ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 3 (2020). С. 51-61.

УДК 517.9; 519.216.2

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Е.Ю. МАШКОВ

Аннотация. Изучается система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которой в левой части имеется вырожденный постоянный линейный оператор. В правой части системы имеется постоянный линейный оператор и детерминированное слагаемое, которое зависит только от времени, а также импульсные воздействия. Предполагается, что коэффициент диффузии данной системы задается квадратной матрицей, зависящей только от времени. Данные системы уравнений встречаются во многих приложениях. Изучаемая в работе система с применением преобразования регулярного пучка матриц к обобщенной вещественной форме Шура приводится к каноническому виду. Для исследования полученных канонических уравнений необходимо рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов, включая винеровский процесс. В связи с этим для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, что позволяет при исследовании уравнения не применять аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются аналитические формулы для решений уравнения в терминах производных в среднем случайных процессов.

Ключевые слова: Производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, стохастическое уравнение леонтьевского типа.

Mathematics Subject Classification: 60H30, 60H10

1. Введение

Рассматривается вырожденное стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито вида
$$d\tilde{A}\xi(t) = \tilde{B}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + P(t)dw(t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$
где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – регулярный пучок вещественных постоянных матриц размера $n \times n$; $\tilde{A}$ – вырождена, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс; $w(t)$ – винеровский процесс в R^n; $P(t)$ – достаточно гладкая матрица размера $n \times n$; $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция; $\zeta(t)$ – n-мерный процесс скачков; S – $n \times n$-матрица. В литературе для данных систем используются следующие названия: алгебро-дифференциальные, дескрипторные, системы леонтьевского типа. Изучаемые уравнения возникают в работах Л. А. Власенко и др. [1], [2] при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. В работах O. Schein, G. Denk [3], T. Sickenberger, R. Winkler [4], [5] рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. В работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка [6]

E.Yu. Mashkov, On approach for studying stochastic Leontieff type equations with impulse actions.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-01-00048).

Поступила 17 апреля 2020 г.

с применением систем леонтьевского типа изучается динамическое искажение сигналов в радиоустройствах. Также отметим работу А. А. Белова, А. П. Курдюкова [7], в которой описаны многочисленные приложения уравнений леонтьевского типа.

Отправной точкой для данной статьи послужила работа [8], в которой данное уравнение исследуется с применением канонической формы Вейерштрасса регулярного пучка матриц. Поскольку, в общем случае, мы не можем устойчиво вычислить форму Вейерштрасса (см. [9]), напрашивается исследование данной системы с применением обобщенной формы Шура для регулярных пучков. Как известно(см. [9]), форма Шура вычисляется устойчивым образом.

Специфика уравнений леонтьевского типа предполагает рассматривать производные высших порядков от правой части (в том числе и винеровского процесса). Как известно (см., например, [10]), производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в изучении конкретных уравнений. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения сложным.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования (как и в [8], [11]) данного уравнения основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не использованы обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

2. Производные в среднем

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ-подалгебр σ-алгебры F "настоящее"N_t^ξ, которое будем считать полным, т.е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|N_t^\xi)$ относительно "настоящего" N_t^ξ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону [12], [13], [14] даем следующее определение:

Определение 2.1 ([10]). *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\Big),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\Big),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [15]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} | \xi(t) = x\right)$$

$$Y_*^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t} | \xi(t) = x\right)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t,\xi(t))$.

Определение 2.2 ([10]). *Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y_*^0(t,x))$ и $u^{\xi}(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y_*^0(t,x))$.

Определение 2.3 ([10]). *$v^{\xi}(t) = v^{\xi}(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^{\xi}(t) = u^{\xi}(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов (см. [10]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает "случайность"процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([10]), который мы обозначим символом $w(t)$. Имеют место следующие

Лемма 2.1 ([16]). *Пусть $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс, $P(t)$ – достаточно гладкая $k \times n$-матрица, $t \in (0,T)$. Тогда для любого t имеет место формула*

$$D_S^w \int_0^t P(s)dw(s) = P(t)\frac{w(t)}{2t}.$$

Лемма 2.2 ([10], [11]). *Для $t \in (0,T)$ имеют место равенства*

$$Dw(t) = 0, \;\; D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}, \;\; D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

При целом $k \geqslant 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}.$$

3. Основной результат

Как уже было сказано во введении, рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$d\tilde{A}\xi(t) = \tilde{B}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + P(t)dw(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant T,$$

которое в интегральной форме имеет вид

$$\tilde{A}\xi(t) = \tilde{B}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + S\zeta(t) + \int_0^t P(s)dw(s), \;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.1}$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ - вещественные постоянные $n\times n$ - матрицы, $\tilde{A}$ – вырождена, $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$ – регулярный пучок матриц, $\lambda \in R$, S – числовая $n\times n$-матрица, $\zeta(t)$ – n-мерный процесс скачков, $P(t)$ – достаточно гладкая $n\times n$-матрица, $f(t)$ – достаточно гладкая детерминированная вектор-функция, зависящая от времени, $w(t)$ – винеровский процесс, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс. Процесс скачков $\zeta(t)=\zeta(t,\omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t,\omega)=\sum_{r=1}^{N}\tilde{\zeta}_r(\omega)\chi(t-t_r),\ \ 0<t_1<\cdots<t_N<T,$$

где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных, $\tilde{\zeta}_r(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n.

Из вида (3.1) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (3.1) предполагается вида

$$\xi(0,\omega)=0. \tag{3.2}$$

Скажем сразу, что для построенных нами ниже решений это условие не выполняется. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0>0$ (см. ниже).

Формулы для решений задачи (3.1), (3.2) будем искать (как и в работе [2]) среди случайных процессов $\xi(t,\omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) уравнениям

$$\tilde{A}\xi(t)-\tilde{A}\xi(0)=\tilde{B}\int_0^t\xi(s)ds+\int_0^t f(s)ds+\int_0^t P(s)dw(s),\ \ 0\leqslant t\leqslant t_1,$$

$$\tilde{A}\xi(t)-\tilde{A}\xi(t_r)=\tilde{B}\int_{t_r}^t\xi(s)ds+\int_{t_r}^t f(s)ds+\int_{t_r}^t P(s)dw(s),\ \ t_r\leqslant t\leqslant t_{r+1},$$

$$\tilde{A}\xi(t)-\tilde{A}\xi(t_N)=\tilde{B}\int_{t_N}^t\xi(s)ds+\int_{t_N}^t f(s)ds+\int_{t_N}^t P(s)dw(s),\ \ t_N\leqslant t\leqslant T,$$

при всех $r=1,2,\dots,N-1$, в точках t_r удовлетворяют равенствам

$$\tilde{A}\xi(t_r+0,\omega)-\tilde{A}\xi(t_r-0,\omega)=S\tilde{\zeta}_r(\omega), r=1,2,\dots,N,$$

и в начальный момент времени $t=0$ удовлетворяют начальному условию (3.2).

Итак, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (3.1), (3.2) определяется последовательно для $r=0,1,\dots,N$ через случайные процессы $\xi_r(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{A}\xi_0(t)-\tilde{A}\xi_0(0)=\tilde{B}\int_0^t\xi_0(s)ds+\int_0^t f(s)ds+\int_0^t P(s)dw(s),\ \ 0\leqslant t\leqslant t_1,\ (r=0),$$

$$\tilde{A}\xi_r(t)-\tilde{A}\xi_r(t_r)=\tilde{B}\int_{t_r}^t\xi_r(s)ds+\int_{t_r}^t f(s)ds+\int_{t_r}^t P(s)dw(s),\ \ t_r\leqslant t\leqslant t_{r+1},$$

$$\tilde{A}\xi_N(t)-\tilde{A}\xi_N(t_N)=\tilde{B}\int_{t_N}^t\xi_N(s)ds+\int_{t_N}^t f(s)ds+\int_{t_N}^t P(s)dw(s),\ \ t_N\leqslant t\leqslant T,$$

$r=1,2,\dots,N-1$, где

$$\xi_0(0)=0,\ \ \tilde{A}\xi_r(t_r)=\tilde{A}\xi_{r-1}(t_r,\omega)+S\tilde{\zeta}_r(\omega),\ \ r=1,\dots,N.$$

Для дальнейшего изложения нам понадобится

Теорема 3.1. **(Обобщенная вещественная форма Шура** [9]**)** *Для регулярного пучка $\lambda A+B$ вещественных постоянных $n\times n$-матриц A и B найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R, такие, что матрица Q_LAQ_R – верхняя квазитреугольная (т.е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера*

1×1 *и* 2×2*; блоки размера* 1×1 *соответствуют вещественным собственным значениям, а блоки размера* 2×2 *– сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица* Q_LBQ_R *– верхняя треугольная.*

Как нетрудно заметить, уравнение (3.1) в общей форме неудобно для изучения, поэтому приведем его к некоторому каноническому виду. Выполним для регулярного пучка матриц $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$, $\lambda\in R$ преобразование Шура (описывается парой невырожденных матриц (операторов) Q_L и Q_R). Тогда уравнение (3.1) преобразуется следующим образом

$$Q_L\tilde{A}Q_RQ_R^{-1}\xi(t)=Q_L\tilde{B}Q_R\int_0^t Q_R^{-1}\xi(s)ds+$$
$$+\int_0^t Q_Lf(s)ds+Q_LS\zeta(t)+\int_0^t Q_LP(s)dw(s),\ \ 0\leqslant t\leqslant T,$$

и в новых обозначениях принимает вид

$$A\eta(t)=\int_0^t B\eta(s)ds+\int_0^t g(s)ds+M\zeta(t)+\int_0^t C(s)dw(s), \tag{3.3}$$
$$\eta(0)=0, \tag{3.4}$$

где $C(t)=Q_LP(t)$, $\eta(t)=Q_R^{-1}\xi(t)$, $M=Q_LS$, $A=Q_L\tilde{A}Q_R$ – верхняя квазитреугольная матрица, $B=Q_L\tilde{B}Q_R$ – верхнетреугольная матрица, $Q_Lf(t)=g(t)$. Пронумеровав вектора базиса соответствующим образом, в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2, потом невырожденные блоки размера 1×1, а затем вырожденные блоки размера 1×1.

Тогда, учитывая сказаное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (3.3), (3.4) определяются последовательно для $r=0,1,\ldots,N$ через случайные процессы $\eta_r(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$A\eta_0(t)-A\eta_0(0)=\int_0^t B\eta_0(s)ds+\int_0^t g(s)ds+\int_0^t C(s)dw(s),\ 0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}A\eta_r(t)-A\eta_r(t_r)=\int_{t_r}^t B\eta_r(s)ds+\int_{t_r}^t g(s)ds+\int_{t_r}^t C(s)dw(s),\\ t_r\leqslant t\leqslant t_{r+1},\ \ r=1,\ldots,N-1\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}A\eta_N(t)-A\eta_N(t_N)=\int_{t_N}^t B\eta_N(s)ds+\int_{t_N}^t g(s)ds+\int_{t_N}^t C(s)dw(s),\\ t_N\leqslant t\leqslant T,\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\eta_0(0)=0,\ \ A\eta_r(t_r)=A\eta_{r-1}(t_r,\omega)+M\tilde{\zeta}_r(\omega),\ \ r=1,\ldots,N \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. *Как было отмечено выше, для построения процесса, описывающего модель, заданную уравнениями* (3.5), (3.6) *и* (3.7)*, нужны производные свободных членов (включая винеровский процесс). Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций. Поэтому чтобы избежать использования обобщенных функций, мы для построения процесса, описывающего модель, заданную* (3.5), (3.6) *и* (3.7)*, будем использовать симметрические производные в среднем (текущие скорости)* D_S^w *для случайных процессов. В этой работе для вычисления симметрических производных высших порядков будет использоваться* σ*-алгебра "настоящее" винеровского процесса. Отметим, что для вычисления производных в среднем можно использовать и какую-либо другую* σ*-алгебру, но тогда формулы для вычисления симметрических производных высших порядков от винеровского процесса изменятся.*

Принимая во внимание структуру матриц A и B, нетрудно видеть, что задачи (3.3), (3.4) и (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) распадаются на несколько уравнений и систем уравнений.

Последние $n-p+1$ компонент процесса η_r, соответствующие строкам A с вырожденными диагональными блоками размера 1×1, соберем в одно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & a^p_{p+1} & a^p_{p+2} & \dots & a^p_n \\ 0 & 0 & a^{p+1}_{p+2} & \dots & a^{p+1}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^p_r(t) \\ \eta^{p+1}_r(t) \\ \vdots \\ \eta^n_r(t) \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & a^p_{p+1} & a^p_{p+2} & \dots & a^p_n \\ 0 & 0 & a^{p+1}_{p+2} & \dots & a^{p+1}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^p_r(t_r) \\ \eta^{p+1}_r(t_r) \\ \vdots \\ \eta^n_r(t_r) \end{pmatrix} =$$
$$= \int_{t_r}^t \begin{pmatrix} b^p_p & b^p_{p+1} & \dots & b^p_n \\ 0 & b^{p+1}_{p+1} & \dots & b^{p+1}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^p_r(s) \\ \eta^{p+1}_r(s) \\ \vdots \\ \eta^n_r(s) \end{pmatrix} ds + \int_{t_r}^t \begin{pmatrix} g^p(s) \\ g^{p+1}(s) \\ \vdots \\ g^n(s) \end{pmatrix} ds + \tag{3.9}$$
$$+ \int_{t_r}^t \begin{pmatrix} c^p_1(s) & c^p_2(s) & \dots & c^p_{n-1}(s) & c^p_n(s) \\ c^{p+1}_1(s) & c^{p+1}_2(s) & \dots & c^{p+1}_{n-1}(s) & c^{p+1}_n(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c^{n-1}_1(s) & c^{n-1}_2(s) & \dots & c^{n-1}_{n-1}(s) & c^{n-1}_n(s) \\ c^n_1(s) & c^n_2(s) & \dots & c^n_{n-1}(s) & c^n_n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ w^2(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix},$$
$$t_r \leqslant t \leqslant t_{r+1},\ r = 1, 2, ..., N-1.$$

Из последнего уравнения системы (3.9) получаем, что

$$b^n_n \int_{t_r}^t \eta^n_r(s) ds = -\int_{t_r}^t g^n(s) ds - \sum_{j=1}^n \int_{t_r}^t c^n_j(s) dw^j(s)$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\eta^n_r(t)$ применением к обеим частям равенства производной D^w_S (см. Замечание 3.1). Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D^w_* (и, следовательно, D^w_S) к интегралам Римана в левой и правой частях дает одинаковые результаты $\eta^n_r(t)$ и $g^n(t)$. Таким образом, мы с применением Леммы 2.1 получаем, что

$$\eta^n_r(t) = -\frac{1}{b^n_n} g^n(t) - \frac{1}{b^n_n} \sum_{j=1}^n c^n_j(t) \frac{w^j}{2t},\ \ r = 1, 2, ..., N-1. \tag{3.10}$$

Из предпоследнего уравнения системы (3.9) мы получаем, что

$$a^{n-1}_n \eta^n_r(t) - a^{n-1}_n \eta^n_r(t_r) = \int_{t_r}^t \left(b^{n-1}_{n-1} \eta^{n-1}(s) + b^{n-1}_n \eta^n(s) \right) ds +$$
$$+ \int_{t_r}^t g^{n-1}(s) ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_r}^t c^{n-1}_j(s) dw^j(s)$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, с использованием Леммы 2.2 выводим

$$\begin{aligned}\eta_r^{n-1}(t) = &-\frac{a_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}\cdot b_n^n}\cdot\frac{dg^n(t)}{dt}+\frac{b_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}\cdot b_n^n}\cdot g^n(t)-\frac{1}{b_{n-1}^{n-1}}\cdot g^{n-1}(t)+\\ &+\frac{a_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}\cdot b_n^n}\cdot\sum_{j=1}^n c_j^n(t)\cdot\frac{w^j}{4t^2}-\frac{a_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}\cdot b_n^n}\cdot\sum_{j=1}^n\frac{w^j}{2t}\cdot\frac{dc_j^n(t)}{dt}+\\ &+\frac{b_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}\cdot b_n^n}\cdot\sum_{j=1}^n c_j^n(t)\cdot\frac{w^j}{2t}-\frac{1}{b_{n-1}^{n-1}}\cdot\sum_{j=1}^n c_j^{n-1}(t)\cdot\frac{w^j}{2t}\end{aligned}\tag{3.11}$$

В точности аналогично, для $p \leqslant i \leqslant n-1$ мы получаем рекурентную формулу

$$D_S\left(\sum_{j=i+1}^n a_j^i\cdot\eta_r^j(t)\right)=\sum_{j=i}^n b_j^i\cdot\eta_r^j(t)+g^i(t)+\sum_{j=1}^n c_j^i(t)\cdot\frac{w^j}{2t}\tag{3.12}$$

Заметим, что для систем вида (3.9), заданных на промежутках $[0,t_1]$ и $[t_N,T]$, имеют место при $0<t\leqslant t_1$ и $t_N\leqslant t<T$ соответственно аналогичные формулы для решений. При этом, найденные процессы удовлетворяют условиям (3.8) в том случае, когда компоненты случайной величины $M\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие нулевым 1×1 блокам по главной диагонали в A, равны нулю, т.е. $\left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j\right)_{j=p}^n=0$.

Итак, с учетом выше сказанного, при $0<t<T$ получаем формулы для $\eta^i(t)$:

$$\eta^n(t)=-\frac{1}{b_n^n}g^n(t)-\frac{1}{b_n^n}\sum_{j=1}^n c_j^n(t)\frac{w^j}{2t},\tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}D_S\left(\sum_{j=i+1}^n a_j^i\cdot\eta^j(t)\right)=\sum_{j=i}^n b_j^i\cdot\eta^j(t)+g^i(t)+\sum_{j=1}^n c_j^i(t)\cdot\frac{w^j}{2t},\\ p\leqslant i\leqslant n-1\end{gathered}\tag{3.14}$$

Перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (3.9) (при $r=0$). Принимая во внимание определение симметрических производных в среднем, нетрудно заметить, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда из формул (3.10), (3.11) и (3.12) видно, что решения $\eta^l(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k\geqslant 1$. Следовательно, решения стремятся к бесконечности при $t\to 0$, т.е. значения решений при $t=0$ не существуют. Один из вариантов разрешения указанной ситуации (как и в [11]) состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0\in(0,T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t)=\begin{cases}t_0, \text{ если } 0\leqslant t\leqslant t_0;\\ t, \text{ если } t_0\leqslant t.\end{cases}\tag{3.15}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (3.10), (3.11) и (3.12) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t=0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t_0\leqslant t<T$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t\geqslant\max(t_0^{(1)},t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Для строк A с невырожденными блоками размера 1×1 получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&a_j^j\eta_r^j(t)+a_{j+1}^j\eta^{j+1}(t)+\ldots+a_n^j\eta^n(t)-a_j^j\eta^j(t_r)-a_{j+1}^j\eta^{j+1}(t_r)-\ldots-a_n^j\eta^n(t_r)=\\
&\quad=\int_{t_r}^t(b_j^j\eta_r^j(s)+b_{j+1}^j\eta^{j+1}(s)+\ldots+b_n^j\eta^n(s))ds+\\
&\qquad+\int_{t_r}^t g^j(s)ds+\int_{t_r}^t c_1^j(s)dw^1(s)+\int_{t_r}^t c_2^j(s)dw^2(s)+...+\int_{t_r}^t c_n^j(s)dw^n(s),\\
&\qquad t_r\leqslant t\leqslant t_{r+1},\ \ r=1,\ldots,N-1.
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Для такого типа уравнений есть аналитическая формула для решений (см. [17])

$$\begin{aligned}
\eta_r^j(t)=&\,e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)}\eta_r^j(t_r)+\frac{a_{j+1}^j}{a_j^j}e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)}\eta^{j+1}(t_r)+...+\frac{a_n^j}{a_j^j}e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)}\eta^n(t_r)+\\
&+\int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}\frac{c_1^j(u)}{a_j^j}dw_u^1+\int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}\frac{c_2^j(u)}{a_j^j}dw_u^2+...+\int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}\frac{c_n^j(u)}{a_j^j}dw_u^n+\\
&+\int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}[\frac{1}{a_j^j}g^j(u)+\frac{b_{j+1}^j}{a_j^j}\eta^{j+1}(u)+\\
&+\ldots+\frac{b_n^j}{a_j^j}\eta^n(u)-\frac{b_j^j}{(a_j^j)^2}(a_{j+1}^j\eta^{j+1}(u)+\ldots+a_n^j\eta^n(u))]du-\\
&-\frac{a_{j+1}^j}{a_j^j}\eta^{j+1}-\ldots-\frac{a_n^j}{a_j^j}\eta^n.
\end{aligned}$$

Отметим, что для уравнений вида (3.16), заданных на промежутках $[0,t_1]$ и $[t_N,T]$, имеют место аналогичные формулы для решений. Учитывая все $\eta_r^j(t)$, получаем выражение для $\eta^j(t)$

$$\begin{aligned}
\eta^j(t)=&\sum_{r=1}^N e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)}\cdot\left(\frac{m_1^j\tilde\zeta_r^1}{a_j^j}+...+\frac{m_n^j\tilde\zeta_r^n}{a_j^j}\right)\cdot\chi(t-t_r)+\\
&+\int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}\frac{c_1^j(u)}{a_j^j}dw_u^1+\int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}\frac{c_2^j(u)}{a_j^j}dw_u^2+...+\int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}\frac{c_n^j(u)}{a_j^j}dw_u^n+\\
&+\int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)}[\frac{1}{a_j^j}g^j(u)+\frac{b_{j+1}^j}{a_j^j}\eta^{j+1}(u)+\\
&+\ldots+\frac{b_n^j}{a_j^j}\eta^n(u)-\frac{b_j^j}{(a_j^j)^2}(a_{j+1}^j\eta^{j+1}(u)+\ldots+a_n^j\eta^n(u))]du-\\
&-\frac{a_{j+1}^j}{a_j^j}\eta^{j+1}-\ldots-\frac{a_n^j}{a_j^j}\eta^n.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Для строк A с блоками размера 2×2 получаем подсистемы из пары уравнений

$$
\begin{aligned}
& a_i^i \eta_r^i(t) + a_{i+1}^i \eta_r^{i+1}(t) + a_{i+2}^i \eta^{i+2}(t) + \ldots + a_n^i \eta^n(t) - \\
& \quad - a_i^i \eta_r^i(t_r) - a_{i+1}^i \eta_r^{i+1}(t_r) - a_{i+2}^i \eta^{i+2}(t_r) - \ldots - a_n^i \eta^n(t_r) = \\
& = \int_{t_r}^t (b_i^i \eta_r^i(s) + b_{i+1}^i \eta_r^{i+1}(s) + b_{i+2}^i \eta^{i+2}(s) + \ldots + b_n^i \eta^n(s)) ds + \\
& \quad + \int_{t_r}^t g^i(s) ds + \int_{t_r}^t c_1^i(s) dw^1(s) + \int_{t_r}^t c_2^i(s) dw^2(s) + \ldots + \int_{t_r}^t c_n^i(s) dw^n(s), \\
& a_i^{i+1} \eta_r^i(t) + a_{i+1}^{i+1} \eta_r^{i+1}(t) + a_{i+2}^{i+1} \eta^{i+2}(t) + \ldots + a_n^{i+1} \eta^n(t) - \\
& \quad - a_i^{i+1} \eta_r^i(t_r) - a_{i+1}^{i+1} \eta_r^{i+1}(t_r) - a_{i+2}^{i+1} \eta^{i+2}(t_r) - \ldots - a_n^{i+1} \eta^n(t_r) = \\
& = \int_{t_r}^t (b_{i+1}^{i+1} \eta_r^{i+1}(s) + b_{i+2}^{i+1} \eta^{i+2}(s) + \ldots + b_n^{i+1} \eta^n(s)) ds + \\
& \quad + \int_{t_r}^t g^{i+1}(s) ds + \int_{t_r}^t c_1^{i+1}(s) dw^1(s) + \int_{t_r}^t c_2^{i+1}(s) dw^2(s) + \ldots + \int_{t_r}^t c_n^{i+1}(s) dw^n(s), \\
& \quad t_r \leqslant t \leqslant t_{r+1}, \;\; r = 1, \ldots, N-1.
\end{aligned}
$$

В матричной форме в новых обозначениях эта подсистема уравнений принимает вид

$$
\begin{aligned}
& \bar{\eta}_r(t) - \bar{\eta}_r(t_r) + \vartheta(t) - \vartheta(t_r) = \\
& \quad = \int_{t_r}^t K \bar{\eta}_r(s) ds + \int_{t_r}^t \theta(s) ds + \int_{t_r}^t \bar{g}(s) ds + \int_{t_r}^t \Lambda \Theta(s) dw(s)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}_r = \begin{pmatrix} \eta_r^i \\ \eta_r^{i+1} \end{pmatrix}, \;\; \Xi = \begin{pmatrix} b_i^i & b_{i+1}^i \\ 0 & b_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}, \;\; \Lambda = \begin{pmatrix} a_i^i & a_{i+1}^i \\ a_i^{i+1} & a_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}^{-1}, \\
\vartheta(t) = \Lambda \begin{pmatrix} a_{i+2}^i & \cdots & a_n^i \\ a_{i+2}^{i+1} & \cdots & a_n^{i+1} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \ldots \eta^n \right)^T, \\
\theta(t) = \Lambda \begin{pmatrix} b_{i+2}^i & \cdots & b_n^i \\ b_{i+2}^{i+1} & \cdots & b_n^{i+1} \end{pmatrix} \left(\eta^{i+2} \ldots \eta^n \right)^T, \\
\bar{g} = \Lambda \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}, \;\; K = \Lambda \Xi, \;\; \Theta(t) = \begin{pmatrix} c_1^i(t) & \cdots & c_n^i(t) \\ c_1^{i+1}(t) & \cdots & c_n^{i+1}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Для этой подсистемы уравнений имеет место аналитическая формула для решений (см. [17])

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}_r(t) = e^{K(t-t_r)} \bar{\eta}_r(t_r) + e^{K(t-t_r)} \vartheta(t_r) + \int_{t_r}^t e^{K(t-\tau)} \Lambda \Theta(\tau) dw_\tau + \\
+ \int_{t_r}^t e^{K(t-\tau)} \left(\theta(\tau) + \bar{g}(\tau) - K \vartheta(\tau) \right) d\tau - \vartheta(t).
\end{aligned}
$$

Отметим, что для уравнений вида (3.18), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, имеют место аналогичные формулы для решений. Учитывая все $\bar{\eta}_r(t)$, получаем выражение для

$\bar{\eta}(t)$

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{r=1}^{N} e^{K(t-t_r)}\Lambda\left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j\right)_{j=i}^{i+1}\cdot\chi(t-t_r) + \\ + \int_0^t e^{K(t-\tau)}\left(\theta(\tau)+\bar{g}(\tau)-K\vartheta(\tau)\right)d\tau + \\ + \int_0^t e^{K(t-\tau)}\Lambda\Theta(\tau)dw(\tau)-\vartheta(t), \tag{3.19}$$

где $\left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j\right)_{j=i}^{i+1}$ – 2-мерный вектор, составленный i-й и $(i+1)$-й координат вектора $M\tilde{\zeta}_r(\omega)$.

Таким образом, суммируя выше сказанное, мы доказали следующее утверждение

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$ – регулярный пучок постоянных $n\times n$-матриц, S – $n\times n$-матрица, а $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0\leqslant t\leqslant T$; пусть $0<t_1<\cdots<t_N<T$; Q_L и Q_R – невырожденные матрицы размера $n\times n$, приводящие пучок $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$ к канонической обобщенной вещественной форме Шура; $A=Q_L\tilde{A}Q_R$, $B=Q_L\tilde{B}Q_R$; пусть $\tilde{\zeta}_r(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n, такие, что компоненты случайной величины $Q_LS\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие вырожденным блокам размера 1×1 на главной диагонали в A, равны нулю, $r=1,2,\ldots,N$; пусть $\zeta(t,\omega)=\sum_{r=1}^{N}\tilde{\zeta}_r(\omega)\chi(t-t_r)$, где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных. Тогда:*
1) уравнение (3.1) преобразуется в каноническое уравнение (3.3), которое распадается на отдельные уравнения и подсистемы уравнений;
2) для подсистемы, соответствующей строкам A с вырожденными блоками размера 1×1, имеет место при $0<t<T$ рекурентная формула для нахождения решений вида (3.13),(3.14);
3) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0>0$, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 2) рекурентным соотношениям, заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (3.15) и получаем процессы, принимающие при $t=0$ нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0\leqslant t<T$;
4) для уравнений, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 1×1, имеет место аналитическая формула для решений вида (3.17);
5)для подсистем, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 2×2, имеет место аналитическая формула для решений вида (3.19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власенко Л.А, Лысенко Ю.Г., Руткас А.Г. *Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации* // Экономическая кибернетика. **1-3** (67–69), 4–9 (2011)
2. Vlasenko L.A., Lyshko S.L., Rutkas A.G. *On a stochastic impulsive sustem* // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. **2**, 50–55 (2012)
3. Schein O., Denk G. *Numerical solution of stochastic differential-algebraic equations with applications to transient noise simulation of microelectronic circuits* // Journal of Computational and Applied Mathematics. **100**:1, 77–92(1998)
4. Sickenberger T., Winkler R. *Stochastic oscillations in circuit simulation* // PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. **7**:1, 4050023—4050024 (2007)
5. Winkler R. *Stochastic DAEs in Transient Noise Simulation* // Proceedings of Scientific Computing in Electrical Engineering, June, 23rd – 28th, 2002, Eindhoven, Springer Series Mathematics in Industry. **4**, 408–415 (2004)

6. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. *On the measurement of the «white noise»* // Vestnik of South Ural State University. **27**(286), 99–108 (2012)
7. Белов А.А., Курдюков А.П. *Дескрипторные системы и задачи управления* // М.: АНО Физматлит. 2015.
8. Mashkov E.Yu. *Stochastic Leontief type equations with impulse actions* // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. **11**:2, 58–72 (2018)
9. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра* // М.: Мир. 2001.
10. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics* // London: Springer-Verlag. 2011.
11. Гликлих Ю.Е., Е.Ю. Машков Е.Ю. *Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. **6**:2, 25-39 (2013)
12. Nelson E. *Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics* // Phys. Reviews. **150**:4, 1079–1085 (1996)
13. Nelson E. *Dynamical theory of Brownian motion* // Princeton: Princeton University Press. 1967.
14. Nelson E. *Quantum fluctuations* // Princeton: Princeton University Press. 1985.
15. Партасарати К.Р. *Введение в теорию вероятностей и теорию меры* // М.: Мир. 1988.
16. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. *Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients* // Applicable Analysis. **94**:8, 1614–1623 (2015)
17. Gihman I.I., Scorohod A.V. *Theory of stochastic processes* // **3**. New York (NY): Springer-Verlag. 1979.

Евгений Юрьевич Машков,
Юго-Западный государственный университет,
ул. 50 лет Октября, 94,
305040, г. Курск, Россия
E-mail: `mashkovevgen@yandex.ru`