

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Л.Б. МИРОНОВА

Аннотация. Доказаны существование и единственность решения для одного класса систем интегральных уравнений с частными интегралами. Интегральными уравнениями с частными интегралами называют интегральные уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаками интегралов различной кратности. Рассматриваемый в статье класс интегральных уравнений характеризуется тем, что уравнения содержат интегралы как с переменными, так и с постоянными верхними пределами интегрирования. Предварительно доказывается теорема существования и единственности для интегральных уравнений в трехмерном пространстве. Затем аналогичное утверждение доказывается для уравнений с произвольным числом независимых переменных. Указаны некоторые приложения полученного результата. Для гиперболической системы с доминирующими производными второго порядка с тремя независимыми переменными доказаны существование и единственность решения основной характеристической задачи. Основная характеристическая задача для системы уравнений с доминирующими производными второго порядка может рассматриваться как аналог задачи Гурса для гиперболической системы без кратных характеристик. Решение указанной задачи построено в явном виде в терминах матрицы Римана. Матрица Римана определена как решение системы интегральных уравнений Вольтерры. Сформулирована задача с граничными условиями на пяти сторонах характеристического параллелепипеда для указанной системы уравнений с доминирующими производными второго порядка. Путем сведения задачи к системе уравнений с частными интегралами, опираясь на полученные результаты, доказаны существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: интегральное уравнение с частными интегралами, задача с условиями на характеристиках.

Mathematics Subject Classification: 45A05, 45F05, 35L51

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье идет речь об одном классе интегральных уравнений с частными интегралами, то есть уравнений, содержащих неизвестную функцию нескольких переменных под интегралами различной кратности [1]–[3]. Получены условия безусловной однозначной разрешимости некоторых систем интегральных уравнений (указаний на этот вопрос в литературе автору обнаружить не удалось), которые применяются к решению одной задачи для системы уравнений с частными производными с граничными условиями на характеристиках.

Исследование граничных задач для гиперболических систем представляет значительный теоретический интерес. Различные аспекты теории указанных систем исследовались многими авторами [4]–[11]. В данной статье содержится некоторое развитие результатов работы [12], где был предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены

L.B. MIRONOVA, ON CLASS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS AND ITS APPLICATIONS.

©Миронова Л.Б. 2019.

Поступила 3 июля 2018 г.

решения задач Коши и Гурса, а также работ [13]–[14], где метод Римана применяется для исследования задач для одной системы уравнений с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками.

2. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [15] показано, что интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами с непрерывными ядрами и свободным членом

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) - \int_{x_0}^x K_1(x, y, z, \alpha)w(\alpha, y, z) d\alpha - \int_{y_0}^y K_2(x, y, z, \beta)w(x, \beta, z) d\beta - \\
 - \int_{z_0}^z K_3(x, y, z, \gamma)w(x, y, \gamma) d\gamma - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y K_4(x, y, z, \alpha, \beta)w(\alpha, \beta, z) d\beta d\alpha - \\
 - \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z K_5(x, y, z, \alpha, \gamma)w(\alpha, y, \gamma) d\gamma d\alpha - \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z K_6(x, y, z, \beta, \gamma)w(x, \beta, \gamma) d\gamma d\beta - \\
 - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z K_7(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)w(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha = F(x, y, z), \quad (1)
 \end{aligned}$$

а также его n -мерный аналог, имеют единственное решение в классе непрерывных функций. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если в уравнении*

$$\begin{aligned}
 w(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^n \sum_{Q_{k,n}} \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \dots \int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} K_{q_1 \dots q_k}(x_1, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \dots, \alpha_{q_k}) \times \\
 \times w(x_1, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n) \times \\
 \times d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_1} = F(x_1, \dots, x_n), \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$Q_{k,n} = \{(q_1, \dots, q_k) \mid 1 \leq q_1 < \dots < q_k \leq n\},$$

где $x_i^0 \leq x_i \leq x_i^1$, $i = \overline{1, n}$, q_1, \dots, q_k — натуральные числа, $K_{q_1 \dots q_k}$, $(q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}$, $k = \overline{1, n}$, F — непрерывные функции своих аргументов в соответствующих замкнутых параллелепипедах, то в параллелепипеде $\Omega = [x_1^0, x_1^1] \times \dots \times [x_n^0, x_n^1]$ существует единственное непрерывное решение $w(x_1, \dots, x_n)$ этого уравнения.

Здесь предлагается обобщение этого результата на несколько более широкий класс систем интегральных уравнений.

1. Трехмерное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) - \int_{x_0}^x K_1(x, y, z, \alpha)w(\alpha, y, z) d\alpha - \int_{y_0}^y K_2(x, y, z, \beta)w(x, \beta, z) d\beta - \\
 - \int_{z_0}^z K_3(x, y, z, \gamma)w(x, y, \gamma) d\gamma - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^{y_1} K_{12}(x, y, z, \alpha, \beta)w(\alpha, \beta, z) d\beta d\alpha -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{x_0}^x \int_{z_0}^{z_1} K_{13}(x, y, z, \alpha, \gamma) w(\alpha, \gamma, z) d\gamma d\alpha - \int_{y_0}^y \int_{x_0}^{x_1} K_{21}(x, y, z, \alpha, \beta) w(\alpha, \beta, z) d\alpha d\beta - \\
 & - \int_{y_0}^y \int_{z_0}^{z_1} K_{23}(x, y, z, \beta, \gamma) w(\beta, \gamma, z) d\gamma d\beta - \int_{z_0}^z \int_{x_0}^{x_1} K_{31}(x, y, z, \alpha, \gamma) w(\alpha, y, \gamma) d\alpha d\gamma - \\
 & - \int_{z_0}^z \int_{y_0}^{y_1} K_{32}(x, y, z, \beta, \gamma) w(x, \beta, \gamma) d\beta d\gamma - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} K_{123}(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) w(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha - \\
 & - \int_{y_0}^y \int_{x_0}^{x_1} \int_{z_0}^{z_1} K_{213}(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) w(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\alpha d\beta - \\
 & - \int_{z_0}^z \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} K_{312}(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) w(\alpha, \beta, \gamma) d\beta d\alpha d\gamma = F(x, y, z), \quad (3)
 \end{aligned}$$

где $(x, y, z) \in D = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$, $x_0 < x_1$, $y_0 < y_1$, $z_0 < z_1$, $w = \text{colon}(w^1, \dots, w^m)$, $F = \text{colon}(f^1, \dots, f^m)$, K_ω — матричные функции размерности $m \times m$ (здесь ω — набор индексов). Коэффициенты и правая часть уравнения (3) предполагаются непрерывными в соответствующих замкнутых параллелепипедах. Уравнение (3) кратко запишем в виде

$$w - Bw = F. \quad (4)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Для матриц $A = (a_{ij})$, где функции a_{ij} заданы на ограниченном замкнутом множестве D , будем использовать норму [16, с. 410]

$$\|A\| = \max_i \sum_j \max_D |a_{ij}|.$$

Пусть выполняются оценки

$$\begin{aligned}
 & x + y + z < s \text{ в } D, \\
 & 1 + \|K_1\| < M, \quad 1 + \|K_2\| < M, \quad 1 + \|K_3\| < M, \\
 & 1 + \left\| \int_0^{y_1} K_{12} d\beta \right\| < M, \quad 1 + \left\| \int_0^{z_1} K_{13} d\gamma \right\| < M, \\
 & 1 + \left\| \int_0^{x_1} K_{21} d\alpha \right\| < M, \quad 1 + \left\| \int_0^{z_1} K_{23} d\gamma \right\| < M, \\
 & 1 + \left\| \int_0^{x_1} K_{31} d\alpha \right\| < M, \quad 1 + \left\| \int_0^{y_1} K_{32} d\beta \right\| < M, \\
 & 1 + \left\| \int_0^{y_1} \int_0^{z_1} K_{123} d\gamma d\beta \right\| < M, \quad 1 + \left\| \int_0^{x_1} \int_0^{z_1} K_{213} d\gamma d\alpha \right\| < M, \\
 & 1 + \left\| \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} K_{312} d\beta d\alpha \right\| < M.
 \end{aligned}$$

Пусть выполняются оценки

$$\sum_{i=1}^n x_i < s, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,$$

$$1 + \|K_j\| < M, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$1 + \left\| \int_0^{x_{q_1}^1} \dots \int_0^{x_{q_l}^1} K_{kq_1 \dots q_l} d\alpha_{q_1} \dots d\alpha_{q_l} \right\| < M \text{ для всех } k \text{ и } (q_1, \dots, q_l).$$

Докажем, что оператор B_n непрерывен. Пусть w_1 и w_2 — непрерывные векторные функции, заданные на множестве Ω . Тогда

$$\|B_n w_1 - B_n w_2\| < n2^{n-1}mM(x_1 + \dots + x_n)\|w_1 - w_2\| < n2^{n-1}mMs\|w_1 - w_2\|. \quad (7)$$

Очевидно, из (7) следует, что оператор B_n непрерывен.

Далее

$$\|B_n^2 w_1 - B_n^2 w_2\| < (n2^{n-1}mM)^2 \frac{s^2}{2!} \|w_1 - w_2\|,$$

.

$$\|B_n^k w_1 - B_n^k w_2\| < (n2^{n-1}mM)^k \frac{s^k}{k!} \|w_1 - w_2\|,$$

Ясно, что при некотором k

$$\frac{(n2^{n-1}mMs)^k}{k!} < 1,$$

то есть B_n^k является сжимающим оператором при некотором k .

Следовательно, линейное уравнение (6) имеет единственное решение в классе непрерывных векторных функций. То есть имеет место

Теорема 2. *Если в уравнении (6) все коэффициенты K_ω и правая часть F непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных, то в параллелепипеде $\Omega = [x_1^0, x_1^1] \times \dots \times [x_n^0, x_n^1]$ существует единственное непрерывное решение $w(x_1, \dots, x_n)$ этого уравнения.*

Система типа Вольтерра (2), где w, F — векторы, $K_{q_1 \dots q_k}$ — матрицы, является частным случаем системы (6).

Отметим особо, что если речь идет об уравнении (или системе уравнений) типа Вольтерра, то степень гладкости решения будет той же, что и у ядер и правой части этого уравнения (системы) [19, с. 11].

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Укажем на одно приложение теоремы 2.

1. Построение решения основной характеристической задачи для системы в трехмерном пространстве методом Римана. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x, y, z)v_x + b_1(x, y, z)w_x + c_1(x, y, z)u + \\ \quad + d_1(x, y, z)v + e_1(x, y, z)w + f_1(x, y, z), \\ v_{yy} = a_2(x, y, z)u_y + b_2(x, y, z)w_y + c_2(x, y, z)u + \\ \quad + d_2(x, y, z)v + e_2(x, y, z)w + f_2(x, y, z), \\ w_{zz} = a_3(x, y, z)u_z + b_3(x, y, z)v_z + c_3(x, y, z)u + \\ \quad + d_3(x, y, z)v + e_3(x, y, z)w + f_3(x, y, z). \end{cases} \quad (8)$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D пространства (x, y, z) выполняются включения $a_i, b_i \in C^2, c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1, i = \overline{1, 3}$. Решение (8) класса $u, v, w \in C^1(D), u_{xx}, v_{yy}, w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D .

К системе (8) подстановками

$$u^* = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a_1^*(\alpha, y, z) d\alpha\right) u, \quad v^* = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{y_0}^y b_2^*(x, \beta, z) d\beta\right) v,$$

$$w^* = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z c_3^*(x, y, \gamma) d\gamma\right) w$$

сводится система со старшими производными вида

$$\begin{cases} u_{xx}^* = a_1^*(x, y, z)u_x^* + b_1^*(x, y, z)v_x^* + c_1^*(x, y, z)w_x^* + d_1^*(x, y, z)u^* + \\ \quad + e_1^*(x, y, z)v^* + f_1^*(x, y, z)w^* + g_1^*(x, y, z), \\ v_{yy}^* = a_2^*(x, y, z)u_y^* + b_2^*(x, y, z)v_y^* + c_2^*(x, y, z)w_y^* + d_2^*(x, y, z)u^* + \\ \quad + e_2^*(x, y, z)v^* + f_2^*(x, y, z)w^* + g_2^*(x, y, z), \\ w_{zz}^* = a_3^*(x, y, z)u_z^* + b_3^*(x, y, z)v_z^* + c_3^*(x, y, z)w_z^* + d_3^*(x, y, z)u^* + \\ \quad + e_3^*(x, y, z)v^* + f_3^*(x, y, z)w^* + g_3^*(x, y, z). \end{cases}$$

Сформулируем основную характеристическую задачу, играющую в теории системы (8) ту же роль, какую играет задача Гурса [5] в теории гиперболической системы

$$\begin{cases} u_x = a_1(x, y)u + b_1(x, y)v, \\ v_y = a_2(x, y)u + b_2(x, y)v. \end{cases}$$

Основная характеристическая задача. Пусть

$G = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$. Обозначим через X, Y, Z грани G при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ соответственно. Требуется найти регулярное в области G решение системы (8), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y, z) &= \varphi_1(y, z), \quad v(x, y_0, z) = \varphi_2(x, z), \\ w(x, y, z_0) &= \varphi_3(x, y), \\ (u_x - a_1v - b_1w)(x_0, y, z) &= \psi_1(y, z), \\ (v_y - a_2u - b_2w)(x, y_0, z) &= \psi_2(x, z), \\ (w_z - a_3u - b_3v)(x, y, z_0) &= \psi_3(x, y), \end{aligned} \quad (9)$$

$\varphi_1, \psi_1 \in C^1(\overline{X}), \varphi_2, \psi_2 \in C^1(\overline{Y}), \varphi_3, \psi_3 \in C^1(\overline{Z})$.

Решение основной характеристической задачи существует и единственно. Действительно, преобразуем (8) к виду

$$\begin{cases} u_x = u_1 + a_1v + b_1w, \\ u_{1x} = c_1u + (d_1 - a_{1x})v + (e_1 - b_{1x})w + f_1, \\ v_y = a_2u + v_1 + b_2w, \\ v_{1y} = (c_2 - a_{2y})u + d_2v + (e_2 - b_{2y})w + f_2, \\ w_z = a_3u + b_3v + w_1, \\ w_{1z} = (c_3 - a_{3z})u + (d_3 - b_{3z})v + e_3w + f_3. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначим $d_{10} = d_1 - a_{1x}$, $e_{10} = e_1 - b_{1x}$, $c_{20} = c_2 - a_{2y}$, $e_{20} = e_2 - b_{2y}$, $c_{30} = c_3 - a_{3z}$, $d_{30} = d_3 - b_{3z}$. Система (8) с условиями (9) сводится к системе интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = \varphi_1(y, z) + \int_{x_0}^x (u_1 + a_1 v + b_1 w)(\alpha, y, z) d\alpha, \\ u_1(x, y, z) = \psi_1(y, z) + \int_{x_0}^x (c_1 u + d_{10} v + e_{10} w + f_1)(\alpha, y, z) d\alpha, \\ v(x, y, z) = \varphi_2(x, z) + \int_{y_0}^y (v_1 + a_2 u + b_2 w)(x, \beta, z) d\beta, \\ v_1(x, y, z) = \psi_2(x, z) + \int_{y_0}^y (c_{20} u + d_2 v + e_{20} w + f_2)(x, \beta, z) d\beta, \\ w(x, y, z) = \varphi_3(x, y) + \int_{z_0}^z (w_1 + a_3 u + b_3 v)(x, y, \gamma) d\gamma, \\ w_1(x, y, z) = \psi_3(x, y) + \int_{z_0}^z (c_{30} u + d_{30} v + e_3 w + f_3)(x, y, \gamma) d\gamma. \end{array} \right. \quad (11)$$

Очевидно, что решение (11) существует и единственно в классе непрерывных функций

Ясно, что (11) равносильна основной характеристической задаче (8), (9). Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если в замыкании области G выполняются включения $a_i, b_i \in C^2$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1, 3}$, то решение основной характеристической задачи (8), (9) существует и единственно.*

Построим решение основной характеристической задачи в терминах матрицы Римана. Перепишем (10) в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2 \mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3 \mathbf{U}_z - \mathbf{B} \mathbf{U}, \\ \mathbf{U} = \text{colon}(u, u_1, v, v_1, w, w_1), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ c_1 & 0 & d_{10} & 0 & e_{10} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & b_2 & 0 \\ c_{20} & 0 & d_2 & 0 & e_{20} & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1 \\ c_{30} & 0 & d_{30} & 0 & e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \text{colon}(0, f_1, 0, f_2, 0, f_3).$$

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_6)$, где $\mathbf{R}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i6})$, $i = \overline{1, 6}$, являются решениями систем

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{i1}(x, y, z) = \delta_{i1} - \int_{\xi}^x (c_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + c_{20} r_{i4} + \\ + a_3 r_{i5} + c_{30} r_{i6})(\alpha, y, z) d\alpha, \\ r_{i2}(x, y, z) = \delta_{i2} - \int_{\xi}^x r_{i1}(\alpha, y, z) d\alpha, \\ r_{i3}(x, y, z) = \delta_{i3} - \int_{\eta}^y (a_1 r_{i1} + d_{10} r_{i2} + d_2 r_{i4} + \\ + b_3 r_{i5} + d_{30} r_{i6})(x, \beta, z) d\beta, \\ r_{i4}(x, y, z) = \delta_{i4} - \int_{\eta}^y r_{i3}(x, \beta, z) d\beta, \\ r_{i5}(x, y, z) = \delta_{i5} - \int_{\zeta}^z (b_1 r_{i1} + e_{10} r_{i2} + b_2 r_{i3} + \\ + e_{20} r_{i4} + e_3 r_{i6})(x, y, \gamma) d\gamma, \\ r_{i6}(x, y, z) = \delta_{i6} - \int_{\zeta}^z r_{i5}(x, y, \gamma) d\gamma, \end{array} \right. \quad (13)$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения систем (13) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x, y, z) матрица \mathbf{R} удовлетворяет сопряженной к (12) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{VA}_1)_x - (\mathbf{VA}_2)_y - (\mathbf{VA}_3)_z - \mathbf{VB}.$$

Справедливо тождество

$$\mathbf{RL}(\mathbf{U}) = (\mathbf{RA}_1\mathbf{U})_x + (\mathbf{RA}_2\mathbf{U})_y + (\mathbf{RA}_3\mathbf{U})_z, \quad (14)$$

которое может быть проверено непосредственно.

Вычислим значение $\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in G$. Первая строка (14) дает

$$r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3 = (r_{11}u + r_{12}u_1)_x + (r_{13}v + r_{14}v_1)_y + (r_{15}w + r_{16}w_1)_z, \quad (15)$$

где $r_{1j} = r_{1j}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, остальные функции зависят от (x, y, z) . Интегрируем (15) по области $G_1 = \{x_0 < x < \xi, y_0 < y < \eta, z_0 < z < \zeta\}$:

$$\begin{aligned} & \int_{y_0}^{\eta} \int_{z_0}^{\zeta} (r_{11}u + r_{12}u_1)(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma d\beta - \\ & - \int_{y_0}^{\eta} \int_{z_0}^{\zeta} (r_{11}u + r_{12}u_1)(x_0, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma d\beta + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} \int_{z_0}^{\zeta} (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma d\alpha - \\ & - \int_{x_0}^{\xi} \int_{z_0}^{\zeta} (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, y_0, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma d\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{x_0}^{\xi} \int_{y_0}^{\eta} (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) d\beta d\alpha - \\
 & - \int_{x_0}^{\xi} \int_{y_0}^{\eta} (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, z_0, \xi, \eta, \zeta) d\beta d\alpha = \\
 & = \iiint_{G_1} (r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\alpha d\beta d\gamma. \tag{16}
 \end{aligned}$$

В силу (13)

$$\begin{aligned}
 r_{11}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) & \equiv 1, \quad r_{12}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) = r_{13}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) = \\
 & = r_{14}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) = r_{15}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) = r_{16}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, (16) принимает вид

$$\int_{y_0}^{\eta} \int_{z_0}^{\zeta} u(\xi, \beta, \gamma) d\gamma d\beta = g_1(\xi, \eta, \zeta)$$

с функцией $g_1(\xi, \eta, \zeta)$, выраженной через данные (9) и элементы матрицы \mathbf{R} . Отсюда

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 g_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta \partial \zeta}.$$

Аналогично, из третьей и пятой строк (14) выводим формулы, получающиеся из (16) заменой r_{1j} на r_{3j} и r_{5j} соответственно. Используя (13), получаем

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 g_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 g_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \eta},$$

где $g_2(\xi, \eta, \zeta)$ и $g_3(\xi, \eta, \zeta)$ выражены через условия (9) и элементы матрицы \mathbf{R} .

2. Существование и единственность решения задачи с условиями на пяти сторонах характеристического прямоугольника. Различные задачи с условиями на сторонах характеристического прямоугольника для системы с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными рассмотрены в [14]. В параллелепипеде $G = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$, рассмотрим одну задачу с граничными условиями на пяти его сторонах $X, Y, Z, X_1 = \{(x, y, z) | x = x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$, $Y_1 = \{(x, y, z) | y = y_1, x_0 < x < x_1, z_0 < z < z_1\}$. Отметим, что в отличие от рассмотренной ниже задачи, для получения условий разрешимости задач в [14] не требуется применение теоремы 2.

Задача 1. Найти в G регулярное решение (8), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
 u(x_0, y, z) & = \varphi_1(y, z), & (u_x - a_1v - b_1w)(x_1, y, z) & = \chi_1(y, z), \\
 v(x, y_0, z) & = \varphi_2(x, z), & (v_y - a_2u - b_2w)(x, y_1, z) & = \chi_2(x, z), \\
 w(x, y, z_0) & = \varphi_3(x, y), & (w_z - a_3u - b_3v)(x, y, z_0) & = \psi_3(x, y),
 \end{aligned} \tag{17}$$

$\varphi_1(y, z) \in C^1(\overline{X})$, $\chi_1(y, z) \in C^1(\overline{X}_1)$, $\varphi_2(x, z) \in C^1(\overline{Y})$, $\chi_2(x, z) \in C^1(\overline{Y}_1)$, $\varphi_3(x, y)$, $\psi_3(x, y) \in C^1(\overline{Z})$.

Нам понадобятся формулы для u, u_1, v, v_1, w, w_1 , получающиеся при решении основной характеристической задачи методом Римана (здесь и далее дифференцирование компонент матрицы Римана по ξ, η, ζ означает дифференцирование по второй тройке аргументов):

$$u(x, y, z) = r_{11}(x_0, y, z, x, y, z)u(x_0, y, z) + r_{12}(x_0, y, z, x, y, z)u_1(x_0, y, z) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y_0}^y (r_{11\eta}(x_0, \beta, z, x, y, z)u(x_0, \beta, z) + r_{12\eta}(x_0, \beta, z, x, y, z)u_1(x_0, \beta, z))d\beta + \\
& + \int_{z_0}^z (r_{11\zeta}(x_0, y, \gamma, x, y, z)u(x_0, y, \gamma) + r_{12\zeta}(x_0, y, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, y, \gamma))d\gamma + \\
& + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{11\eta\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u(x_0, \beta, \gamma) + r_{12\eta\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, \beta, \gamma))d\gamma d\beta + \\
& + \int_{x_0}^x (r_{13\eta}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v(\alpha, y_0, z) + r_{14\eta}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, z))d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{13\eta\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v(\alpha, y_0, \gamma) + r_{14\eta\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, z))d\gamma d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x (r_{15\zeta}(\alpha, y, z_0, x, y, z)w(\alpha, y, z_0) + r_{16\zeta}(\alpha, y, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, y, z_0))d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{15\eta\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w(\alpha, \beta, z_0) + r_{16\eta\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, \beta, z_0))d\beta d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x r_{12}(\alpha, y, z, x, y, z)f_1(\alpha, y, z)d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{12\eta}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_1(\alpha, \beta, z) + r_{14\eta}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_2(\alpha, \beta, z) + \\
& + r_{16\eta}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_3(\alpha, \beta, z))d\beta d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{12\zeta}(\alpha, y, \gamma, x, y, z)f_1(\alpha, y, \gamma) + r_{14\zeta}(\alpha, y, \gamma, x, y, z)f_2(\alpha, y, \gamma) + \\
& + r_{16\zeta}(\alpha, y, \gamma, x, y, z)f_3(\alpha, y, \gamma))d\gamma d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{12\eta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_1(\alpha, \beta, \gamma) + r_{14\eta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_2(\alpha, \beta, \gamma) + \\
& + r_{16\eta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_3(\alpha, \beta, \gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z) & = r_{21}(x_0, y, z, x, y, z)u(x_0, y, z) + r_{22}(x_0, y, z, x, y, z)u_1(x_0, y, z) + \\
& + \int_{y_0}^y (r_{21\eta}(x_0, \beta, z, x, y, z)u(x_0, \beta, z) + r_{22\eta}(x_0, \beta, z, x, y, z)u_1(x_0, \beta, z))d\beta + \\
& + \int_{z_0}^z (r_{21\zeta}(x_0, y, \gamma, x, y, z)u(x_0, y, \gamma) + r_{22\zeta}(x_0, y, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, y, \gamma))d\gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{21\eta\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u(x_0, \beta, \gamma) + r_{22\eta\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, \beta, \gamma))d\gamma d\beta + \\
 & \quad + \int_{x_0}^x (r_{23\eta}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v(\alpha, y_0, z) + r_{24\eta}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, z))d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{23\eta\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v(\alpha, y_0, \gamma) + r_{24\eta\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, z))d\gamma d\alpha + \\
 & \quad + \int_{x_0}^x (r_{25\zeta}(\alpha, y, z_0, x, y, z)w(\alpha, y, z_0) + r_{26\zeta}(\alpha, y, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, y, z_0))d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{25\eta\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w(\alpha, \beta, z_0) + r_{26\eta\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, \beta, z_0))d\beta d\alpha + \\
 & \quad + \int_{x_0}^x r_{22}(\alpha, y, z, x, y, z)f_1(\alpha, y, z)d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{22\eta}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_1(\alpha, \beta, z) + r_{24\eta}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_2(\alpha, \beta, z) + \\
 & \quad + r_{26\eta}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_3(\alpha, \beta, z))d\beta d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{22\zeta}(\alpha, y, \gamma, x, y, z)f_1(\alpha, y, \gamma) + r_{24\zeta}(\alpha, y, \gamma, x, y, z)f_2(\alpha, y, \gamma) + \\
 & \quad + r_{26\zeta}(\alpha, y, \gamma, x, y, z)f_3(\alpha, y, \gamma))d\gamma d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{22\eta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_1(\alpha, \beta, \gamma) + r_{24\eta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_2(\alpha, \beta, \gamma) + \\
 & \quad + r_{26\eta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_3(\alpha, \beta, \gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y, z) & = r_{33}(x, y_0, z, x, y, z)v(x, y_0, z) + r_{34}(x, y_0, z, x, y, z)v_1(x, y_0, z) + \\
 & + \int_{x_0}^x (r_{33\xi}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v(\alpha, y_0, z) + r_{34\xi}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, z))d\alpha + \\
 & + \int_{z_0}^z (r_{33\zeta}(x, y_0, \gamma, x, y, z)v(x, y_0, \gamma) + r_{34\zeta}(x, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(x, y_0, \gamma))d\gamma + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{33\xi\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v(\alpha, y_0, \gamma) + r_{34\xi\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, \gamma))d\gamma d\alpha + \\
 & + \int_{y_0}^y (r_{31\xi}(x_0, \beta, z, x, y, z)u(x_0, \beta, z) + r_{32\xi}(x_0, \beta, z, x, y, z)u_1(x_0, \beta, z))d\beta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{31\xi\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u(x_0, \beta, \gamma) + r_{32\xi\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, \beta, \gamma))d\gamma d\beta + \\
& \quad + \int_{y_0}^y (r_{35\zeta}(x, \beta, z_0, x, y, z)w(x, \beta, z_0) + r_{36\zeta}(x, \beta, z_0, x, y, z)w_1(x, \beta, z_0))d\beta + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{35\xi\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w(\alpha, \beta, z_0) + r_{36\xi\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, \beta, z_0))d\beta d\alpha + \\
& \quad + \int_{y_0}^y r_{34}(x, \beta, z, x, y, z)f_2(x, \beta, z)d\beta + \\
& \quad + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{32\xi}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_1(\alpha, \beta, z) + r_{34\xi}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_2(\alpha, \beta, z) + \\
& \quad \quad + r_{36\xi}(\alpha, \beta, z, x, y, z)f_3(\alpha, \beta, z))d\beta d\alpha + \\
& \quad + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{32\zeta}(x, \beta, \gamma, x, y, z)f_1(x, \beta, \gamma) + r_{34\zeta}(x, \beta, \gamma, x, y, z)f_2(x, \beta, \gamma) + \\
& \quad \quad + r_{36\zeta}(x, \beta, \gamma, x, y, z)f_3(x, \beta, \gamma))d\gamma d\beta + \\
& \quad + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{32\xi\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_1(\alpha, \beta, \gamma) + r_{34\xi\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_2(\alpha, \beta, \gamma) + \\
& \quad \quad + r_{36\xi\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f_3(\alpha, \beta, \gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1(x, y, z) & = r_{43}(x, y_0, z, x, y, z)v(x, y_0, z) + r_{44}(x, y_0, z, x, y, z)v_1(x, y_0, z) + \\
& \quad + \int_{x_0}^x (r_{43\xi}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v(\alpha, y_0, z) + r_{44\xi}(\alpha, y_0, z, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, z))d\alpha + \\
& \quad + \int_{z_0}^z (r_{43\zeta}(x, y_0, \gamma, x, y, z)v(x, y_0, \gamma) + r_{44\zeta}(x, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(x, y_0, \gamma))d\gamma + \\
& \quad + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{43\xi\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v(\alpha, y_0, \gamma) + r_{44\xi\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, \gamma))d\gamma d\alpha + \\
& \quad + \int_{y_0}^y (r_{41\xi}(x_0, \beta, z, x, y, z)u(x_0, \beta, z) + r_{42\xi}(x_0, \beta, z, x, y, z)u_1(x_0, \beta, z))d\beta + \\
& \quad + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{41\xi\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u(x_0, \beta, \gamma) + r_{42\xi\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, \beta, \gamma))d\gamma d\beta + \\
& \quad + \int_{y_0}^y (r_{45\zeta}(x, \beta, z_0, x, y, z)w(x, \beta, z_0) + r_{46\zeta}(x, \beta, z_0, x, y, z)w_1(x, \beta, z_0))d\beta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{45\xi\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w(\alpha, \beta, z_0) + r_{46\xi\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, \beta, z_0))d\beta d\alpha + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{y_0}^y r_{44}(x, \beta, z, x, y, z) f_2(x, \beta, z) d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{42\xi}(\alpha, \beta, z, x, y, z) f_1(\alpha, \beta, z) + r_{44\xi}(\alpha, \beta, z, x, y, z) f_2(\alpha, \beta, z) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + r_{46\xi}(\alpha, \beta, z, x, y, z) f_3(\alpha, \beta, z)) d\beta d\alpha + \\
 & + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{42\zeta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_1(x, \beta, \gamma) + r_{44\zeta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_2(x, \beta, \gamma) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + r_{46\zeta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_3(x, \beta, \gamma)) d\gamma d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{42\xi\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_1(\alpha, \beta, \gamma) + r_{44\xi\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_2(\alpha, \beta, \gamma) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + r_{46\xi\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_3(\alpha, \beta, \gamma)) d\gamma d\beta d\alpha; \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) & = r_{55}(x, y, z_0, x, y, z)w(x, y, z_0) + r_{56}(x, y, z_0, x, y, z)w_1(x, y, z_0) + \\
 & + \int_{x_0}^x (r_{55\xi}(\alpha, y, z_0, x, y, z)w(\alpha, y, z_0) + r_{56\xi}(\alpha, y, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, y, z_0))d\alpha + \\
 & + \int_{y_0}^y (r_{55\eta}(x, \beta, z_0, x, y, z)w(x, \beta, z_0) + r_{56\eta}(x, \beta, z_0, x, y, z)w_1(x, \beta, z_0))d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{55\xi\eta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w(\alpha, \beta, z_0) + r_{56\xi\eta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z)w_1(\alpha, \beta, z_0))d\beta d\alpha + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{z_0}^z (r_{51\xi}(x_0, y, \gamma, x, y, z)u(x_0, y, \gamma) + r_{52\xi}(x_0, y, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, y, \gamma))d\gamma + \\
 & + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{51\xi\eta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u(x_0, \beta, \gamma) + r_{52\xi\eta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z)u_1(x_0, \beta, \gamma))d\gamma d\beta + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{z_0}^z (r_{53\eta}(x, y_0, \gamma, x, y, z)v(x, y_0, \gamma) + r_{54\eta}(x, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(x, y_0, \gamma))d\gamma + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{53\xi\eta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v(\alpha, y_0, \gamma) + r_{54\xi\eta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z)v_1(\alpha, y_0, \gamma))d\gamma d\alpha + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{z_0}^z r_{56}(x, y, \gamma, x, y, z) f_3(x, y, \gamma) d\gamma +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{52\xi}(\alpha, y, \gamma, x, y, z) f_1(\alpha, y, \gamma) + r_{54\xi}(\alpha, y, \gamma, x, y, z) f_2(\alpha, y, \gamma) + \\
& \quad + r_{56\xi}(\alpha, y, \gamma, x, y, z) f_3(\alpha, y, \gamma)) d\gamma d\alpha + \\
& + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{52\eta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_1(x, \beta, \gamma) + r_{54\eta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_2(x, \beta, \gamma) + \\
& \quad + r_{56\eta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_3(x, \beta, \gamma)) d\gamma d\beta + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{52\xi\eta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_1(\alpha, \beta, \gamma) + r_{54\xi\eta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_2(\alpha, \beta, \gamma) + \\
& \quad + r_{56\xi\eta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_3(\alpha, \beta, \gamma)) d\gamma d\beta d\alpha; \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1(x, y, z) & = r_{65}(x, y, z_0, x, y, z) w(x, y, z_0) + r_{66}(x, y, z_0, x, y, z) w_1(x, y, z_0) + \\
& + \int_{x_0}^x (r_{65\xi}(\alpha, y, z_0, x, y, z) w(\alpha, y, z_0) + r_{66\xi}(\alpha, y, z_0, x, y, z) w_1(\alpha, y, z_0)) d\alpha + \\
& + \int_{y_0}^y (r_{65\eta}(x, \beta, z_0, x, y, z) w(x, \beta, z_0) + r_{66\eta}(x, \beta, z_0, x, y, z) w_1(x, \beta, z_0)) d\beta + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (r_{65\xi\eta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z) w(\alpha, \beta, z_0) + r_{66\xi\eta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z) w_1(\alpha, \beta, z_0)) d\beta d\alpha + \\
& + \int_{z_0}^z (r_{61\xi}(x_0, y, \gamma, x, y, z) u(x_0, y, \gamma) + r_{62\xi}(x_0, y, \gamma, x, y, z) u_1(x_0, y, \gamma)) d\gamma + \\
& + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{61\xi\eta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z) u(x_0, \beta, \gamma) + r_{62\xi\eta}(x_0, \beta, \gamma, x, y, z) u_1(x_0, \beta, \gamma)) d\gamma d\beta + \\
& + \int_{z_0}^z (r_{63\eta}(x, y_0, \gamma, x, y, z) v(x, y_0, \gamma) + r_{64\eta}(x, y_0, \gamma, x, y, z) v_1(x, y_0, \gamma)) d\gamma + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{63\xi\eta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z) v(\alpha, y_0, \gamma) + r_{64\xi\eta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z) v_1(\alpha, y_0, \gamma)) d\gamma d\alpha + \\
& \quad + \int_{z_0}^z r_{66}(x, y, \gamma, x, y, z) f_3(x, y, \gamma) d\gamma + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z (r_{62\xi}(\alpha, y, \gamma, x, y, z) f_1(\alpha, y, \gamma) + r_{64\xi}(\alpha, y, \gamma, x, y, z) f_2(\alpha, y, \gamma) + \\
& \quad + r_{66\xi}(\alpha, y, \gamma, x, y, z) f_3(\alpha, y, \gamma)) d\gamma d\alpha + \\
& + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{62\eta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_1(x, \beta, \gamma) + r_{64\eta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_2(x, \beta, \gamma) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + r_{66\eta}(x, \beta, \gamma, x, y, z) f_3(x, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (r_{62\xi\eta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_1(\alpha, \beta, \gamma) + r_{64\xi\eta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_2(\alpha, \beta, \gamma) + \\
 & + r_{66\xi\eta}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) f_3(\alpha, \beta, \gamma)) d\gamma d\beta d\alpha. \tag{23}
 \end{aligned}$$

При записи этих формул учтены уравнения (13), $i = \overline{1, 6}$, для компонент матрицы Римана.

Для того чтобы свести задачу 1 к основной характеристической задаче, нужно определить недостающие данные $u_1(x_0, y, z) = (u_x - a_1v - b_1w)(x_0, y, z)$, $v_1(x, y_0, z) = (v_y - a_2u - b_2w)(x, y_0, z)$. Для этого положим в (19) $x = x_1$, а в (21) $y = y_1$. Получаем систему двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 & r_{22}(x_0, y, z, x_1, y, z) u_1(x_0, y, z) + \int_{y_0}^y r_{22\eta}(x_0, \beta, z, x_1, y, z) u_1(x_0, \beta, z) d\beta + \\
 & + \int_{z_0}^z r_{22\zeta}(x_0, y, \gamma, x_1, y, z) u_1(x_0, y, \gamma) d\gamma + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z r_{22\eta\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x_1, y, z) u_1(x_0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^{x_1} r_{24\eta}(\alpha, y_0, z, x_1, y, z) v_1(\alpha, y_0, z) d\alpha + \int_{x_0}^{x_1} \int_{z_0}^z r_{24\eta\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x_1, y, z) v_1(\alpha, y_0, \gamma) d\gamma d\alpha = \\
 & = F_{11}(y, z) + \chi_1(y, z), \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r_{44}(x, y_0, z, x, y_1, z) v_1(x, y_0, z) + \int_{x_0}^x r_{44\xi}(\alpha, y_0, z, x, y_1, z) v_1(\alpha, y_0, z) d\alpha + \\
 & + \int_{z_0}^z r_{44\zeta}(x, y_0, \gamma, x, y_1, z) v_1(x, y_0, \gamma) d\gamma + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z r_{44\xi\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y_1, z) v_1(\alpha, y_0, \gamma) d\gamma d\alpha + \\
 & + \int_{y_0}^{y_1} r_{42\xi}(x_0, \beta, z, x, y_1, z) u_1(x_0, \beta, z) d\beta + \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^z r_{42\xi\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y_1, z) u_1(x_0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta = \\
 & = F_{12}(x, z) + \chi_2(x, z), \tag{25}
 \end{aligned}$$

функции F_{11} , F_{12} известны.

Пусть

$$a_1(x, y, z) = d_{10}(x, y, z) = d_2(x, y, z) \equiv 0, \quad c_1 \geq 0. \tag{26}$$

Тогда $r_{24\eta}(x, y, z, \xi, \eta, z) \equiv 0$, $r_{22}(x_0, y, z, x_1, y, z) \neq 0$. Из уравнения (24) однозначно определяется $u_1(x_0, y, z)$ (теорема 2). Подставляя найденное значение $u_1(x_0, y, z)$ в уравнение (25), получаем для определения $v_1(x, y_0, z)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода (при $d_2(x, y, z) \equiv 0$ $r_{44}(x, y_0, z, x, y_1, z) \neq 0$). Это уравнение однозначно разрешимо. Таким образом, задача 1 редуцирована к основной характеристической задаче.

Аналогично разрешается система (24) – (25) при условиях

$$c_1(x, y, z) = a_2(x, y, z) = c_{20}(x, y, z) \equiv 0, \quad d_2 \geq 0. \tag{27}$$

При этом сначала из уравнения (25) определяется $v_1(x, y_0, z)$, а затем из (24) — $u_1(x_0, y, z)$.

Теорема 4. Если $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in C^2(\overline{G})$, $c_1, c_{20}, c_{30}, d_{10}, d_2, d_{30}, e_{10}, e_{20}, e_3, f_1, f_2, f_3 \in C^1(\overline{G})$, и выполняется одно из условий (26), (27), то существует единственное решение задачи 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забрейко П.П., Калитвин А.С., Фролова Е.В. *Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций* // Дифференц. уравнения. Т. 34, № 4. 2002. С. 538–546.
2. J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York: M. Dekker, 2000. 560 p.
3. Калитвин А.С. *Линейные операторы с частными интегралами*, Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252Ёс.
4. Бицадзе А.В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными* // Матем. моделирование. Т. 6, № 6. 1994. С. 22–31.
5. Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. Т. 18, № 9. 1982. С. 1614–1622.
6. Плещинская И.Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными* // Дифференц. уравнения. Т. 23, № 9. 1987. С. 1634–1637.
7. Жегалов В.И. *Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Матем. № 8. 2008. С. 70–72.
8. Воронова Ю.Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Уфимский матем. журнал. Т. 2, вып. 2. 2010. С. 20–26.
9. Жиббер А.В., Костригина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Уфимский матем. журнал. Т. 3, вып. 3. 2011. С. 67–79.
10. Созонтова Е.А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа* // Изв. вузов. Матем. № 10. 2013. С. 43–54.
11. Андреев А.А., Яковлева Ю.О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некротными характеристиками* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Т. 21, вып. 4. 2017. С. 752–759.
12. Миронова Л.Б. *О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками* // Изв. вузов. Математика. № 1. 2006. С. 34–39.
13. Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Изв. вузов. Математика. № 3. 2007. С. 12–21.
14. Миронова Л.Б. *О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 43. 2006. С. 31–37.
15. Севастьянов В.А. *О методе И.Н. Векуа решения интегральных уравнений типа Вольтерра* // Казан. ун-т, 1997. Деп. в ВИНТИ 24.04.97, № 1373–В97. 9 с.
16. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1967. 576 с.
17. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1976. 544 с.
18. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1971. 512 с.
19. Жегалов В.И., Мионов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. Казань: Изд. Казанского математического общ-ва, 2001. 226 с.

Любовь Борисовна Миронова,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт,
ул. Казанская, 89,
423600, г. Елабуга, Россия
E-mail: lbmironova@yandex.ru