selecta. Paris: Gauthier-Villars. 1935.
15. E. Borel. *Sur les Zeros des fonctions entières* // Acta Math. **20**, 357–396 (1897).
16. В.А. Осколков. *Свойства функций, заданных значениями их линейных функционалов* // Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ. 1994.
17. І.В. Пельчарська, М.М. Шеремета. *Про розподіл значень і коефіцієнти степеневого розвинення цілої функції* // Доп. НАН України. **5**, 21–25 (2005).
18. І.В. Андрусяк. *Нулі і коефіцієнти аналітичних функцій* // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка, Фізико-математичні науки". **625**, 43–47 (2008).
19. І.В. Андрусяк, П.В. Филевич. *Коефіцієнти степеневого розвинення а-точки цілой функції* // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка, Фізико-математичні науки". **804**, 70–74 (2014).
20. A. Ostrovski. *Sur les modules des zeros des fonctions entières* // C.R. Acad. Sci. **206**, 1541 (1938).
21. Г.Г. Брайчев. *Точные соотношения между некоторыми характеристиками роста последовательностей* // Уфимск. матем. журн. **5**:4, 17–30 (2013).
22. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels. *Regular variation.* Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge: Cambridge university Press. **27**. 1989.
23. І.В. Андрусяк, П.В. Филевич. *Коефіцієнти степеневого розвинення і а-точки цілой функції, яка маєБорелеве виняткове значення* // Укр. матем. журн. **68**: 2, 147–155 (2016).
24. D.M. Simeunović. *Sur la répartition des zéros d'une class de polynômes* // Publication de l'institut Mathématique, Nouvelle série. **28**(42), 187–194 (1980).

Георгий Генрихович Брайчев
Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, 1, строение 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: `braichev@mail.ru`