ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 66-79.

УДК 517.984, 517.928

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

Х.К. ИШКИН, Р.И. МАРВАНОВ

Аннотация. Для модельного оператора $L(\varepsilon)$, связанного с уравнением Орра–Зоммерфельда, изучается вопрос о необходимости известных условий А.А. Шкаликова, достаточных для локализации спектра около графа формы «Y». Рассмотрены 2 типа потенциалов, при которых Γ_∞ – неограниченная часть предельного спектрального графа (ПСГ) – построена в явном виде. Первый из них – кусочно-постоянный потенциал с счетным числом скачков. Показано, что если точки разрыва потенциала достаточно быстро сходятся к одному из концов интервала $(0,1)$, то Γ_∞ состоит из счетного числа лучей. Второй тип представляет потенциал, склеенный из двух голоморфных функций. Показано, что Γ_∞ состоит из двух кривых, если некоторая производная потенциала в точке склейки терпит скачок и выполняются условия Лангера на области, ограниченные линиями Стокса, при которых удается строить ВКБ-разложения. При бесконечно дифференцируемой склейке одних ВКБ-оценок для выявления спектральных портретов недостаточно. В связи с этим рассмотрена обратная задача: по некоторым спектральным данным выявить аналитические свойства потенциала вблизи интервала $(0,1)$. Чтобы понять характер спектральных данных, предварительно решена прямая задача с выходом в комплексную ε-плоскость. Оказалось, если предположить голоморфность потенциала в окрестности отрезка $[0,1]$, то при малых ε из сектора $\mathcal{E}$ раствора $\pi/2$ для части спектра $L(\varepsilon)$ вне некоторого круга выполняются условия квантования типа Бора–Зоммерфельда. В заключительной части решена обратная задача. В качестве спектральных данных выбраны полученные в прямой задаче условия квантования в чуть ослабленной форме. Доказано, что если потенциал – монотонная непрерывно дифференцируемая функция и выполнены указанные условия, то потенциал допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность интервала $(0,1)$. Тем самым доказана необходимость (хотя бы в локальном смысле) условий Шкаликова.

Ключевые слова:уравнение Орра–Зоммерфельда, локализация спектра, предельный спектральный граф

Keywords: Orr-Sommerfeld equation, spectrum localization, limit spectral graph

Mathematics Subject Classification: 47E05, 76E25

1. Введение

Рассмотрим семейство операторов $L(\varepsilon)$, порожденных в $L^2(0,1)$ дифференциальным выражением $l_\varepsilon y = i\varepsilon^2 y'' + qy$ и краевыми условиями $y(0) = y(1) = 0$, где q — ограниченная,

Kh.K. Ishkin, R.I. Marvanov, On localization conditions for spectrum of model operator for Orr–Sommerfeld equation.

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421; второго автора – при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90999.

Поступила 20 октября 2020 г.

измеримая, вещественнозначная функция, ε – положительный параметр. При каждом ε спектр оператора $L(\varepsilon)$ дискретен и лежит в замыкании области

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C}: \ m < \mathrm{Re}\, z < M, \ \mathrm{Im} z < 0\},$$

где $m = \inf\limits_{(0,1)} q, M = \sup\limits_{(0,1)} q$.

Оператор $L(\varepsilon)$ принято рассматривать в качестве упрощенной модели для хорошо известного в гидродинамике оператора Орра – Зоммерфельда (подробности см. в [1] и [2]). В работе [3] было доказано, что при $q(x) = x$ или x^2 спектры операторов Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса $R > 0$ и $L(\varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$ накапливаются около множества, называемого предельным спектральным графом (ПСГ) и состоящего из трех кривых, соединяющих некоторую точку $\lambda_0 \in \Pi$ с точками m, M и $-i\infty$ («спектральный галстук»). В дальнейшем в работе [2] этот результат был распространен на класс функций q, удовлетворяющих условиям

(i) функция q вещественна при $x \in [0, 1]$, и существует область $G \subset \mathbb{C}$, такая, что q голоморфна в G и биективно отображает $\overline{G}$ на полуполосу $\overline{\Pi}$;

(ii) при любом $a \in (0, 1)$ прообраз луча $r_a = \{\lambda: \ \lambda = a - it, \ 0 < t < \infty\}$ есть функция относительно мнимой оси, то есть любая прямая $\mathrm{Im}\ \lambda = \mathrm{const}$ либо пересекает прообраз луча r_a в одной точке, либо не пересекает.

Следуя А. А. Шкаликову, этот класс будем обозначать AM. Далее, через $\Gamma(c)$ обозначим часть ПСГ, лежащую в полуполосе $\Pi_c = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ m < \mathrm{Re}\lambda < M, \ \mathrm{Im}\lambda < -c\}$.

Из условия (i) следует, что если $q \in AM$, то q строго монотонна на $[0, 1]$. Если q немонотонна, то, как показано в [2] и [4], ПСГ операторов $L(\varepsilon)(\varepsilon > 0)$ может иметь более сложный вид. Однако и в том и в другом случае при достаточно больших $c > 0$

$$\Gamma(c) = \gamma(c) := \{\lambda \in \Pi_c : \mathrm{Im}(Q(\lambda)) = 0\}, \tag{1.1}$$

где

$$Q(\lambda) = \int_0^1 \sqrt{i(\lambda - q(x))}dx, \tag{1.2}$$

ветвь фиксирована так, что $\arg\ Q(M) = \pi/4$.

В связи со сказанным возникает вопрос:

Каково поведение спектра оператора $L(\varepsilon)$ при малых ε в случае, когда функция q не голоморфна на $(0, 1)$? Достаточна ли конечная или бесконечная гладкость функции q, чтобы собственные числа $L(\varepsilon)$, лежащие в Π_c, скапливались к одной кривой $\gamma(c)$?

В предлагаемой работе рассмотрены 2 типа кусочно-голоморфных потенциалов, при которых $\Gamma(c)$ удается построить в явном виде. В первой части работы (§ 2) мы изучаем случай кусочно-постоянного потенциала с счетным числом скачков. Показано, что если точки разрыва потенциала достаточно быстро сходятся к одному из концов интервала $(0, 1)$, то $\Gamma(c)$ состоит из счетного числа лучей так, что каждому «куску» соответствует ровно один луч. Поскольку «кусков» столько же, сколько точек разрыва, возникает вопрос: не порождается ли каждый луч локализации соответствующим разрывом функции q, нельзя ли склеить два «куска» достаточно гладко, чтобы им соответствовал только один луч локализации? Обсуждению этого вопроса посвящен §3. Рассмотрен потенциал q, склеенный в некоторой промежуточной точке $a \in (0; 1)$ из двух функций q_1 и q_2, голоморфных в некоторых окрестностях промежутков $[0; a)$ и $(a; 1]$ соответственно и удовлетворяющих стандартным условиям в терминах линий Стокса, при которых возможны ВКБ-оценки. В случае бесконечной дифференцируемости q в точке склейки одних ВКБ-оценок для выявления спектральных портретов уже недостаточно. В связи с этим мы решаем обратную задачу: по некоторым спектральным данным мы выводим голоморфность q вблизи интервала $(0, 1)$. Чтобы понять характер спектральных данных, предварительно решаем прямую задачу с выходом в комплексную ε-плоскость (§ 4). В заключительной части (§ 5) получен основной результат статьи – теорема 5.1, в которой решена обратная задача: если q монотонна и непрерывно дифференцируема и для части спектра $L(\varepsilon)$ вне некоторого круга при малых ε из сектора $\{re^{i\varphi}:\ r>0,\ |\varphi|\le\pi/4\}$ выполняются условия квантования типа Бора–Зоммерфельда, то q допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность интервала $(0,1)$.

2. Кусочно-постоянный потенциал

Рассмотрим следующую функцию

$$q(x)=q_n,\quad x\in[x_{n-1},x_n)\,,\quad n=1,2,\dots, \tag{2.1}$$

где $x_n=1-1/(n+1)$, числа q_n удовлетворяют следующим условиям:
a) $m:=q_1<q_2<\dots;$
b) Существует конечный предел $M=\lim\limits_{n\to\infty}q_n$, причем

$$q_n=M+O(n^{-\gamma}),\quad n\to\infty,\quad \gamma>1. \tag{2.2}$$

Положим

$$\gamma_n(c)=\{\lambda=\mu-i\nu,\ \mu=q_n,\ \nu\ge c\}$$

Первый из основных результатов работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть функция q имеет вид* (2.1) *и выполнено* (2.2). *Тогда*

$$\Gamma(c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n(c). \tag{2.3}$$

Доказательство проведем поэтапно. Сначала мы покажем, что если λ_0 – некоторая точка из Π_c, не принадлежащая ни одному лучу $\gamma_n(c)$, то любой круг $U_\delta(\lambda_0)=\{|\lambda-\lambda_0|<\delta\}$, не пересекающийся с $\gamma_n(c)$ $(n=1,2,\dots)$, не будет содержать точек спектра оператора $L(\varepsilon)$ при $0<\varepsilon<\varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta)$ – некоторая постоянная, зависящая только от δ.

Пусть $y_1(x,\lambda,\varepsilon)$ и $y_2(x,\lambda,\varepsilon)$ – решения уравнения

$$i\varepsilon^2y''+qy=\lambda y, \tag{2.4}$$

удовлетворяющие условиям

$$y_1(0,\lambda,\varepsilon)=y_2(1,\lambda,\varepsilon)=0\quad\text{и}\quad y_1'(0,\lambda,\varepsilon)=y_2'(1,\lambda,\varepsilon)=1.$$

Тогда собственные числа оператора $L(\varepsilon)$ совпадают с корнями уравнения

$$W\left(y_1,y_2\right)\big|_{x=b}=0, \tag{2.5}$$

где W – вронскиан, b – некоторая промежуточная точка из интервала $(0;1)$. Наша задача – выбрать $b=b(\varepsilon)$ так, чтобы функции y_1 и y_2 допускали при малых $\varepsilon>0$ асимптотическое разложение, равномерное по $\lambda\in U_\delta(\lambda_0)$.

Решение y_2 возьмем в следующем виде:

$$y_2(x,\lambda,\varepsilon)=\varepsilon\sin\varepsilon^{-1}p_\infty(x-1)+\frac{i}{\varepsilon p_\infty}\int_x^1\sin\varepsilon^{-1}p_\infty(x-t)\,[M-q(t)]\,y_2dt,$$

где $p_\infty=p_\infty(\lambda)=\sqrt{i(\lambda-M)}$. Здесь и всюду далее ветвь корня выбирается так, что $\sqrt[n]{z}>0$ при $z>0$.

Положим

$$b_\varepsilon=1-\varepsilon^\sigma,\quad\text{где}\quad 1/(\gamma+1)<\sigma<1,$$
$$\Pi_{ca}:=\{\lambda=\mu-i\nu:\ m<\mu\le M-a,\nu>c\},\quad 0<a<M-m.$$

Лемма 2.1. *При малых $\varepsilon > 0$ справедливы равномерные по $\lambda \in \Pi_{ca}$ асимптотические оценки*

$$y_2^{(k)}(b_\varepsilon, \lambda, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2i}\left(\frac{-ip_\infty}{\varepsilon}\right)^k \exp\left(i\varepsilon^{\sigma-1}p_\infty\right)\left(1 + O\left(\varepsilon^{(\gamma+1)\sigma-1}\right)\right), \quad k = 0, 1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Легко проверить, что $-\pi/2 < \arg\, p_\infty(\lambda) \le -\delta(a) < 0$ при всех $\lambda \in \Pi_{ca}$. Положим

$$f = -\frac{2i}{\varepsilon}e^{i\varepsilon^{-1}p_\infty(x-1)}y_2(x, \lambda, \varepsilon).$$

Тогда f удовлетворяет уравнению

$$f = 1 - e^{-2i\varepsilon^{-1}p_\infty(1-x)} + A(\lambda, \varepsilon)f,$$

где

$$A(\lambda, \varepsilon)f = -\frac{1}{2\varepsilon p_\infty}\int_x^1\left[1 - e^{2i\varepsilon^{-1}p_\infty(t-x)}\right][M - q(t)]\, f dt.$$

Из условия (2.2) следует, что норма оператора $A(\lambda, \varepsilon)$ в пространстве $C[b_\varepsilon; 1]$ допускает оценку $\|A(\lambda, \varepsilon)\| = O\left(\varepsilon^{\sigma(\gamma+1)-1}\right), \quad \varepsilon \to 0$ равномерно по $\lambda \in \Pi_{ca}$. Отсюда легко следуют соотношения (2.6). □

Замечание 2.1. *Из доказательства леммы видно, что формула* (2.6) *сохраняет силу, если b_ε заменить на любую точку x, большую b_ε. При этом показатель экспоненты в* (2.6) *будет $i\varepsilon q_\infty(1 - x)$.*

Лемма 2.2. *Пусть $q_n < \operatorname{Re}\lambda_0 < q_{n+1}$ и $m(\varepsilon) = [\varepsilon^{-\sigma}], \quad 0 < \sigma < 1/2$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ справедливы равномерные по $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ асимптотические оценки*

$$y_1^{(k)}(x_{m(\varepsilon)}, \lambda, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2ip_1}\left(\frac{ip_{m(\varepsilon)}}{\varepsilon}\right)^k\left(\prod_{k=2}^{m(\varepsilon)}\frac{p_k + p_{k-1}}{2p_k}\right)F_n(\lambda, \varepsilon), \quad k = 0, 1, \tag{2.7}$$

где $p_k = \sqrt{i(\lambda - q_k)}$,

$$F_n(\lambda, \varepsilon) = \exp\left[-i\varepsilon^{-1}\left(\int_0^{x_n}\sqrt{i(\lambda - q)}dt + \int_{x_n}^{x_{m(\varepsilon)}}\sqrt{i(\lambda - q)}dt\right)\right]$$
$$\cdot\left[\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n + p_{n-1}} - \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1} + p_n}e^{-2i\varepsilon^{-1}p_n\Delta_n} + O\left(\exp(-c_0\varepsilon^{-1+2\sigma})\right)\right],$$

где $\Delta_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{(k+1)k}$, c_0 – положительная постоянная, не зависящая от ε и λ.

Доказательство. Полагая $Y = (y, y')^T$, будем иметь $Y = Y_k \cdot C_k$, $x \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \dots$, где

$$Y_k = T_k W D_k, \quad T_k = \operatorname{diag}(1, i\varepsilon^{-1}p_k), \quad D_k = \operatorname{diag}(e^{i\varepsilon^{-1}p_k x}, e^{-i\varepsilon^{-1}p_k x}), \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из условия непрерывности Y в точке x_{k-1} имеем

$$Y_k(x_{k-1})C_k = Y_{k-1}(x_{k-1})C_{k-1},$$

откуда

$$C_k = \Omega_k C_{k-1}, \quad \text{где} \quad \Omega_k = Y_k^{-1}(x_{k-1})Y_{k-1}(x_{k-1}).$$

Следовательно, $C_k = \Omega_k \cdots \Omega_2 C_1$. Далее, поскольку $Y(0) = (0, 1)^T$, то $C_1 = \varepsilon/(2ip_1)(1, -1)^T$. Подставляя вместо Y_k его выражение, получим

$$\Omega_k = D_k^{-1}(x_{k-1})\Phi_k D_{k-1}(x_{k-1}), \quad \text{где} \quad \Phi_k = I + \beta_k\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; \beta_k = \frac{p_k - p_{k-1}}{2p_k}.$$

Таким образом,

$$Y(x_{m(\varepsilon)}) = T_{m(\varepsilon)} W \left(\prod_{k=m(\varepsilon)}^{2} D_k(\Delta_k)\Phi_k \right) D_1(x_1) C_1. \tag{2.8}$$

Пусть $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ и $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда

$$D_k(\Delta_k) = \begin{cases} e^{-i\varepsilon^{-1}p_k\Delta_k}\left[\mathrm{diag}(0,1) + O\left(e^{-2\delta_k\varepsilon^{-1}}\right)\right], & k = \overline{1, n-1}, \\ e^{i\varepsilon^{-1}p_k\Delta_k}\left[\mathrm{diag}(1,0) + O\left(e^{-\delta_k\varepsilon^{-1}}\right)\right], & k = \overline{n+1, m(\varepsilon)}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где

$$\delta_k = \min\left\{ \mathrm{Im}\sqrt{i(q_n - q_{n-1} + \nu}, \left|\mathrm{Im}\sqrt{i(q_{n+1} - q_{n+2} + \nu}\right| \right\} \Delta_k. \tag{2.10}$$

Из соотношения (2.10) видно, что при всех $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ $\delta_k \geq Cm(\varepsilon)^{-2}$, где $C = C(n, \delta, \lambda_0) > 0$. Подставляя соотношения (2.9) в (2.8) и учитывая последнюю оценку для δ_k, получим (2.7). Лемма доказана. □

Выберем теперь в (2.5)

$$b(\varepsilon) = x_{m(\varepsilon)} = 1 - 1/\left([\varepsilon^{-\sigma}] + 1\right), \quad \text{где} \quad 1/(\gamma+1) < \sigma < 1/2.$$

Заменив в (2.5) y_1 и y_2 их асимптотиками (2.7) и (2.6) (с учетом замечания 2.1), получим

$$y_1(1, \lambda, \varepsilon) := \Phi(\lambda, \varepsilon) = e^{-2i\varepsilon^{-1}p_n\Delta_n} - \alpha_n + O\left(\exp(-c_n\varepsilon^{-1+2\sigma})\right), \tag{2.11}$$

где

$$\alpha_n = \frac{(p_{n+1} + p_n)(p_n - p_{n-1})}{(p_n + p_{n-1})(p_{n+1} - p_n)}.$$

Введем функцию $\Phi_0(\lambda, \varepsilon) = e^{2i\varepsilon^{-1}p_n\Delta_n} - \alpha_n$ и обозначим через $\{\mu_k^n(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ ее нули в полуполосе $\Pi_n(c) = \{\lambda = x - iy,\ q_n < x < q_{n+1}, y > c\}$, пронумерованные в порядке неубывания модулей. Применяя теорему Руше к функции Φ_0, получим, что, начиная с некоторого номера K_n, каждое собственное значение оператора $L(\varepsilon)$ из $\Pi_n(c)$ лежит в круге с центром в точке $\mu_k^n(\varepsilon)$ и радиусом $r_k^n = M_n e^{-\sigma_n k^\delta}$, где $M_n,\ \sigma_n,\ \delta$ – положительные числа. Это означает, что $\lambda_k^n = \mu_{k+m_n}^n + O(e^{-\sigma_n k^\delta}),\ k \geq K_n,\ m_n$ — целое число, зависящее только от n. Отсюда следует утверждение Теоремы 2.1.

3. Потенциалы конечной гладкости

В этом пункте мы будем рассматривать потенциалы вида

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x), & x \in [0; a), \\ q_2(x), & x \in (a; 1], \end{cases} \tag{3.1}$$

где функции q_1 и q_2 удовлетворяют следующим условиям:

1) функция q вещественна, не убывает на $[0, 1]$;
2) функции q_1 и q_2 голоморфны в некоторых окрестностях Ω_1 и Ω_2 промежутков $[0; a)$ и $(a; 1]$ соответственно;
3) при некотором $n \geq 2$ существуют конечные пределы $l_{jk} := \lim\limits_{x\to a} q_j^{(k)}(x)$ $(k = \overline{0, n})$ так, что $l_{1k} = l_{2k}$ $(k = \overline{0, n-1})$ и $l_{1n} \neq l_{2n}$.

Чтобы сформулировать дополнительное условие, введем обозначения.

Пусть

$$c>0, \quad \lambda\in\Pi_c=\{z\in\Pi:\ \operatorname{Im} z<-c\}, \qquad \xi_j(z)=\int_a^z \sqrt{i(\lambda-q_j(t))}dt,\ z\in\Omega_j\ (j=1,2),$$

$\beta_1(\lambda)$и $\beta_2(\lambda)$ – кривые, в которые функции ξ_1 и ξ_2 отображают отрезки $[a,0]$ и $[a,1]$ соответственно. Далее обозначим через $D_j (j=1,2)$ область, ограниченную кривой $\beta_j(\lambda)$ и отрезком, соединяющим ее концы[1]. Тогда дополнительное условие на q заключается в следующем:

4) при достаточно большом $c>0$ для любого $\lambda\in\Pi_c$ существуют окрестности $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$ интервалов $(a,0)$ и $(a,1)$, такие, что отображения $\xi_j:\ \overline{\omega_j}\longrightarrow\overline{D_j}$ $(j=1,2)$ являются биекциями.

Введем функции

$$Q_1(\lambda)=\int_0^a \sqrt{i(\lambda-q(t))}dt,\ Q_2(\lambda)=\int_a^1 \sqrt{i(\lambda-q(t))}dt,\ \lambda\in\overline{\Pi},$$

и кривые

$$\gamma_i(c)=\{\lambda\in\Pi_c:\operatorname{Im}(Q_i(\lambda))=0\},\ i=1,2.$$

Легко проверить (как при доказательстве Леммы 2.2 из [2]), что при любых $c\geq 0$ кривые $\gamma_1(c)$ и $\gamma_2(c)$ являются графиками функций относительно мнимой оси.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* 1) — 4) *и достаточно больших* $c>0$ $\Gamma(c)=\gamma_1(c)\cup\gamma_2(c)$.

Доказательство. При сделанных предположениях удобнее от задачи

$$i\varepsilon^2y''+qy=\lambda y, \quad x\in[0,1], \tag{3.2}$$

$$y(0)=y(1)=0 \tag{3.3}$$

перейти к задаче Штурма–Лиувилля на кривой $\beta(\lambda)$ с перераспределением ролей параметров λ и ε. Зафиксируем $\lambda\in\Pi_c$ $(c>0)$ и положим

$$\xi=\xi(\lambda,x)=\int_0^x \sqrt{i(\lambda-q)}dt/Q(\lambda), \qquad x\in[0,1], \tag{3.4}$$

$$V=V(\lambda,\xi)=\frac{iQ^2}{4(\lambda-q)}\left[\frac{q''}{\lambda-q}+\frac{5}{4}\left(\frac{q'}{\lambda-q}\right)^2\right]\Bigg|_{x=x(\lambda,\xi)}, \tag{3.5}$$

$$s=s(\lambda,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}Q(\lambda), \tag{3.6}$$

где функция Q определена по (1.2), $\beta(\lambda)$ — образ отрезка $[0,1]$ при отображении (3.4), $x(\lambda,\xi)$ — функция, обратная к функции $\xi(\lambda,x)$. Из (3.4) следует, что при всех λ из Π_c кривая $\beta(\lambda)$ является графиком функции, выпуклой вверх на отрезке $[0,1]$ и равной 0 на его концах. Обозначим через $E(\lambda)$ область, ограниченную кривой $\beta(\lambda)$ и ломаной $P(\lambda)=[0,A_\lambda]\cup[A_\lambda,1]$, где $A_\lambda=Q_1(\lambda)/Q(\lambda)$.

Подстановка

$$y \ = \ (\lambda-q)^{-1/4}v(\xi) \tag{3.7}$$

преобразует задачу (3.2)–(3.3) в следующую

$$-v''+V(\lambda,\xi)v \ = \ s^2v, \quad \xi\in\beta(\lambda), \tag{3.8}$$

$$v(0)=v(1) \ = \ 0, \tag{3.9}$$

где штрих означает производную функции v по ξ вдоль кривой $\beta(\lambda)$.

[1]Легко проверить, что при каждом $\lambda\in\Pi_c(c>0)$ области D_1 и D_2 выпуклы.

Пусть $c > 0$. Обозначим через D_c образ Π_c при отображении $\lambda \longmapsto Q(\lambda)$. Как показано в [2, лемма 2.3], при любом $c \geq 0$ отображение $Q: \ \Pi_c \longrightarrow D_c$ конформно и взаимно однозначно.

Согласно соотношениям (3.2)–(3.9) $\lambda \in \Pi_c$ $(c > 0)$ является собственным значением задачи (3.2)–(3.3) тогда и только тогда, когда s^2 — собственное число задачи (3.8)–(3.9), удовлетворяющее условию $s\varepsilon \in D_c$.

Введем функцию

$$\Phi(\lambda, s) = \varphi(1, \lambda, s), \tag{3.10}$$

где $\varphi(\xi, \lambda, s)$ – решение уравнения (3.8), удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0, \lambda, s) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda, s) = 1.$$

Тогда спектр задачи (3.8)–(3.9) совпадает с квадратами нулей функции $\Phi(\lambda, \cdot)$.

Чтобы понять, как устроен спектр задачи (3.8)–(3.9), заметим следующее: в силу условий 2) и 4) и равенства (3.4) образ области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ при отображении функцией $\xi(\lambda, \cdot)$ $(\lambda \in \Pi_c, \ c \gg 1)$ целиком содержит замыкание области $E(\lambda)$ и функция $\xi(\lambda, \cdot)$ обратима в области $\overline{E(\lambda)}$, обратная ей функция $z(\lambda, \cdot)$ голоморфна в $E(\lambda)$ и непрерывна на ее замыкании. Из (3.5) видно, что такими же свойствами обладает и функция V, так что по теореме о монодромии спектр задачи (3.8)–(3.9) не меняется при деформировании кривой $\beta(\lambda)$ в ломаную $P(\lambda)$. Далее, используя условие 3) и формулу (3.5), нетрудно убедиться, что функция $V \in C^{(n-1)}(P_\lambda)$ и $V^{(n)}$ терпит скачок в точке A_λ. Тогда функция V удовлетворяет всем условиям теоремы 3 из [5], согласно которой спектр задачи (3.8)–(3.9) разбивается на 2 серии, имеющие асимптотики

$$s_k^{(j)} \sim \left(\frac{\pi k Q(\lambda)}{Q_j(\lambda)} + O(\ln k)\right)^2, \ j = 1, 2, \ k \to +\infty. \tag{3.11}$$

Отсюда, используя формулу (3.6), убеждаемся, что спектр оператора $L(\varepsilon)$ разбивается на 2 серии $\{\lambda_k^{(j)}\}$ $(j = 1, 2)$, для которых справедливы оценки

$$Q_j\left(\lambda_k^{(j)}\right) = \pi k \varepsilon (1 + o(1)), \ \varepsilon \to +0,$$

откуда в соответствии с определением кривых $\gamma_j(c)$ следует утверждение теоремы. □

4. Бесконечно дифференцируемые потенциалы. Решение прямой задачи

Согласно лемме 2.1 из работы [6], если функция (3.1) удовлетворяет условиям 1) – 4), то при каждом $\lambda \in \Pi_c$ $(c > 0)$ функцию (3.10) можно представить в виде

$$\Phi(\lambda, s) = \frac{\sin s}{s} + \frac{1}{s}\int_{P(\lambda)} e^{2ist} H(\lambda, t) dt, \tag{4.1}$$

где $P(\lambda)$ – параллелограмм с вершинами в точках $\pm i$, $\pm(2A - 1)i$, функция $H(\lambda, \cdot)$ на $P(\lambda) \backslash \{\pm i\}$ имеет гладкость такого же порядка, что и первообразная q

$$Q(\lambda, z) = \int_{P(\lambda, i, z)} q(t) dt,$$

где $P(\lambda, i, z)$ – кратчайшая часть $P(\lambda)$, соединяющая точки i и z. Отсюда в силу условия 3) следует, что $(n+1)$-я производная H в точках $\pm(2A-1)i$ терпит скачок, благодаря чему удается «выбить» асимптотику $\Phi(\lambda, s)$, когда s уходит в бесконечность по любому лучу. В случае, когда функция q бесконечно дифференцируема в точке a, то из формулы (4.1) ничего определенного о поведении $\Phi(\lambda, s)$ при больших s извлечь не удается. Если только не допустить голоморфность q так, чтобы условие 4) выполнялось для всего интервала $(0, 1)$. Действительно, в этом случае спектр задачи (3.8)–(3.9) не меняется, если кривую $\beta(\lambda)$ продеформировать в отрезок $[0, 1]$. Соответственно параллелограмм $P(\lambda)$ в формуле (4.1) превращается в отрезок и при разумных требованиях на V (достаточна суммируемость) поведение $\Phi(\lambda, s)$ при больших s будет определяться первым членом в правой части (4.1). Это означает, что спектр задачи (3.8)–(3.9) имеет асимптотику $s_n \sim \pi n$ $(n \to \infty)$, то есть на бесконечности локализуется около одного луча, потому естественно ожидать, что $\Gamma(c)$ при достаточно больших $c > 0$ будет состоять из одной кривой.

Вместе с тем существует кусочно-голоморфная бесконечно дифференцируемая на некоторой гладкой кривой β функция V [7, пример 1], что спектр соответствующей задачи (3.8)–(3.9) на бесконечности локализуется около двух лучей. Это наводит на мысль, что бесконечной дифференцируемости не достаточно для того, чтобы $\Gamma(c)$ состояла из одной кривой.

В связи с этим возникают 2 вопроса:

1) выяснить, каковы «разумные требования» на V, что то же самое, на q?

2) насколько требование голоморфности функции q необходимо для реализации $\Gamma(c)$ в виде одной кривой?

Второй вопрос фактически является обратной задачей: по некоторым спектральным данным оператора $L(\varepsilon)$ (при малых ε) выявить голоморфность q вблизи $(0,1)$. Чтобы понять, что брать в качестве спектральных данных, естественно начать с прямой задачи, причем в качестве «разумных требований» можно взять как раз голоморфность q вблизи $(0,1)$. Таким образом, возникает

Задача 4.1. *Пусть выполнено условие*

(i$'$) *функция q вещественна, возрастает на $[0,1]$ и голоморфна в некоторой окрестности G отрезка $[0,1]$.*

Описать поведение спектра оператора $L(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ по сектору $|\arg \varepsilon| \le \pi/4$.

Отметим, что выход на комплексную ε-плоскость оправдан не только стремлением извлечь из условия (i$'$) максимум информации о ПСГ, но и тем, что

$$L(\varepsilon) = -i\varepsilon^2 H(i/\varepsilon^2),$$

где

$$H(\beta) = H_0 + \beta Q, \quad H_0 = -d^2/dx^2, \quad D(H_0) = \{y \in W_2^2[0,1]:\ y(0) = y(1) = 0\},$$

Q — оператор умножения на функцию q. Из ограниченности функции q следует, что H_0-грань оператора Q равна 0, поэтому $H_0 + \beta Q$ является голоморфным семейством типа (A) [9, гл. VII, § 2].

Отметим также, что ограничение $|\arg \varepsilon| \le \pi/4$ несущественно, поскольку при $\pi/4 < |\arg \varepsilon| \le \pi/2$ вместо $L(\varepsilon)$ можно рассматривать оператор $-L(\varepsilon)$, который устроен также.

Поскольку функция q непрерывна, то

$$(L(\varepsilon)y, y) = -i\varepsilon^2\|y'\|^2 + (qy, y),$$

откуда в силу вещественности q следует, что спектр оператора $L(\varepsilon)$ целиком лежит в нижней полуплоскости $P_- = \{\operatorname{Im} z < 0\}$.

Для решения задачи 4.1 предварительно докажем 2 леммы о 2 биекциях. В первой из них речь пойдет о P_- и функции (1.2).

Лемма 4.1. *Пусть функция q непрерывно дифференцируема и возрастает на $[0,1]$. Тогда функция Q голоморфна в P_-, непрерывна на $\overline{P_-}$ и взаимно-однозначно отображает P_- на область D, граница которой состоит из лучей $\sigma_1 = \{z = e^{i\pi/4}s,\ s \ge |Q(M)|\}$ и $\sigma_2 = \{z = e^{-i\pi/4}s,\ s \ge |Q(m)|\}$, соединенных кривой σ_3, такой, что D выпукла и отделена от 0.*

Доказательство. То, что Q голоморфна в P_- и непрерывна вплоть до интервалов $(-\infty, m)$ и $(M, +\infty)$ следует непосредственно из (1.2). Далее прямыми вычислениями легко проверить, что предел функции Q в любой точке t из отрезка $[m, M]$ по любому некасательному пути существует и равен

$$z = z(t) := e^{i\pi/4}\int_0^{q^{-1}(t)} \sqrt{t-q(x)}dx + e^{-i\pi/4}\int_{q^{-1}(t)}^1 \sqrt{q(x)-t}dx, \quad t \in [m, M]. \tag{4.2}$$

Отсюда и из соотношений

$$Q(\lambda) = \begin{cases} e^{i\pi/4}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\lambda - q}dx & \text{при} \quad \lambda \geq M, \\ e^{-i\pi/4}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{q-\lambda}dx & \text{при} \quad \lambda \leq m. \end{cases}$$

следует, что отображение $Q : \partial\, P_- \longrightarrow \partial\, D$ – биекция.

Обозначим через D^* образ D при отображении $z \longmapsto 1/z$. Тогда функция $f(\lambda) = 1/Q(\lambda)$ голоморфна в P_-, непрерывна на $\overline{P_-}$ и взаимно однозначно отображает границу P_- (ось Ox) на границу D^*. Отсюда согласно обратному принципу соответствия границ [8, § 13, п. 41] отображение $f : P_- \longrightarrow D^*$, а значит, и $Q : P_- \longrightarrow D$ – биекция.

Далее, из (4.2) видно, что аргумент $z(t)$ непрерывно убывает на $[m, M]$ от $3\pi/4$ до $\pi/4$, следовательно, D выпукла. Докажем, что

$$d := \inf_{z\in D} |z| > 0. \tag{4.3}$$

В силу (4.2)

$$|z(t)|^2 = \left|\int_0^{q^{-1}(t)} \sqrt{t-q(x)}dx\right|^2 + \left|\int_{q^{-1}(t)}^1 \sqrt{q(x)-t}dx\right|^2 > 0, \quad t \in [m, M],$$

и, поскольку z непрерывна, то $\min\limits_{t\in[m,M]} |z(t)| > 0$. Отсюда следует (4.3). □

По условию (i′) функция q возрастает на $[0, 1]$. При доказательстве теоремы 3.1 было замечено, что при любом $\lambda \in P_-$, $\beta(\lambda)$ – образ отрезка $[0, 1]$ при отображении (3.4) – является графиком функции, строго выпуклой вверх. Введем обозначения:

$$P_-(c) = \{re^{i\varphi} : \ r \geq c, -\pi \leq \varphi \leq 0\}, \tag{4.4}$$

$E(\lambda)$ – область, ограниченная кривой $\beta(\lambda)$ и отрезком $[0, 1]$.

Лемма 4.2. *Пусть условие* (i′) *выполнено. Тогда существует* $c_1 > 0$*, что при всех* λ *из* $P_-(c_1)$ *найдется кривая* $\alpha(\lambda)$ *с параметризацией* $z = t + i\alpha(\lambda, t)$ $(t \in [0, 1])$*, где* $\alpha(\lambda, \cdot)$ *бесконечно дифференцируема на* $[0, 1]$*, отрицательна на* $(0, 1)$*, равна 0 в точках 0 и 1 и такова, что компакт* $K(\lambda)$*, ограниченный кривой* $\alpha(\lambda)$ *и отрезком* $[0, 1]$*, отображается функцией* (3.4) *взаимно однозначно и конформно на замыкание области* $E(\lambda)$.

Доказательство. Пусть G_1 – область, такая, что $[0, 1] \subset \overline{G_1} \subset G$. В силу (3.4) найдется $c_1 > 0$, что функция $\xi(\lambda, z)$ голоморфна в области $P_-(c) \times \overline{G_1}$ и

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\xi(\lambda, z) = z^{1-k} + R_k(\lambda, z), \quad k = 0, 1, \tag{4.5}$$

$$\sup_{(t,\lambda,z)\in X}\left|\frac{R_0(\lambda, z)}{z-t}\right| < 1, \quad \sup_{(\lambda,z)\in Y}\left|\frac{\partial}{\partial z}R_1(\lambda, z)\right| < 1, \tag{4.6}$$

где $X = [0, 1] \times Y$, $Y = P_-(c) \times \overline{G_1}$. Применим теорему Руше к уравнению

$$\xi(\lambda, z) - t = 0, \quad (t, \lambda) \in [0, 1] \times P_-(c),$$

пользуясь (4.5)–(4.6) при $k = 0$. В результате найдем единственную точку $z(\lambda, t) \in G_1$, такую, что $\xi(\lambda, z(\lambda, t)) = t$. Обозначим через $\alpha(\lambda)$ кривую с параметризацией $z = z(\lambda, t)$, $t \in [0, 1]$. Выше было отмечено, что все внутренние точки кривой $\beta(\lambda)$ лежат вне $[0, 1]$. Учитывая это, легко проверить, что таким же свойством обладает кривая $\alpha(\lambda)$. Тогда кривые $\omega(\lambda) = \alpha(\lambda) \cup [0, 1]$ и $\omega^*(\lambda) = \beta(\lambda) \cup [0, 1]$ – замкнуты и жордановы. Обозначим через $K(\lambda)$ – компакт, ограниченный кривой $\omega(\lambda)$. По построению отображение $\xi(\lambda, \cdot) : \ \omega(\lambda) \longrightarrow \omega^*(\lambda)$ – биекция. Отсюда, поскольку функция $\xi(\lambda, \cdot)$ голоморфна на $K(\lambda)$, то по обратному принципу соответствия границ [8, § 13, п. 41] отображение $\xi(\lambda, \cdot) : K(\lambda) \longrightarrow \overline{E(\lambda)}$ – биекция. Конформность следует из оценки (4.5)–(4.6) при $k = 1$, то, что $\alpha(\lambda, x)$ отрицательна при $x \in (0, 1)$ – из конформности, а бесконечная дифференцируемость функции $\alpha(\lambda, \cdot)$) – из голоморфности на $[0, 1]$ функции $z(\lambda, \cdot)$. □

Из доказанной леммы следует, что при всех $\lambda \in P_-(c_1)$, где $c_1 > 0$ – постоянная, удовлетворяющая условиям леммы, спектр задачи (3.8)–(3.9) не меняется при замене кривой $\beta(\lambda)$ на отрезок $[0, 1]$. Обозначим через $T(\lambda)$ оператор, порожденный в $L^2(0, 1)$ дифференциальным выражением $-d^2/d\xi^2 + V(\lambda, \cdot)$ и краевыми условиями (3.9).

Лемма 4.3. *Существуют числа $B > 0$ и $c_2 \geq c_1$, такие, что при каждом λ из $P_-(c_2)$ спектр оператора $T(\lambda)$ состоит из простых собственных чисел $\left\{(s_n(\lambda))^2\right\}_{n=1}^{\infty}$, для которых справедлива оценка*

$$s_n = \pi n + \frac{a_n(\lambda)}{n\lambda}, \quad |a_n(\lambda)| < B \quad \textit{для всех} \quad n \geq 1 \quad \textit{и} \quad \lambda \in P_-(c_2). \tag{4.7}$$

Доказательство. Согласно формуле (3.5) и лемме 4.2 потенциал оператора $T(\lambda)$ имеет вид

$$V(\lambda, \xi) = \frac{Q^2}{\lambda - p}\left[\frac{p_1}{\lambda - p} + \left(\frac{p_2}{\lambda - p}\right)^2\right],$$

где p, p_1, p_2 – функции, голоморфные на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, существуют $c' \geq c_1$ и $B' > 0$, такие, что

$$|V(\lambda, \xi)| \leq \frac{B'}{\lambda} \quad \text{при всех} \quad \lambda \in P_-(c') \quad \text{и} \quad \xi \in [0, 1]. \tag{4.8}$$

Собственные числа оператора $T(\lambda)$ – корни уравнения $\varphi(1, s, \lambda) = 0$, где $\varphi(\xi, s, \lambda)$ – решение уравнения $-v'' + V(\lambda, \cdot)v = s^2 v$, удовлетворяющее условиям $\varphi(\lambda, s, 0) = 0$, $\varphi'(\lambda, s, 0) = 1$. Функция $\varphi_1 = s\varphi$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi_1(\xi, s, \lambda) = \sin s\xi + \frac{1}{s}\int_0^{\xi} \sin s(\xi - \eta) V(\lambda, \eta)\varphi_1(\eta, s, \lambda) d\eta.$$

Применяя к этому уравнению стандартный метод последовательных приближений (см., например, [10, п. 22.25], с учетом оценки (4.8) приходим к уравнению для спектра

$$\sin s + f(\lambda)/s\lambda = 0, \qquad \text{где} \quad f \quad \text{ограничена на} \quad P_-(c').$$

Отсюда видно, что существуют $c_2 > c'$ и $B > 0$, такие, что при всех $\lambda \in P_-(c_2)$ и $n \in \mathbb{N}$ к кружкам $|s - \pi n| = B(n|\lambda|)^{-1}$ можно применить теорему Руше, откуда и будет следовать (4.7). □

Введем обозначения. Согласно лемме 4.1 для любого ε из сектора

$$\mathcal{E} = \left\{re^{i\varphi} : \quad r > 0, \ |\arg\varepsilon| \le \pi/4\right\} \tag{4.9}$$

и любого $c > 0$ найдется единственное натуральное число $m(c,\varepsilon)$, что при всех натуральных $n \ge m(c,\varepsilon)$ уравнение

$$Q(\mu) = \pi n\varepsilon, \quad |\mu| \ge c, \tag{4.10}$$

имеет единственный корень. Эти корни будем обозначать $\{\mu_n(\varepsilon)\}_{n=m(c,\varepsilon)}^{\infty}$.

Далее пусть $\sigma(c,\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathcal{E})$ – часть спектра оператора $L(\varepsilon)$, лежащая в области $P_-(c)$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (i′)*. Тогда найдутся положительные числа* c, τ *и* A*, такие, что при всех* ε *из сектора* $\mathcal{E}(\tau) = \{\varepsilon \in \mathcal{E} : \quad |\varepsilon| < \tau\}$

$$\sigma(c,\varepsilon) = \{\lambda_n(\varepsilon)\}_{n=l(c,\varepsilon)}^{\infty}, \quad m(c,\varepsilon) - 2 \le l(c,\varepsilon) \le m(c,\varepsilon) + 1, \tag{4.11}$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon) + \delta_n(\varepsilon), \quad |\delta_n(\varepsilon)| \le A|\varepsilon|^2. \tag{4.12}$$

Доказательство. Пусть c_2 – постоянная, определенная в лемме 4.3. Выберем $c \ge c_2$ так, что

$$\int_0^1 \sqrt{i(\lambda - q)}dx = \sqrt{i\lambda}\left[1 + r(\lambda)\right], \quad |r(\lambda)| < 1/2 \quad \text{при всех} \quad \lambda \in P_-(c), \tag{4.13}$$

$$\left|\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lambda_1 - q} + \sqrt{\lambda_2 - q}}\right| > \frac{1}{3\max\left\{\sqrt{|\lambda_1|}, \sqrt{|\lambda_2|}\right\}} \quad \text{при всех} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in P_-(c). \tag{4.14}$$

Возьмем произвольное ε из сектора $\mathcal{E}(\tau)$, где τ – положительное число, значение которого уточним ниже. Далее выберем любое $\lambda \in \sigma(c,\varepsilon)$ и покажем, что для него найдется единственный номер n, такой, что λ совпадает с $\lambda_n(\varepsilon)$, для которого выполняется (4.12). Положим $s = Q(\lambda)/\varepsilon$. Согласно формулам (3.2) – (3.9) s^2 является собственным значением задачи (3.8) – (3.9), удовлетворяющим условию

$$s\varepsilon \in D(c), \tag{4.15}$$

где $D(c)$ – образ $P_-(c)$ при отображении $\lambda \longmapsto Q(\lambda)$. Так как $c > c_1$, то по лемме 4.2 число s^2 является собственным значением оператора $T(\lambda)$. Далее, поскольку $c > c_2$, то по лемме 4.3 найдется номер $n \ge l(c,\varepsilon)$, такой, что $s = s_n$ и для s_n справедлива оценка (4.7). Здесь $l(c,\varepsilon)$ – наименьший из всех n, при которых s_n удовлетворяет (4.15). Таким образом,

$$\frac{Q(\lambda)}{\varepsilon} = \pi n + \frac{a_n(\lambda)}{n\lambda}. \tag{4.16}$$

Отсюда, учитывая оценки (4.7), (4.13) и то, что $\varepsilon \in \mathcal{E}(\tau), \lambda \in P_-(c)$, будем иметь

$$\frac{\sqrt{c}}{2\tau} < \frac{|Q(\lambda)|}{|\varepsilon|} = \left|\pi n + \frac{a_n(\lambda)}{n\lambda}\right| < \pi n + \frac{B}{c}.$$

Потребуем теперь $\tau < c^{3/2}/4B$. Тогда $\sqrt{c}/4\tau > B/c$, поэтому

$$\pi n > \frac{|Q(\lambda)|}{|\varepsilon|} - \frac{B}{c} > \frac{|Q(\lambda)|}{2|\varepsilon|},$$

откуда, снова учитывая (4.13), получим $n > \sqrt{|\lambda|}/4\pi|\varepsilon|$. Тогда соотношение (4.16) можно записать в виде

$$Q(\lambda) = \pi n\varepsilon + \frac{b_n(\lambda)}{\lambda^{3/2}}\varepsilon^2, \quad \text{где} \quad |b_n(\lambda)| \le 4\pi B$$

при всех $\quad n \ge l(c,\varepsilon) \quad$ и $\quad \lambda \in P_-(c)$. Отсюда и из (4.10), пользуясь оценкой (4.14), получим

$$\lambda = \mu_n(\varepsilon) + \delta_n(\varepsilon), \quad \text{где} \quad |\delta_n(\varepsilon)| \le A|\varepsilon|^2, \quad n \ge l(c,\varepsilon),$$

A – постоянная, не зависящая ни от ε, ни от n. Тем самым утверждение о существовании n с требуемым свойством доказано. Осталось доказать неравенства

$$m(c,\varepsilon) - 2 \le l(c,\varepsilon) \le m(c,\varepsilon) + 1. \tag{4.17}$$

Далее для упрощения записи вместо $m(c,\varepsilon)$ и $l(c,\varepsilon)$ будем писать m и l. Согласно определению l – наименьший из всех n, при которых $\lambda_n(\varepsilon) \in P_-(c)$. Сначала докажем, что найдется $d > 0$, такое, что

$$|\mu_{m+1}(\varepsilon)| \ge c + d|\varepsilon| \quad \text{при всех} \quad c \gg 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \in \mathcal{E}. \tag{4.18}$$

Из равенства (4.10) следует, что для произвольного $\delta > 0$ найдется постоянная $c_1 = c_1(\delta) > 0$, такая, что

$$\mu_n(\varepsilon) = \frac{(\pi n\varepsilon)^2}{i}\left(1 + \sigma_1(n,\varepsilon)\right), \quad \text{где} \quad |\sigma_1(n,\varepsilon)| < \delta \quad \text{и} \quad n \ge m(c_1,\varepsilon). \tag{4.19}$$

Далее, снова воспользовавшись (4.10), учитывая при этом (4.19), найдем $c_2 = c_2(\delta) > 0$, что

$$\mu_{m+1}(\varepsilon) - \mu_m(\varepsilon) = \frac{\pi^2\varepsilon^2 m}{i}\left(1 + \sigma_2(\varepsilon)\right), \quad \text{где} \quad |\sigma_2(\varepsilon)| < \delta \quad \text{и} \quad m = m(c_2,\varepsilon). \tag{4.20}$$

Положим $c(\delta) = \max\{c_1(\delta), c_2(\delta)\}$ и $m = m(c(\delta),\varepsilon)$. Используя соотношения (4.19) и (4.20), легко убедиться, что при малых $\delta > 0$ аргументы чисел $\mu_m(\varepsilon)$ и $\mu_{m+1}(\varepsilon) - \mu_m(\varepsilon)$ мало отличаются друг от друга. С другой стороны, поскольку $|\mu_m(\varepsilon)| \ge c$, то $m|\varepsilon| \ge c/\pi$, так что из (4.20) имеем $|\mu_{m+1}(\varepsilon) - \mu_m(\varepsilon)| \ge d'|\varepsilon|$, где $d' > 0$ – не зависит от ε. Из сказанного легко следует (4.18).

Пусть $c > 0$ и τ таковы, что верны оценки обе оценки (4.18) и (4.12). Выберем τ настолько малым, чтобы при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}(\tau)$ выполнялось неравенство $A|\varepsilon|^2 < d||\varepsilon|$, где A и d, постоянные в оценках (4.12) – и (4.18). Тогда $|\lambda_{m+1}| > c$, следовательно, $l(c,\varepsilon) \le m(c,\varepsilon) + 1$. Точно так же доказывается первое из неравенств (4.17).

□

5. Основной результат

В этом пункте мы решаем обратную задачу. В качестве спектральных данных мы берем свойство локализации спектра оператора $L(\varepsilon)$ при малых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ около корней уравнения (4.10) в смысле, более мягком, чем оценка в (4.12).

Теорема 5.1. *Пусть функция q вещественна, возрастает на $[0,1]$, дифференцируема и $q' \in AC[0,1]$. Далее, пусть существует такое $c > 0$, что при стремлении ε к 0 по сектору (4.9) $\sigma(c,\varepsilon)$ – спектр оператора $L(\varepsilon)$ в области $P_-(c)$ – локализуется следующим образом:*

$$\sigma(c,\varepsilon) = \{\lambda_n(\varepsilon)\}_{n_1(c,\varepsilon)}^{\infty} \tag{5.1}$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon) + o(1), \tag{5.2}$$

где $\mu_n(\varepsilon)$ – корни уравнения (4.10), оценка $o(1)$ равномерна по n. Тогда функция q допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность интервала $(0,1)$.

Доказательство. Пусть $c > 0$ – постоянная, фигурирующая в условии теоремы. Возьмем произвольную точку λ_0 из $P_-(c)$, лежащую на кривой $\operatorname{Im} Q(\lambda) = 0$. Подстановка (3.4) и (3.7) преобразует задачу (3.2) – (3.3) в задачу (3.8) – (3.9) на кривой $\beta(\lambda_0)$. Обозначим через α_0 и α_1 углы между кривой $\beta(\lambda_0)$ и осью абсцисс в точках 0 и 1 соответственно. Выше (при доказательстве теоремы 3.1) было замечено, что кривая $\beta(\lambda_0)$ является графиком выпуклой вверх функции, поэтому $0 < \alpha_0 < \pi/2$ и $-\pi/2 < \alpha_1 < 0$. Известно [7], что в этом случае спектр задачи (3.8) – (3.9) за исключением конечного числа лежит в угле

$-2\alpha_0 < \arg z < -2\alpha_1$. Покажем, что в условиях теоремы собственные числа $\{s_k^2\}$ этой задачи при больших k концентрируются около луча $\arg s = 0$ в следующем смысле:

$$\arg s_k \to 0, \quad k \to +\infty. \tag{5.3}$$

Предположим противное: пусть существует подпоследовательность номеров $\{k_j\}$ $(j = 1, 2, \dots)$, такая, что $\arg s_{k_j} \to \alpha, \quad j \to +\infty$, при некотором $\alpha \in (-\alpha_0, 0) \cup (0, -\alpha_1)$. Положим $\varepsilon_j = Q(\lambda_0)/s_{k_j}, n_j = [|s_{k_j}|/\pi]$, где $[x]$ означает целую часть числа x.

В силу соотношений (3.4)–(3.9), если s^2 – собственное значение задачи (3.8)–(3.9) и точка ε из $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (4.15), то $\lambda \in \sigma(c, \varepsilon)$. Имеем $s_{k_j}\varepsilon_j = Q(\lambda_0) \in D(c)$, так что $\lambda_0 \in \sigma(c, \varepsilon_j)$. Отсюда в силу условий (5.1)–(5.2) будем иметь $\lambda_0 = \mu_{n_j}(\varepsilon_j) + \delta_j$, где $\delta_j \to 0,\ j \to \infty$. Тогда

$$Q(\mu_{n_j}(\varepsilon_j)) \sim Q(\lambda_0) + \delta_j \int_0^1 \sqrt{\frac{i}{2(\lambda_0 - q)}} dx,\ j \to \infty,$$

следовательно, $\arg Q(\mu_{n_j}(\varepsilon_j)) \to 0,\ j \to \infty$. С другой стороны, согласно (4.10) $\arg Q(\mu_{n_j}(\varepsilon_j)) \to -\beta$ при $j \to \infty$. Полученное противоречие доказывает (5.3).

Из (5.3) согласно критерию локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой [11, теорема 3] заключаем, что функция V (см. (3.5)) допускает мероморфное продолжение $\widetilde{V}$ в область $E(\lambda_0)$, ограниченную кривой $\beta(\lambda_0)$ и отрезком $[0, 1]$. Полюса $\widetilde{V}$ могут иметь предельные точки только на отрезке $[0, 1]$, так что функция $\widetilde{V}$ голоморфна в некоторой области $G(\lambda_0)$, ограниченной отрезком $[0, 1]$ и кривой $\beta(\lambda_0)$, гомотопной $[0, 1]$ в $E(\lambda_0)$, непрерывна вплоть до любой дуги кривой $\beta(\lambda_0)$ с концами, отличными от 0 и 1, и совпадает там с V.

Докажем, что отсюда будет следовать голоморфность функции q в некоторой окрестности интервала $(0, 1)$. Положим

$$p = p(\xi) = (\lambda_0 - q(x))^{1/4})\big|_{x=x(\lambda_0,\xi)},\ \xi \in \beta(\lambda_0),$$

Из формул (3.4) и (3.4) видно, что функция p является решением задачи Коши

$$-\frac{d^2v}{d\xi^2} + V(\lambda_0, \xi)v = 0, \quad v(0) = (\lambda_0 - m)^{1/4}, \quad \frac{dv}{d\xi}(0) = \frac{Q(\lambda_0)q'(0)}{4i(\lambda_0 - m)^{1/4}}.$$

Так как V голоморфна в области $G(\lambda_0)$, то функция p голоморфна там же. Следовательно, функция $(\lambda_0 - q(z))^{1/4} = p(\lambda_0, \xi(z))$ голоморфна в области W — прообразе $G(\lambda_0)$ при отображении (3.4). Область W содержится в нижней или верхней полуплоскости z, и ее граница содержит весь интервал $(0, 1)$. Применяя принцип Шварца, получаем окрестность интервала $(0, 1)$, в которой голоморфна функция q. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степин С.А. *Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра – Зоммерфельда* // Мат. сборник. **188**:1, 129–146 (1997).
2. Шкаликов А.А. *Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса* // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 11–17 августа, 2002). Часть 3. СМФН. **3**. М.: МАИ. 89–112 (2003).
3. Туманов С.Н., Шкаликов А.А. *О локализации спектра задачи Орра–Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса* // Мат. заметки. **72**:4, 561-–569 (2002).
4. Покотило В.И., Шкаликов А.А. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля с параболическим потенциалом* // Мат. заметки. **86**:3, 469–473 (2009).
5. Ишкин Х.К. О локализации спектра задачи с комплексным весом // Фундаментальная и прикладная математика. **12**:5, 49–64 (2006).

6. Ишкин Х.К., Резбаев А.В. *К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамосопряженного дифференциального оператора* // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **153**, 84–93 (2018).
7. Ишкин Х.К. *О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой* // Матем. заметки. **78**:1, 72–84 (2005).
8. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Ч. 1. М.: Наука. 1985.
9. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972.
10. Титчмарш Э.Ч. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* Том 2. М.: ИИЛ. 1960–1961.
11. Ишкин Х.К. *Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой* // Алгебра и анализ. **28**:1, 52–88 (2016).

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Ishkin62@mail.ru`

Рустем Ильдарович Марванов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `rsmar1v@gmail.com`