

ГРАФИКИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЛОЕНИЙ НА ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Н.И. ЖУКОВА

Аннотация. Исследуются вполне геодезические слоения F произвольной коразмерности на n -мерных псевдоримановых многообразиях, метрика на слоях которых не вырождается, а дополнительное по ортогональности распределение является связностью Эресмана. Общепринятый график $G(F)$ такого слоения, вообще говоря, является нехаусдорфовым многообразием, поэтому мы исследуем график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ слоения со связностью Эресмана \mathfrak{M} , введенный ранее автором, который всегда хаусдорфов. Мы доказываем, что на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ определена псевдориманова метрика, относительно которой индуцированное слоение и простые слоения, образованные слоями канонических проекций, являются вполне геодезическими. Доказано, что слои индуцированного слоения на исследуемом графике являются невырожденно приводимыми псевдоримановыми многообразиями и дано описание их структуры. Рассмотрено приложение к графикам параллельных слоений на невырожденно приводимых псевдоримановых многообразиях. Показано, что любое слоение, полученное надстройкой гомоморфизма фундаментальной группы псевдориманова многообразия, относится к исследуемому классу слоений.

Ключевые слова: вполне геодезическое слоение, псевдориманово многообразие, график слоения, связность Эресмана для слоения.

Mathematics Subject Classification: 53C12, 53C50, 57R30

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Группоид голономии слоения введен Ш. Эресманом, эквивалентную конструкцию предложил Х. Винкельнкемпер [1] под названием графика слоения. График слоения содержит всю информацию о слоении и о его росковых группах голономии, общепринятых в теории слоений [2]. C^* -алгебры комплексно-значных функции для слоений, введенные Конном [3], определяются на группоидах голономии этих слоений.

Пусть (M, F) — гладкое слоение коразмерности q на n -мерном гладком многообразии M . Р.А. Блюменталь и Дж. Хебда ([4] и [5]) определили связность Эресмана для (M, F) как q -мерное распределение \mathfrak{M} , трансверсальное слоям, интегральные кривые которого допускают перенос вдоль любой кривой в слое слоения. Для произвольного слоя L_α слоения (M, F) введено понятие группы \mathfrak{M} -голономии. Мы приводим точные определения в разделе 2.

Напомним конструкцию графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$ слоения F коразмерности q со связностью Эресмана \mathfrak{M} на n -мерном многообразии M , введенного нами в [6] (см. также [7], [8]). Рассмотрим любые две точки x и y из одного слоя L_α этого слоения. Обозначим через $A(x, y)$ множество кусочно гладких путей в L_α , соединяющих x с y . Пути h и f из $A(x, y)$ называются эквивалентными $h \sim f$, если петля $h \cdot f^{-1}$, равная произведению путей h и f^{-1} , порождает тривиальный элемент группы \mathfrak{M} -голономии $H_{\mathfrak{M}}(L_\alpha, x)$ слоя L_α в точке x . Класс эквивалентности, содержащий путь h ,

N.I. ZHUKOVA, GRAPHS OF TOTALLY GEODESIC FOLIATIONS ON PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS.

©ЖУКОВА Н.И. 2019.

Работа поддержана РФФИ (грант № 16-11-00312) и Центром фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 г.

Поступила 19 июля 2018 г.

обозначается через $\{h\}$. Множество $G_{\mathfrak{M}}(F)$ троек вида $(x, \{h\}, y)$, где $x \in M, y \in L(x), h \in A(x, y)$, называется *графиком слоения* (M, F) со связностью Эресмана \mathfrak{M} , а отображения $p_1 : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow M : (x, \{h\}, y) \mapsto x, p_2 : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow M : (x, \{h\}, y) \mapsto y$ называются *каноническими проекциями*. Нами доказано, что график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ естественным образом наделяется структурой $(2n-q)$ -мерного хаусдорфова гладкого многообразия [6] (см. также [7], [8]).

Таким образом, график слоения со связностью Эресмана $G_{\mathfrak{M}}(F)$ определен аналогично классическому графику слоения $G(F)$ [1] заменой ростковой группы голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L, x \in M$, на группу \mathfrak{M} -голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$. В отличие от $G_{\mathfrak{M}}(F)$, топологическое пространство графика $G(F)$, вообще говоря, не хаусдорфово.

Отображение

$$\beta : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow G(F), \beta(x, \{h\}, y) = (x, \langle h \rangle, y),$$

где $(x, \langle h \rangle, y) \in G(F)$, является локальным диффеоморфизмом. Оба графика $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ наделяются структурой группоидов, причем β — гомоморфизм этих группоидов, то есть отображает произведение элементов одного группоида в произведение соответствующих элементов другого.

Пусть $p : M \rightarrow B$ — субмерсия и \mathfrak{M} — распределение на B . Будем использовать обозначение $p^*\mathfrak{M} := \{\mathfrak{N}_x \mid x \in M\}$, где $\mathfrak{N}_x = \{Y \in T_x M \mid p_* Y \in \mathfrak{M}_{p(x)}\}$

Нами доказаны следующие свойства указанных выше двух графиков произвольного слоения со связностью Эресмана [6], [7].

Теорема 1. Пусть (M, F) — слоение коразмерности q на n -мерном гладком многообразии M , допускающее связность Эресмана \mathfrak{M} . Тогда :

1. Гомоморфизм группоидов $\beta : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow G(F)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда график $G(F)$ хаусдорфов.
2. Канонические проекции $p_i : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow M, i = 1, 2$, являются локально тривиальными расслоениями.
3. Распределение $\mathfrak{N} := p_1^*\mathfrak{M} \cap p_2^*\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для индуцированного слоения

$$\mathbb{F} := \{p_1^{-1}(L) \mid L \in F\} = \{p_2^{-1}(L) \mid L \in F\},$$

на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$, причем группы голономии $H_{\mathfrak{N}}(\mathbb{L}, z)$ и $H_{\mathfrak{M}}(L, x), x = p_1(z)$, слоев \mathbb{L} и $L = p_1(\mathbb{L})$, а также ростковые группы голономии этих слоев канонически изоморфны.

Определение 1. Псевдогруппа \mathcal{H} локальных голономных диффеоморфизмов многообразия M называется квазианалитической, если из того, что для некоторого открытого связного подмножества V в M выполняется равенство $h|_V = id_V$ для какого-либо элемента $h \in \mathcal{H}$, следует, что $h = id_{D(h)}$ на всей связной области определения $D(h)$ элемента h , содержащей V .

Согласно [9, Предложение 2], критерий Винкелькемпера о хаусдорфовости графика $G(F)$ может быть переформулирован следующим образом:

Предложение 1. Топологическое пространство графика $G(F)$ слоения (M, F) хаусдорфово тогда и только тогда, когда псевдогруппа голономии этого слоения квазианалитична.

Согласно Теореме 1 и Предложению 1 для слоений со связностью Эресмана, имеющих квазианалитическую псевдогруппу голономии, мы можем отождествить графики $G_{\mathfrak{M}}(F)$ и $G(F)$ по каноническому изоморфизму β и обозначить это через $G_{\mathfrak{M}}(F) \cong G(F)$. Следовательно, график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ можно рассматривать как десингуляризацию нехаусдорфова графика $G(F)$, где под сингулярностью понимается нехаусдорфовость. Такое существенное различие свойств этих графиков объясняется тем, что группа \mathfrak{M} -голономии $H(L_\alpha, x)$ имеет глобальный характер, в то время как ростковая группа голономии $\Gamma(L_\alpha, x)$ носит локально-глобальный характер, глобальный по слоям и локальный по трансверсалам.

На графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ индуцируются следующие три слоения

$$F^{(1)} = \{p_1^{-1}(x) \mid x \in M\}, F^{(2)} = \{p_2^{-1}(x) \mid x \in M\}, \mathbb{F} = \{p_1^{-1}(L) \mid L \in F\}.$$

Заметим, что $\mathbb{F} = \{p_2^{-1}(L) \mid L \in F\}$.

Введем обозначение $\mathfrak{N} = p_1^*\mathfrak{M} \cap p_2^*\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{N} \oplus TF^{(2)}$. Подчеркнем, что любое гладкое векторное поле X на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ однозначно представимо в виде $X = X^{(1)} + X^{\mathfrak{N}} + X^{(2)}$, где $X^{(i)} \in \mathfrak{X}_{F^{(i)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, $i = 1, 2$, $X^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, а также в виде

$$X = X^{(1)} + X^{\mathfrak{M}^{(1)}}, \quad (1)$$

где $X^{\mathfrak{M}^{(1)}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$.

Определение 2. Пусть (M, F) — слоение коразмерности q на n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) , $0 < q < n$, причем на слоях индуцируется псевдориманова метрика. Тогда для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, представленных в виде (1), равенство

$$d(X, Y) := (p_1^*g)(X^{\mathfrak{M}^{(1)}}, Y^{\mathfrak{M}^{(1)}}) + (p_2^*g)(X^{(1)}, Y^{(1)}) \quad (2)$$

определяет псевдориманову метрику d на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$, которая называется индуцированной метрикой.

В случае когда (M, F) — трансверсально аналитическое риманово слоение, а \mathfrak{M} — ортогональное распределение на полном римановом многообразии, график $G(F)$ отождествляется с графиком $G_{\mathfrak{M}}(F)$, индуцированная метрика d на $G(F)$ рассматривалась Р. Волаком в [10].

Определение 3. Распределение \mathfrak{M} на псевдоримановом многообразии (M, g) называется геодезически инвариантным, если любая гладкая геодезическая связности Леви-Чивита метрики g , касающаяся распределения \mathfrak{M} в одной точке, является интегральной кривой этого распределения.

Слоения с геодезически инвариантным касательным распределением называются вполне геодезическими слоениями.

Следующая теорема является одним из основных результатов данной работы.

Теорема 2. Пусть (M, F) — вполне геодезическое слоение произвольной коразмерности q на n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) , причем на слоях индуцируется псевдориманова метрика. Предположим, что q -мерное распределение \mathfrak{M} , ортогональное слоению (M, F) , является связностью Эресмана для (M, F) . Тогда определенные выше слоения $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ и \mathbb{F} на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ с индуцированной метрикой d являются вполне геодезическими, а q -мерное распределение \mathfrak{N} , ортогональное \mathbb{F} , геодезически инвариантно.

В силу первого утверждения Теоремы 1 и Предложения 1 из Теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Предположим, что слоение (M, F) удовлетворяет условиям Теоремы 2, и псевдогруппа голономии этого слоения квазианалитическая. Тогда график $G(F)$ отождествляется с графиком $G_{\mathfrak{M}}(F)$, наделенным индуцированной метрикой, индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ и слоения, образованные слоями канонических проекций $p_i : G(F) \rightarrow M$, $i = 1, 2$, являются вполне геодезическими.

Поскольку псевдогруппа голономии трансверсально аналитического слоения (M, F) является квазианалитической, графики $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ отождествляются. Так как полнота риманова многообразия влечет полноту любого вполне геодезического слоения на этом многообразии, то, согласно Предложению 4, дополнительное по ортогональности к TF распределение \mathfrak{M} — связность Эресмана для (M, F) . Поэтому из Теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Если (M, F) — трансверсально аналитическое слоение на полном римановом многообразии (M, g) и $G(F)$ — график этого слоения, наделенный индуцированной метрикой, то индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ и слоения $(G(F), F^{(i)})$, $i = 1, 2$, образованные слоями канонических проекций $p_i : G(F) \rightarrow M$, являются вполне геодезическими слоениями.

Замечание 1. При выполнении условий Следствия 2 Р. Волаком доказана вполне геодезичность слоения, образованного слоями только одной канонической проекции $p_1 : G(F) \rightarrow M$ [10, Теорема 2].

Замечание 2. Графики псевдоримановых слоений на псевдоримановых многообразиях с невырожденной метрикой на слоях исследовались А. Ю. Долгоносовой и автором в [11].

Применяя Теорему 2, мы доказываем следующие свойства графиков исследуемого класса вполне геодезических слоений.

Теорема 3. Пусть (M, F) — слоение, удовлетворяющее условиям Теоремы 2, $F^{(1)}, F^{(2)}, \mathbb{F}$ — указанные выше слоения на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ и $L_0 = p_1^{-1}(x)$, $x \in M$, — произвольный слой канонического расслоения, причем график и слои соответствующих слоений рассматриваются с индуцированной метрикой d . Тогда:

1. Каждый слой $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$ является невырожденно приводимым псевдоримановым многообразием с парой параллельных, дополнительных по ортогональности слоений $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$.

2. Для любого слоя L слоения (M, F) существует регулярное псевдориманово накрытие $f_L : L_0 \rightarrow L$ с группой покрывающих преобразований, изоморфной группе \mathfrak{M} -голомии $H_{\mathfrak{M}}(L)$.

3. Группа $H_{\mathfrak{M}}(L)$ диагонально свободно и собственно разрывно действует на псевдоримановом произведении $L_0 \times L_0$ посредством группы изометрий Ψ так, что существует изометрия

$$\eta : \mathbb{L} \rightarrow (L_0 \times L_0)/\Psi$$

слоя $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ на фактор-многообразии $(L_0 \times L_0)/\Psi$, переводящая слои параллельных слоений $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ в слоения, накрытые произведением $L_0 \times L_0$.

Согласно второму утверждению Теоремы 3 каждый слой (L_α, g) слоения (M, F) локально изометричен (L_0, d) , откуда вытекает следующее следствие.

Следствие 3. Если существует слой L вполне геодезического слоения (M, F) , имеющий постоянную кривизну, то каждый слой L_α этого слоения имеет ту же самую постоянную кривизну.

Пусть (M, g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, рассматриваемое со связностью Леви-Чивита. Это означает, что существует подпространство \mathfrak{M}_x касательного векторного пространства $T_x M$ в некоторой точке $x \in M$, на котором сужение метрики g не вырождается, причем \mathfrak{M}_x инвариантно относительно параллельных переносов вдоль кусочно гладких петель в точке x . Параллельный перенос подпространства \mathfrak{M}_x в любую другую точку многообразия M определяет распределение \mathfrak{M} на M , которое называется *параллельным*. Так как параллельный перенос сохраняет метрический тензор, то дополнительное по ортогональности подпространство \mathfrak{M}_x^\perp инвариантно относительно параллельных переносов вдоль петель в точке x и, следовательно, также определяет параллельное распределение \mathfrak{M}^\perp на M . Как известно, любое параллельное распределение интегрируемо и является касательным к некоторому слоению, которое называется *параллельным*.

Таким образом, на каждом невырожденно приводимом псевдоримановом многообразии существует пара (F, F^\perp) дополнительных по ортогональности параллельных слоений.

Теорема 4. Пусть (M, g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, F и F^\perp — его параллельные слоения дополнительной размерности, причем $\mathfrak{M} = TF^\perp$ — связность Эресмана для слоения (M, F) . Тогда во введенных выше обозначениях:

1. Графики $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ канонически изоморфны и отождествляются; $G(F)$ наделяется псевдоримановой мерикой d .

2. Почти для всех точек $z \in G(F)$ и $x = p_1(z) \in M$ слои $\mathbb{L} = \mathbb{L}(z)$ и $L = L(x)$ имеют тривиальные группы голоммии и изометричны $L_0 \times L_0$ и L_0 , соответственно, где L_0 — произвольный фиксированный слой канонической проекции $p_1 : G(F) \rightarrow M$ с индуцированной метрикой.

3. Определены слоения $F^{\mathfrak{M}}, \mathcal{F}^{(i)}$, $i = 1, 2$, такие, что $TF^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}$ и $T\mathcal{F}^{(i)} = \mathfrak{M}^{(i)}$ на графике $G(F)$.

4. График $G(F)$ с индуцированной метрикой d — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие с тремя парами дополнительных по ортогональности параллельных слоений $(F^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)}); (F^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)})$ и $(F^{\mathfrak{M}}, \mathbb{F})$.

5. Каждое из указанных выше шести слоений обладает интегрируемой связностью Эресмана, а его график удовлетворяет Теоремам 2 и 3, а также утверждениям 1–4 данной теоремы.

Теорема 4 и следующие два утверждения показывают, что класс исследуемых здесь слоений достаточно широк.

Предложение 2. Пусть (M, F) вполне геодезическое слоение коразмерности q на n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) , где $0 < q < n$. Если на слоях этого слоения индуцируется полная псевдориманова метрика, то q -мерное распределение \mathfrak{M} , ортогональное слоям, является связностью Эресмана для слоения (M, F) .

Предложение 3. Пусть (B, g^B) — произвольное псевдориманово многообразие. Если (M, F) — слоение, полученное надстройкой гомоморфизма

$$\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Diff}(T),$$

то на M существует псевдориманова метрика такая, что:

- 1) (M, F) — вполне геодезическое слоение с индуцированной псевдоримановой метрикой на слоях, причем слои слоения (M, F) — полные псевдоримановы подмногообразия тогда и только тогда, когда полным является (B, g^B) ;
- 2) ассоциированное локально тривиальное расслоение образовано слоями псевдоримановой субмерсии $p : M \rightarrow B$;
- 3) распределение, образованное касательными пространствами к слоям субмерсии $p : M \rightarrow B$ является интегрируемой связностью Эресмана для (M, F) ;
- 4) график $G(F)$ хаусдорфов тогда и только тогда, когда группа $\Psi := \rho(\pi_1(B, b))$ квазианалитически действует на T .

Обозначения Следуя [15], мы обозначаем $P(N, H)$ главные H -расслоения над многообразием N . Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначается модуль гладких векторных полей на многообразии M над алгеброй $\mathfrak{F}(M)$ гладких функций. Слоение F на многообразии M обозначается как одной буквой, так и парой (M, F) . Пусть \mathfrak{M} — гладкое распределение на многообразии M , тогда $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X_u \in \mathfrak{M}_u \ \forall u \in M\}$. Если \mathfrak{M} интегрируемо и $\mathfrak{M} = TF$, то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается также $\mathfrak{X}_F(M)$.

Через \mathfrak{Fol} обозначается категория слоений, в которой морфизмы отображают слои одного слоения в слои другого слоения.

Сужение слоения (или метрики) на подмногообразии обозначается той же буквой, что и исходное слоение (или метрика).

Через \cong обозначается изоморфизм в соответствующей категории, а \oplus — символ прямой суммы векторных подпространств и распределений.

2. СЛОЕНИЯ СО СВЯЗНОСТЬЮ ЭРЕСМАНА

2.1. Связность Эресмана для слоений. Пусть на гладком n -мерном многообразии M задано слоение F произвольной коразмерности $q \geq 1$.

Обозначим через \mathfrak{M} q -мерное трансверсальное к F распределение, тогда касательное пространство $T_x M$ к многообразию M в каждой своей точке $x \in M$ представимо в виде $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x$. Распределение \mathfrak{M} и кусочно гладкие интегральные кривые этого распределения называются \mathfrak{M} -горизонтальными или просто горизонтальными. Касательное распределение TF к слоям слоения F и каждый вектор X из $T_x F$, $x \in M$, называются вертикальными. Кривая в многообразии M , принадлежащая одному слою слоения F , называется вертикальной.

Кусочно гладкое отображение $H : I \times I \rightarrow M$, где $I = [0, 1]$, называют *вертикально-горизонтальной гомотопией* (далее, для краткости, *вгг*), если для любых $(s, t) \in I \times I$ кривая $H|_{I \times \{t\}}$ является горизонтальной, а $H|_{\{s\} \times I}$ является вертикальной кривой. Пара $(H|_{I \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I})$ называется *базой вгг H* . Две кривые (δ, τ) на M называются *допустимой парой путей*, если $\delta(0) = \tau(0)$, причем путь δ является горизонтальным, а τ — вертикальным.

Если для любой допустимой пары путей (δ, τ) существует *вгг* с базой (δ, τ) , то распределение \mathfrak{M} называется *связностью Эресмана для F* . Если при этом распределение \mathfrak{M} интегрируемо, то связность Эресмана \mathfrak{M} называется *интегрируемой*.

Говорят, что кривая $\tilde{\delta}$ получена *переносом кривой δ вдоль τ относительно связности Эресмана \mathfrak{M}* , если $\tilde{\delta} := H|_{I \times \{1\}}$. Обозначим этот перенос через $\delta \xrightarrow{\tau} \tilde{\delta}$.

2.2. Группы \mathfrak{M} -голономии. Пусть (M, F) — слоение со связностью Эресмана \mathfrak{M} . Обозначим через Ω_x , $x \in M$, множество горизонтальных кривых с началом в точке x . Действие фундаментальной группы $\pi_1(L, x)$ слоя $L = L(x)$ на множестве Ω_x определяется следующим образом: $\Phi_x : \pi_1(L, x) \times \Omega_x \rightarrow \Omega_x : ([h], \sigma) \mapsto \tilde{\sigma}$, где $[h] \in \pi_1(L, x)$, и $\tilde{\sigma}$ — результат переноса кривой $\sigma \in \Omega_x$ вдоль h относительно \mathfrak{M} . Пусть $K_{\mathfrak{M}}(L, x)$ — ядро действия Φ_x , т.е. $K_{\mathfrak{M}}(L, x) = \{\alpha \in \pi_1(L, x) \mid \alpha(\sigma) = \sigma \ \forall \sigma \in \Omega_x\}$. Фактор-группа $H_{\mathfrak{M}}(L, x) = \pi_1(L, x)/K_{\mathfrak{M}}(L, x)$ называется *группой \mathfrak{M} -голономии* слоя L [4]. Благодаря линейной связности слоев, группы \mathfrak{M} -голономии в различных точках одного и того же слоя изоморфны. Пусть $\Gamma(L, x)$ — ростковая группа голономии слоя L . Определен эпиморфизм групп $\chi : H_{\mathfrak{M}}(L, x) \rightarrow \Gamma(L, x)$, удовлетворяющий равенству

$$\chi \circ \mu = \nu, \tag{3}$$

где $\mu : \pi_1(L, x) \rightarrow H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ — фактор-отображение и $\nu([h]) := \langle h \rangle$ — росток локального голономного диффеоморфизма трансверсального q -мерного диска вдоль петли h в точке x .

2.3. Локальные горизонтальные голономные диффеоморфизмы. Рассмотрим произвольное гладкое слоение (M, F) коразмерности q на n -мерном многообразии M . Пусть \mathfrak{M} — гладкое q -мерное распределение на M , трансверсальное этому слоению, т.е. $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x \ \forall x \in M$. Далее будем рассматривать вертикально-горизонтальные гомотопии относительно распределений TM и \mathfrak{M} . В любой точке $x \in M$ существует такая окрестность V_x , что для любой допустимой пары путей (σ, h) в V_x с общим началом в x существует *взг* в V_x с базой (σ, h) . Пусть $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ — любая гладкая интегральная кривая распределения \mathfrak{M} с началом $x_0 := \sigma(0)$ и концом $x_1 := \sigma(1)$. Нетрудно убедиться в том, что найдутся такие стягиваемые окрестности U_0 точки x_0 в слое $L_0 \ni x_0$ и U_1 точки x_1 в слое $L_1 \ni x_1$, что для любой точки $x \in U_0$ и любого кусочно гладкого пути $h_x : [0, 1] \rightarrow U_0$ соединяющего $h(0) = x_0$ с $h(1) = x$, существует *взг* H_x с базой (σ, h_x) . При этом \mathfrak{M} -горизонтальная кривая $\sigma_x(s) := H_x(s, 1)$, $s \in [0, 1]$, является гладкой и, в силу стягиваемости U_0 , не зависит от выбора пути h_x , соединяющего x_0 с x в U_0 . Далее будем называть σ_x *переносом пути σ в точку $x \in U_0$* . При этом определен диффеоморфизм

$$\Phi_\sigma : U_0 \rightarrow U_1 : x \mapsto \sigma_x(1), \quad x \in U_0,$$

который называется *локальным горизонтальным голономным диффеоморфизмом* вдоль \mathfrak{M} -кривой σ [5].

Из определения производной Ли $L_X g$ от 2-формы g вдоль векторного поля X вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Предположим, что (M, F) — слоение коразмерности q на n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) , причем индуцированная метрика на слоях не вырождается, и \mathfrak{M} — q -мерное ортогональное к TF распределение. Пусть $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ — произвольная гладкая \mathfrak{M} -горизонтальная кривая в M , $\Phi_\sigma : U_0 \rightarrow U_1$ — локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль σ и $W := \{\sigma_x(s) \mid x \in U_0, s \in (0, 1)\}$, где σ_x — перенос σ в точку $x \in U_0$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1. Диффеоморфизм Φ_σ является изометрией (U_0, g) и (U_1, g) ;
2. Для векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(W)$ такого, что $X|_{\sigma_x(s)} = \dot{\sigma}_x(s)$, где $x \in U_0$, $s \in [0, 1]$, выполняется равенство $(L_X g)(Y, Z) = 0$ для всех $Y, Z \in \mathfrak{X}_F(W)$.

3. ПСЕВДОРИМАНОВЫ СУБМЕРСИИ

Изучение псевдоримановых субмерсий было инициировано В. О'Нейлом [12] и А. Грэйем [13]. Гладкая сюръективная субмерсия $p : M \rightarrow B$ между двумя псевдоримановыми многообразиями (M, g) и (B, g^B) называется *псевдоримановой субмерсией*, если метрика, индуцированная на каждом слое субмерсии $p^{-1}(b)$, где $b \in B$, не вырождается, и p сохраняет скалярное произведение векторов, ортогональных слоям субмерсии.

Исследованию псевдоримановых субмерсий посвящены многочисленные работы различных авторов. Особый интерес представляют псевдоримановы субмерсии с вполне геодезическими слоями, для некоторых классов которых доказаны классификационные теоремы (см. [14] и ссылки там).

Следующие свойства псевдоримановых субмерсий с вполне геодезическими слоями существенно используются далее в данной работе.

Предложение 4. *Если (M, g) и (B, g^B) — псевдоримановы многообразия размерности n и q , соответственно, где $0 < q < n$, а $p : M \rightarrow B$ — псевдориманова субмерсия, слою которой — вполне геодезические подмногообразия в (M, g) , то:*

- (i) *проекция $\sigma = p \circ \gamma$ любой геодезической γ из (M, g) является геодезической в (B, g^B) ;*
- (ii) *образ $p^{-1}(L)$ любого вполне геодезического подмногообразия L из базы (B, g^B) является вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) , несвязным, если слою субмерсии p не связны.*

Доказательство. Предположим, что $p : M \rightarrow B$ — псевдориманова субмерсия с вполне геодезическими слоями.

(i). Свойство кривой псевдориманова многообразия (M, g) быть геодезической является локальным, поэтому достаточно доказать, что для любой геодезической γ в произвольной координатной окрестности U , адаптированной к (M, F) , ее проекция $p \circ \gamma$ — геодезическая в окрестности $V := p(U)$ многообразия (B, g^B) . Заметим, что $p|_U : U \rightarrow V$ — псевдориманова субмерсия на стягиваемом многообразии со стягиваемыми слоями. Поэтому, не нарушая общности, в данном доказательстве положим $M = U$, $B = V$, $p : M \rightarrow B$ — псевдориманова субмерсия с вполне геодезическими слоями, а $F = \{p^{-1}(b) \mid b \in B\}$.

Предположим, что псевдоримановы метрики g и g^B имеют сигнатуры (k, s) и (k_1, s_1) , соответственно, где $k + s = n$, $k_1 + s_1 = q$. Пусть $H_1 = O(k_1, s_1)$, $H = O(k, s)$. Обозначим через $\mathcal{L}(M, H) = M \times H$ и $P_1(B, H_1) = B \times H_1$ расслоения псевдо-ортогональных реперов на M и B , определенные метриками g и g^B , соответственно, они являются тривиальными главными расслоениями с проекциями $\pi : \mathcal{L} \rightarrow M$ и $f_1 : P_1 \rightarrow B$. Пусть \mathfrak{M} — q -мерное распределение, ортогональное слоям субмерсии p . Обозначим через $P = M \times H_1$ расслоение \mathfrak{M} -трансверсальных реперов, являющееся прообразом расслоения $P_1(B, H_1)$ относительно субмерсии p , то есть $P = \{(y, v) \in M \times P_1 \mid p(y) = f_1(v)\}$. При этом определены проекции $f : P \rightarrow M$, $f(y, v) := y$, и $h : P \rightarrow P_1$, $h(y, v) = v \quad \forall (y, v) \in P$, удовлетворяющие равенству $f_1 \circ h = p \circ f$. Слои субмерсии $h : P \rightarrow P_1$ образуют слоение (P, F_P) .

Так как $M = U$ — координатная окрестность, адаптированная к слоению (M, F) , то в каждой точке $y \in M$ определен координатный репер $(\frac{\partial}{\partial x^a}|_y, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_y)$, $a = 1, \dots, n - q$, $\alpha = n - q + 1, \dots, n$, причем $\{\frac{\partial}{\partial x^a}|_y\}$ — базис $T_y F$, касательного пространства к слою слоения (M, F) в точке y . Любая точка $(y, v) \in P$ представляет собой трансверсальный репер, то есть базис $\{Z_\alpha|_y\}$ векторного пространства \mathfrak{M}_y в точке $y \in M$, определенный равенством $p_{*y}(Z_\alpha|_y) = X_\alpha|_x$, где $\{X_\alpha|_x\} = v$ — базис касательного векторного пространства $T_x B$ в точке $x = f_1(v) = p(y)$. Следовательно, определено отображение $J : P \rightarrow \mathcal{L}$, $J(y, v) = \{\frac{\partial}{\partial x^a}|_y, Z_\alpha|_y\}$, являющееся вложением многообразия P в \mathcal{L} и удовлетворяющее равенству $\pi \circ J = f$.

Пусть E_{n-q} — единичная $(n - q)$ -мерная матрица. Обозначим через $j : H_1 \rightarrow H : A \mapsto \begin{pmatrix} E_{n-q} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ вложение группы H_1 в группу H . При этом пара (J, j) определяет редукцию \mathcal{R} H -расслоения \mathcal{L} к замкнутой подгруппе $j(H_1)$ [15, Глава 1, §5]. Поскольку отображение $J : P \rightarrow \mathcal{R} = J(P)$ — изоморфизм главных расслоенных пространств можно отождествить P с \mathcal{R} посредством J . При этом коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} \supset \mathcal{R} \cong P & \xrightarrow{h} & P_1 \\ \pi_{\mathcal{R}} = f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ M & \xrightarrow{p} & B, \end{array} \quad (4)$$

где $\pi_{\mathcal{R}} := \pi|_{\mathcal{R}}$. Таким образом, на \mathcal{R} определено слоение \mathcal{F} как образ слоения (P, F_P) при указанном отождествлении, причем сужение отображения $\pi_{\mathcal{R}}$ на любой слой слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является диффеоморфизмом на соответствующий слой (M, F) .

Связность Леви-Чивита ∇ псевдориманова многообразия (M, g) определяет H -связность Q на \mathcal{L} . Пусть $Q^{(1)}$ — H_1 -связность на P_1 , определенная связностью Леви-Чивита ∇^B псевдориманова многообразия (B, g^B) . Обозначим через ω $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ -значную 1-форму связности Q , а через θ — каноническую 1-форму этой связности на \mathcal{L} со значениями в \mathbb{R}^n . Напомним, что $B_\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{L})$ называется *стандартным горизонтальным векторным полем*, если $\omega(B_\xi) = 0$, то есть $B_\xi \in \mathfrak{X}_Q(\mathcal{L})$,

и $\theta(B_\xi) = \xi = \text{const} \in \mathbb{R}^n$. Как известно [15, Глава III, Предложение 6.3], кривая γ — геодезическая в (M, ∇) тогда и только тогда, когда γ является проекцией интегральной кривой некоторого стандартного горизонтального векторного поля.

Поскольку лифт в \mathcal{L} любой геодезической из (M, ∇) является интегральной кривой распределения Q , то вполне геодезичность (M, F) влечет включение $T\mathcal{F} \subset Q|_{\mathcal{R}}$. Следовательно, $Q|_{\mathcal{R}} = T\mathcal{F} \oplus \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} = \pi^*\mathfrak{M} \cap Q|_{\mathcal{R}}$.

Так как $p : M \rightarrow B$ — псевдориманова субмерсия, согласно [11, Теорема 1], распределение \mathfrak{M} геодезически инвариантно, поэтому Q -лифт $\tilde{\gamma}$ в точку $u \in \pi^{-1}(\gamma_0) \cap \mathcal{R}$ любой \mathfrak{M} -горизонтальной геодезической $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ является интегральной кривой распределения \mathfrak{N} . Более того, для любого вектора $Y \in \mathfrak{N}_u$, $u \in \mathcal{R}$, такого, что $\theta(Y) = \xi \in \{0_{n-q}\} \times \mathbb{R}^q$, где 0_{n-q} — ноль в \mathbb{R}^{n-q} , существует единственная \mathfrak{M} -горизонтальная геодезическая γ на M , Q -лифт которой в точку u есть интегральная кривая стандартного горизонтального векторного поля B_ξ , причем $B_\xi|_u = Y$.

По свойству псевдоримановой субмерсии, любая \mathfrak{M} -горизонтальная геодезическая посредством $p : M \rightarrow B$ проектируется в геодезическую базы (B, ∇^B) [12]. Отсюда, учитывая равенство $f_1 \circ h = p \circ \pi_{\mathcal{R}}$, мы получаем $h_{*u}(\mathfrak{N}_u) = h_{*u}(Q_u) = Q_{h(u)}^{(1)}$ для любой точки $u \in \mathcal{R}$.

Пусть γ — любая геодезическая в (M, g) , проходящая через точку $x = \gamma(0)$ в направлении вектора $X = \dot{\gamma}(0) \in T_x M$. Возьмем такую точку $u_0 \in \mathcal{R}$, что $\pi(u_0) = x$. Рассмотрим репер u_0 как отображение $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, которое ставит в соответствие вектору из \mathbb{R}^n с координатами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в стандартном базисе в \mathbb{R}^n вектор в $T_x M$ с теми же координатами в базисе u_0 . Предположим, что $\eta := u_0^{-1}(X) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $pr : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ — каноническая проекция на сомножитель и $\xi := pr(\eta) \in \mathbb{R}^q$. Так как γ — геодезическая, существует интегральная кривая $\hat{\gamma}$ стандартного векторного поля B_η на \mathcal{R} с началом в точке $\hat{\gamma}(0) = u_0$. При этом $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ и $\hat{\sigma} := h \circ \hat{\gamma}$ — интегральная кривая стандартного векторного поля B_ξ на P_1 , проходящего через точку $v_0 = h(u_0) = \hat{\sigma}(0)$. Поскольку $p \circ \pi_{\mathcal{R}} = f_1 \circ h$, мы имеем цепочку равенств $\sigma = p \circ \gamma = p \circ (\pi \circ \hat{\gamma}) = (p \circ \pi) \circ \hat{\gamma} = (f_1 \circ h) \circ \hat{\gamma} = f_1 \circ (h \circ \hat{\gamma}) = f_1 \circ \hat{\sigma}$.

Таким образом, кривая $\sigma := f_1 \circ \hat{\sigma}$ — геодезическая на (B, g^B) , являющаяся проекцией геодезической γ многообразия (M, g) , т.е. $p \circ \gamma = \sigma$, и утверждение (i) доказано.

(ii). Пусть L — вполне геодезическое подмногообразие в (B, g^B) и $N := p^{-1}(L)$ — гладкое вложенное подмногообразие в M , несвязное, если слои субмерсии $p : M \rightarrow B$ не связны. Возьмем любую точку $y \in N$ и вектор $Y \in T_y N$. Пусть $\gamma = \gamma_Y(s)$, $s \in [0, 1]$, — геодезическая в (M, g) , проходящая через точку $y = \gamma_Y(0)$ в направлении вектора Y , то есть $Y = \dot{\gamma}_Y(0)$. Согласно доказанному утверждению (i) $\sigma := p \circ \gamma$ — геодезическая в (B, g^B) , проходящая через точку $b = p(y) = \sigma(0)$ в направлении вектора $X = p_{*y}Y \in T_b L$. Так как L — вполне геодезическое подмногообразие, то $\sigma(s) \in L \forall s \in [0, 1]$, следовательно, $\gamma(s) \in N \forall s \in [0, 1]$. Это означает вполне геодезичность подмногообразия N в (M, g) . \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

4.1. Критерий вполне геодезичности слоения.

Определение 4. Векторное поле X на многообразии M называется слоеным относительно слоения (M, F) , если $[X, Y] \in \mathfrak{X}_F(M)$ для любого $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$.

Предложение 5. Пусть (M, F) — слоение на псевдоримановом многообразии (M, g) со связностью Леви-Чивита ∇ , причем на слоях слоения индуцируется псевдориманова метрика, и \mathfrak{M} — распределение, дополнительное по ортогональности к $T\mathcal{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) слоение (M, F) вполне геодезическое;
- (2) $L_X g(Y, Z) = 0$ для любых векторных полей $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и $Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$;
- (3) $L_X g(Y, Z) = 0$ для любого слоеного векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и любых векторных полей $Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$;
- (4) для любой \mathfrak{M} -горизонтальной кривой $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм $\Phi_\sigma : U_0 \rightarrow U_1$ является изометрией (U_0, g) и (U_1, g) .

Доказательство. Обозначим через $\alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z)$ ортогональную проекцию $\nabla_Y Z$ в $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ относительно разложения $TM = TF \oplus \mathfrak{M}$. Вполне геодезичность слоения (M, F) эквивалентна $\alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z) = 0 \ \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$.

Эквивалентность (1) и (2) доказана в [16, Предложение 2.7] следующим образом. Используя свойства связности Леви-Чивита ∇ псевдориманова многообразия (M, g) , получено равенство

$$L_X g(Y, Z) = g(X, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z)) \quad \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M), \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M), \quad (5)$$

откуда, в силу невырожденности индуцированной метрики на слоях, вытекает эквивалентность $L_X g(Y, Z) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \Leftrightarrow \alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z) = 0$, то есть (1) \Leftrightarrow (2).

Импликация (2) \Rightarrow (3) очевидна. Пусть имеет место (3). Заметим, что произвольное векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ является линейной комбинацией слоеных векторных полей из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$, то есть $X = \beta^k X_k$, где $X_k \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ — слоеные векторные поля, $\beta^k \in \mathfrak{F}(M)$. Применяя (5), благодаря билинейности g , мы получаем $L_X g(Y, Z) = g(X, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z)) = g(\beta^k X_k, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z)) = \beta^k g(X_k, \alpha_{\mathfrak{M}}(Y, Z)) = \beta^k L_{X_k} g(Y, Z)$. Согласно предположению $L_{X_k} g(Y, Z) = 0$, поэтому $L_X g(Y, Z) = 0$. Следовательно, (3) \Rightarrow (2) и (2) \Leftrightarrow (3).

Если σ — кусочно гладкая \mathfrak{M} -горизонтальная кривая, то Φ_σ — композиция локальных горизонтальных голономных диффеоморфизмов, соответствующих гладким кускам кривой σ . Поэтому, не нарушая общности, в (4) можно считать, что $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ — гладкая \mathfrak{M} -горизонтальная кривая.

Предположим, что выполняется (3). Пусть $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ — гладкая \mathfrak{M} -горизонтальная кривая, $\Phi_\sigma : U_0 \rightarrow U_1$ — локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль σ и X — векторное поле, индуцированное Φ_σ указанным в Лемме 1 способом. Так как X является слоеным векторным полем, ортогональным слоению (M, F) , то из (3) следует $L_X g(Y, Z) = 0 \ \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$. Следовательно, по Лемме 1 Φ_σ — изометрия (U_0, g) и (U_1, g) . Таким образом, (3) \Rightarrow (4).

Теперь достаточно показать, что (4) \Rightarrow (3). Пусть $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ — любое слоеное векторное поле и $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ — любая его интегральная кривая. Так как σ — \mathfrak{M} -горизонтальная кривая, то определен локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм $\Phi_\sigma : U_0 \rightarrow U_1$ вдоль σ . Поскольку X — слоеное векторное поле, то перенос σ_x кривой σ в точку $x \in U_0$ также является интегральной кривой поля X . Согласно Лемме 1 отсюда следует, что $L_X g(Y, Z) = 0 \ \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_F(M)$. Таким образом, (4) \Rightarrow (3). \square

Замечание 3. Предложение 5 доказано без предположения существования связности Эресмана для слоения (M, F) .

4.2. Вполне геодезичность слоения $F^{(1)}$. Докажем, что $F^{(1)}$ — вполне геодезическое слоение на графике $(G_{\mathfrak{M}}(F), d)$.

Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow G_{\mathfrak{M}}(F)$ — гладкая \mathfrak{M} -кривая в $G_{\mathfrak{M}}(F)$ с началом в точке $\gamma(0) = z_0 = (x_0, \{h\}, y_0) \in G_{\mathfrak{M}}(F)$. Тогда $\sigma := p_1 \circ \gamma$ — \mathfrak{M} -кривая в M с началом в точке $x_0 = \sigma(0) = p_1(z_0)$. Так как (σ, h) — допустимая пара, то существует *взг* H с базой (σ, h) . Пусть $\sigma \xrightarrow{h} \tilde{\sigma}$, при этом $\tilde{\sigma} = p_2 \circ \gamma$. Не нарушая общности, предположим, что V_0 такая окрестность точки z_0 в слое $p_1^{-1}(x_0)$, что окрестность $U_0 = p_2(V_0)$, принадлежащая слою $L = L(x_0)$, правильно накрыта отображением $p_2|_{L^{(1)}} : L^{(1)} \rightarrow L$, где $L^{(1)} = L^{(1)}(z_0) = p_1^{-1}(x_0)$. Если $\Phi_\gamma : V_0 \rightarrow V_1 : z \mapsto \Phi_\gamma(z)$ — горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль γ в $G_{\mathfrak{M}}(F)$, где V_1 — окрестность точки $\gamma(1)$ в слое $p_1^{-1}(\sigma(1))$, то для любой точки $z \in V_0$ и \mathfrak{M} -лифта γ_z кривой σ в точку z , по определению, $\Phi_\gamma(z) = \gamma_z(1)$. При этом $z = (x_0, \{h_y\}, y)$, где $y = p_2(z)$, $h_y = h \cdot t_y$, t_y — путь в U_0 , соединяющий y_0 с y в U_0 . Заметим, что $\sigma_y = p_2 \circ \gamma_z$ — \mathfrak{M} -кривая в M , которая получена переносом σ вдоль пути h_y , а $\Phi_{\tilde{\sigma}} := p_2 \circ \Phi_\gamma : U_0 = p_2(V_0) \rightarrow U_1 = p_2(V_1)$ — локальный \mathfrak{M} -горизонтальный голономный диффеоморфизм вдоль $\tilde{\sigma}$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\Phi_\gamma} & V_1 \\ p_2|_{V_0} \downarrow & & \downarrow p_2|_{V_1} \\ U_0 & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{\sigma}}} & U_1. \end{array} \quad (6)$$

Согласно Предложению 5 из вполне геодезичности слоения F вытекает, что $\Phi_{\bar{\sigma}} : U_0 \rightarrow U_1$ — изометрия псевдоримановых многообразий (U_0, g) и (U_1, g) . Отсюда, учитывая, что $p_1|_{V_0} : V_0 \rightarrow U_0$, $p_2|_{V_1} : V_1 \rightarrow U_1$ — изометрии, в силу коммутативности диаграммы (6) мы получаем, что $\Phi_{\gamma} : V_0 \rightarrow V_1$ изометрия (V_1, d) и (V_2, d) . Отсюда, аналогично Предложению 5 мы получаем

$$(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(G_{\mathfrak{M}}(F)), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)). \quad (7)$$

Покажем теперь, что $(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$ и для каждого $X \in \mathfrak{X}_{F^{(2)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$. Обозначим через $L^{(i)} = L^{(i)}(z_0)$, $i = 1, 2$, и $\mathbb{L} = \mathbb{L}(z_0)$ слои слоений $F^{(i)}$ и \mathbb{F} , соответственно, проходящие через z_0 . Пусть γ — произвольная $TF^{(2)}$ -кривая с началом $z_0 = \gamma(0)$, то есть $\gamma(s) \in L^{(2)}$, $s \in [0, 1]$. Определен локальный горизонтальный диффеоморфизм $\Phi_{\gamma} : W_0 \rightarrow W_1$ вдоль γ , где W_0 — окрестность точки z_0 в слое $L^{(1)}$, а W_1 — окрестность точки $z_1 = \gamma(1)$ в слое $L^{(1)}(z_1)$ слоения $F^{(1)}$, проходящем через z_1 .

Напомним, что подмножество слоеного многообразия (N, F_N) называется F_N -насыщенным, если его можно представить в виде объединения некоторых слоев слоения (N, F_N) .

Любой слой \mathbb{L} индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$ является как $F^{(1)}$ -насыщенным, так и $F^{(2)}$ -насыщенным подмногообразием графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$, причем, согласно определению метрики d , слой \mathbb{L} с индуцированной псевдоримановой метрикой (\mathbb{L}, d) локально является псевдоримановым произведением псевдоримановых многообразий $(L^{(1)}, d)$ и $(L^{(2)}, d)$. Отсюда следует, что $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — параллельные слоения на невырожденно приводимом псевдоримановом многообразии (\mathbb{L}, d) (см., например, [19]). Следовательно, $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — вполне геодезические слоения на (\mathbb{L}, d) , поэтому, согласно Предложению 5 $\Phi_{\gamma} : W_0 \rightarrow W_1$ — изометрия и выполняется равенство

$$(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}_{F^{(2)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)). \quad (8)$$

Заметим, что в любой точке графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$ существует окрестность \mathcal{W} , адаптированная к слоениям \mathbb{F} , $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ одновременно, в которой выполняются оба равенства (7) и (8). Так как $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{N} \oplus TF^{(2)}$, то любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(W)$ в окрестности \mathcal{W} произвольной точки $z \in G_{\mathfrak{M}}(F)$ можно представить в виде $X = \alpha X^{\mathfrak{N}} + \beta X^{(2)}$, где $X^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, $X^{(2)} \in \mathfrak{X}_{F^{(2)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}(W)$. Так же как в доказательстве Предложения 5 мы показываем, что $(L_{\alpha X^{\mathfrak{N}} + \beta X^{(2)}} d)(Y, Z) = \alpha(L_{X^{\mathfrak{N}}} d)(Y, Z) + \beta(L_{X^{(2)}} d)(Y, Z)$ для любых $Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F))$. Равенства (7) и (8) влекут $(L_{X^{\mathfrak{N}}} d)(Y, Z) = 0$ и $(L_{X^{(2)}} d)(Y, Z) = 0$. Таким образом мы получаем, что

$$(L_X d)(Y, Z) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}_{F^{(1)}}(G_{\mathfrak{M}}(F)).$$

Согласно Предложению 5 это означает, что $F^{(1)}$ — вполне геодезическое слоение.

4.3. Геодезическая инвариантность распределений $\mathfrak{M}^{(1)}$, $T\mathbb{F}$ и $TF^{(2)}$. Из определения метрики d вытекает, что $p_1 : G_{\mathfrak{M}} \rightarrow M$ — псевдориманова субмерсия, а $\mathfrak{M}^{(1)}$ — распределение, дополнительное по ортогональности к слоям этой субмерсии. Поэтому согласно [11, Теорема 1] распределение $\mathfrak{M}^{(1)}$ геодезически инвариантно.

По доказанному выше слоение $F^{(1)}$ вполне геодезическое, следовательно, $p_1 : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow M$ — псевдориманова субмерсия с вполне геодезическими слоями. Отсюда, применяя утверждение (ii) Предложения 4, мы получаем, что вполне геодезичность слоения (M, F) влечет вполне геодезичность индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$, поскольку каждый его слой $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ есть прообраз некоторого слоя L слоения (M, F) , являющегося вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) .

Так как $TF^{(2)} = \mathfrak{M}^{(1)} \cap T\mathbb{F}$, то $TF^{(2)}$ — геодезически инвариантное распределение как пересечение геодезически инвариантных распределений $\mathfrak{M}^{(1)}$ и $T\mathbb{F}$. Следовательно, $(G_{\mathfrak{M}}(F), F^{(2)})$ — вполне геодезическое слоение на $(G_{\mathfrak{M}}(F), d)$. \square

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

1. Первое утверждение Теоремы 3 обосновано при доказательстве Теоремы 2 (подраздел 4.2).
2. Пусть x_1 и x_2 — любые две точки псевдориманова многообразия (M, g) . Согласно [4, Лемма 1.1], слои $L_1 \ni x_1$ и $L_2 \ni x_2$ можно соединить \mathfrak{M} -горизонтальной кривой $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$, где

$y_1 = \sigma(0) \in L_1$, $y_2 = \sigma(1) \in L_2$. Соединим x_i с y_i кривой σ_i в слое L_i , $i = 1, 2$. Тогда произведение путей $\gamma = \sigma_1 \cdot \sigma \cdot \sigma_2^{-1}$ соединяет точку x_1 с точкой x_2 . Как известно [7, Лемма 1], любая \mathfrak{M} -горизонтальная кривая из M обладает \mathfrak{N} -горизонтальными лифтами в $G_{\mathfrak{M}}(F)$. Кривые σ_1 и σ_2 обладают $TF^{(2)}$ -горизонтальными лифтами в $G_{\mathfrak{M}}(F)$, поскольку для любого слоя \mathbb{L} индуцированного слоения $(G_{\mathfrak{M}}(F), \mathbb{F})$ распределение $TF^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — связность Эресмана для субмерсии $p_1|_{\mathbb{L}}$. Следовательно, для любой точки z из $p_1^{-1}(x_1)$ существует $\mathfrak{M}^{(1)}$ -горизонтальный лифт $\hat{\gamma}$ кривой γ с началом $\hat{\gamma}(0) = z$ и концом $\hat{\gamma}(1) \in p_1^{-1}(x_2)$. Так как

$$\Phi_{\hat{\gamma}} : p_1^{-1}(x_0) \rightarrow p_1^{-1}(x_2) : z \mapsto \hat{\gamma}(1)$$

— горизонтальный голономный диффеоморфизм относительно слоения $(G_{\mathfrak{M}}, F^{(1)})$ вдоль $\mathfrak{M}^{(1)}$ -горизонтального пути $\hat{\gamma}$, то в силу вполне геодезичности указанного слоения, из Предложения 5 вытекает, что отображение $\Phi_{\hat{\gamma}}$ является изометрией. Следовательно, существует псевдориманово многообразие $L_0^{(1)}$, изометричное любому слою субмерсии p_1 . Аналогично, существует псевдориманово многообразие $L_0^{(2)}$, изометричное любому слою субмерсии p_2 . Зафиксируем точку $z_0 = (x_0, \{1_{x_0}\}, x_0) \in G_{\mathfrak{M}}(F)$, где 1_{x_0} — постоянный путь в точке x_0 . Заметим, что сужение инверсии $i : G_{\mathfrak{M}}(F) \rightarrow G_{\mathfrak{M}}(F)$, $i(x, \{h\}, y) = (y, \{h^{-1}\}, x)$ на слой $p_1^{-1}(x_0)$ является изометрией $p_1^{-1}(x_0)$ на слой $p_2^{-1}(x_0)$. Отсюда вытекает изометричность $L_0^{(1)}$ и $L_0^{(2)}$. Обозначим через L_0 псевдориманово многообразие, изометричное $L_0^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Пусть $L = L(x)$, $x \in M$, — любой слой слоения (M, F) . Из определения графика $G_{\mathfrak{M}}(F)$ вытекает, что сужение канонической проекции $p_1|_{p_2^{-1}(x)} : p_2^{-1}(x) \rightarrow L$ — регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе \mathfrak{M} -голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$. Согласно определению псевдоримановой метрики d на $G_{\mathfrak{M}}(F)$, это отображение является локальной изометрией и, следовательно, псевдоримановым накрытием. Доказанная выше изометричность $p_2^{-1}(x)$ и L_0 влечет выполнение утверждения (i) доказываемой теоремы.

Рассмотрим произвольный слой $\mathbb{L} = p_1^{-1}(L)$ индуцированного слоения \mathbb{F} на графике $G_{\mathfrak{M}}(F)$ с метрикой $d|_{\mathbb{L}}$. Как показано в подразделе 4.2, псевдориманово многообразие (\mathbb{L}, d) является невырожденно приводимым, причем $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ и $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — его ортогональные параллельные слоения. Подчеркнем, что $TF^{(1)}|_{\mathbb{L}}$ — интегрируемая связность Эресмана для $F^{(2)}|_{\mathbb{L}}$, а $TF^{(2)}|_{\mathbb{L}}$ — интегрируемая связность Эресмана для $F^{(1)}|_{\mathbb{L}}$. Таким образом, $(\mathbb{L}, p_1|_{\mathbb{L}}, p_1|_{\mathbb{L}}, L, L)$ — симметричное простое трансверсальное двурасслоение в смысле [8].

Зафиксируем точку $z = (x, \{1_x\}, x) \in \mathbb{L}$. Согласно (i) группа $\Psi \cong H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ действует изометриями на псевдоримановом накрывающем многообразии L_0 как группа накрывающих преобразований, поэтому определено диагональное действие Φ группы Ψ на псевдоримановом произведении $L_0 \times L_0$ по правилу $\psi(z_1, z_2) = (\psi(z_1), \psi(z_2))$, $(z_1, z_2) \in L_0 \times L_0$. Действие Φ свободное, собственно разрывное и сохраняет структуру произведения. Определено фактор-многообразие $(L_0 \times L_0)/\Psi$ с парой слоений F_1, F_2 , накрытых произведением $L_0 \times L_0$. Так как Φ сохраняет метрику псевдориманова произведения на $L_0 \times L_0$, то на $(L_0 \times L_0)/\Psi$ индуцируется псевдориманова метрика, относительно которой фактор-отображение $L_0 \times L_0 \rightarrow (L_0 \times L_0)/\Psi$ является псевдоримановым накрытием. При этом на $(L_0 \times L_0)/\Psi$ определена пара параллельных слоений (F_1, F_2) , слою которых накрыты слоями тривиальных слоений произведения $L_0 \times L_0$.

Как известно [8, Предложения 5 и 6], существует диффеоморфизм

$$\Theta : \mathbb{L} \rightarrow (L_0 \times L_0)/\Psi,$$

являющийся изоморфизмом обеих пар слоений $F^{(i)}|_{\mathbb{L}}$ и F_i , $i = 1, 2$ в категории слоений \mathfrak{Fol} . Нетрудно видеть, что $L_0 \times L_0$ общее псевдориманово накрывающее пространство для \mathbb{L} и для $(L_0 \times L_0)/\Psi$, следовательно, Θ — диффеоморфизм, являющийся локальной изометрией, т. е., Θ — изометрия, что завершает доказательство утверждения (ii) Теоремы 3. \square

6. ГРАФИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СЛОЕНИЙ

6.1. Критерий существования интегрируемой связности Эресмана.

Определение 5. Пара трансверсальных слоений дополнительной размерности (F_1, F_2) на многообразии M называется *двуслоением*.

Если (F_1, F_2) — двуслоение на M , то в каждой точке $x \in M$ выполняется равенство $T_x M = T_x F_1 \oplus T_x F_2$.

Определение 6. Пусть (F_1, F_2) — двуслоение на M , а $\kappa : \widehat{M} \rightarrow M$ — универсальное накрывающее отображение. Если выполняются условия:

- 1) $\widehat{M} = M_1 \times M_2$ — произведение односвязных многообразий M_1 и M_2 ,
- 2) $\kappa^* F_1 = \{M_1 \times \{x_2\} \mid x_2 \in M_2\}$, $\kappa^* F_2 = \{\{x_1\} \times M_2 \mid x_1 \in M_1\}$, то говорят, что двуслоение (F_1, F_2) накрыто произведением.

Используя теорему Ш. Касивабара [17, Теорема 2], нетрудно получить критерий существования интегрируемой связности Эресмана для гладкого слоения. Сформулируем этот критерий в следующем удобном для нас виде.

Теорема 5. Двуслоение (F_1, F_2) на многообразии M накрыто произведением тогда и только тогда, когда распределение TF_2 — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M, F_1) .

Пусть (F_1, F_2) — двуслоение на многообразии M . Из определения связности Эресмана вытекает, что TF_2 — связность Эресмана для слоения (M, F_1) тогда и только тогда, когда TF_1 — связность Эресмана для (M, F_2) .

6.2. Лемма. Мы будем применять следующее утверждение, которое по существу имеет локальный характер.

Лемма 2. Пусть (F, F^\perp) — взаимно ортогональные слоения дополнительной размерности на псевдоримановом многообразии (M, g) , причем индуцированная метрика на слоях слоения (M, F) не вырождается. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

- (1) слоение (M, F) является одновременно псевдоримановым и вполне геодезическим;
- (2) оба слоения (M, F) и (M, F^\perp) вполне геодезические;
- (3) оба слоения (M, F) и (M, F^\perp) псевдоримановы;
- (4) оба слоения (M, F) и (M, F^\perp) параллельны.

Доказательство. Предположим, что выполняются условия Леммы 2, причем $\dim(M) = n$, а $\dim(F) = q$, где $0 < q < n$, при этом $\dim(F^\perp) = n - q$.

Пусть слоение (M, F) является одновременно псевдоримановым и вполне геодезическим. Так как (M, F) псевдориманово слоение, то согласно [11, Теорема 1] $(n - q)$ -мерное ортогональное ему распределение \mathfrak{M}^\perp — вполне геодезическое. Поскольку $\mathfrak{M}^\perp = TF^\perp$, это означает вполне геодезичность слоения (M, F^\perp) . Таким образом, (1) \Rightarrow (2).

Предположим, что оба слоения (M, F) и (M, F^\perp) вполне геодезические. Согласно [11, Теорема 1] оба этих слоения являются псевдоримановыми, то есть, (2) \Rightarrow (3).

Пусть оба слоения (M, F) и (M, F^\perp) — псевдоримановы. Как известно, для любого двуслоения (F, F^\perp) в каждой точке $x \in M$ существует такая карта (U, φ) , что $U = U_1 \times U_2$, где $F|_U = \{U_1 \times \{x_2\} \mid x_2 \in U_2\}$ и $F^\perp|_U = \{\{x_1\} \times U_2 \mid x_1 \in U_1\}$. Псевдоримановость слоений (M, F) и (M, F^\perp) влечет существование на U_1 и U_2 таких псевдоримановых метрик g_1 и g_2 , соответственно, что проекции на сомножители $U_1 \times U_2 \rightarrow U_i$, $i = 1, 2$, являются псевдоримановыми субмерсиями $(U_1 \times U_2, g)$ на (U_i, g_i) . Это означает, что $(U_1 \times U_2, g)$ представляет собой псевдориманово произведение псевдоримановых многообразий (U_1, g_1) и (U_2, g_2) . Поскольку x — произвольная точка многообразия M , отсюда следует, что (M, g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие с параллельными слоениями (M, F) и (M, F^\perp) (см., например, [19]). Итак, мы доказали, что (3) \Rightarrow (4).

Предположим теперь, что (M, F) и (M, F^\perp) — параллельные слоения на (M, g) . Так как касательные векторы к геодезической образуют поле параллельного переноса, то из определения параллельных слоений вытекает их вполне геодезичность, поэтому из доказанной импликации

(2) \Rightarrow (3) следует, что оба указанные слоения являются псевдоримановыми. Таким образом, (4) \Rightarrow (1). \square

6.3. Группы голономии параллельных слоений.

Предложение 6. *Если F — параллельное слоение на псевдоримановом многообразии (M, g) , причем метрика на слоях не вырождается, а дополнительное по ортогональности распределение — связность Эресмана для F , то почти каждый слой слоения F имеет тривиальную группу голономии.*

Доказательство. Из условия вытекает существование дополнительного по ортогональности к F параллельного слоения F^\perp . Так как TF^\perp — связность Эресмана для F , то из Теоремы 5 следует, что двуслоение (F, F^\perp) накрыто произведением, то есть универсальное накрытие для M имеет вид $\kappa : M_1 \times M_2 \rightarrow M$, причем $\kappa^*F = \{M_1 \times \{z\} \mid z \in M_2\}$. Зафиксируем $x_0 \in M$ и $(y_0, z_0) \in M_1 \times M_2$, $p_1(y_0, z_0) = x_0$. Обозначим через L и L^\perp слои слоений F и F^\perp , проходящие через x_0 . Положим $M_1 \cong M_1 \times \{z_0\}$ и $M_2 \cong \{y_0\} \times M_2$. Пусть $g_1 = g|_L$ и $g_2 = g|_{L^\perp}$. Так как $\kappa|_{M_1} : M_1 \rightarrow L$ и $\kappa|_{M_2} : M_2 \rightarrow L^\perp$ — универсальные накрывающие отображения, то определены псевдоримановы многообразия (M_1, κ^*g_1) и (M_2, κ^*g_2) . Поскольку (M, g) локально является произведением псевдоримановых многообразий, индуцированных на локальных слоях слоений F и F^\perp , то псевдориманово многообразие $(M_1 \times M_2, \kappa^*g)$ является произведением псевдоримановых многообразий (M_1, κ^*g_1) и (M_2, κ^*g_2) .

Фундаментальная группа $\pi_1(M, x_0)$ действует на $M_1 \times M_2$ как группа накрывающих преобразований G накрытия κ , сохраняющая структуру произведения и псевдориманову метрику κ^*g . Поэтому на M_2 индуцируется группа изометрий Ψ и определен эпиморфизм групп $\chi : G \rightarrow \Psi$. В силу квазианалитичности действия группы Ψ на M_2 , группа голономии $\Gamma(L, x)$ произвольного слоя $L = L(x)$ слоения F изоморфна стационарной подгруппе Ψ_z группы Ψ в точке $z \in pr(\kappa^{-1}(x))$, где $pr : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ — каноническая проекция на второй соиножитель. Следовательно, слой $L = L(x)$ имеет тривиальную группу голономии тогда и только тогда, когда группа Ψ_z тривиальна при $z \in pr(\kappa^{-1}(x))$.

Пусть $fix(\psi)$ — множество фиксированных точек изометрии $\psi \in \Psi$. Докажем, что объединение всех слоев слоения (M, F) с нетривиальными группами голономии имеет меру ноль в M . Это эквивалентно тому, что множество $K = \bigcup_{\psi \in \Psi} fix(\psi)$ имеет меру ноль в M_2 .

Напомним, что подмножество N m -мерного многообразия имеет меру ноль, если в каждой точке существует такая карта (U, f) этого многообразия, что подмножество $f(U \cap N) \subset \mathbb{R}^m$ имеет меру ноль в \mathbb{R}^m .

Пусть ψ — любой элемент из Ψ и z — произвольная точка из $fix(\psi)$. Так как псевдориманова метрика определяет G -структуру первого порядка, существует изоморфизм $\mu : \Psi_z \rightarrow D\Psi_z$, $\mu(\{\psi\}_z) = \psi_{*z}$, стационарной подгруппы Ψ_z на линейную группу $D\Psi_z$, ставящий в соответствие любой изометрии $\psi \in \Psi_z$ дифференциал ψ_{*z} в точке z .

Существует окрестность нуля W_0 в T_zM_2 такая, что экспоненциальное отображение $Exp|_{W_0} : W_0 \rightarrow M_2$ является диффеоморфизмом на открытую окрестность W точки z в M_2 . В силу непрерывности ψ_{*z} найдется окрестность W'_0 нуля в T_zM_2 , для которой $\psi_{*z}(W'_0) \subset W_0$. Пусть $W' = Exp(W'_0)$. Поскольку ψ — изометрия, она удовлетворяет равенству

$$Exp \circ \psi_{*z}|_{W'_0} = \psi \circ Exp|_{W'_0},$$

следовательно, $Exp^{-1}(fix(\psi) \cap W') = fix(\psi_{*z}) \cap W'_0$. Так как ψ_{*z} — нетривиальное линейное отображение векторного пространства T_zM_2 , то $fix(\psi_{*z})$ — собственное подпространство в T_zM_2 , поэтому множество $fix(\psi_{*z}) \cap W'_0$ имеет меру ноль в $T_zM_2 \cong \mathbb{R}^q$. Заметим, что $(W', Exp^{-1}|_{W'})$ можно рассматривать как карту в точке z на многообразии M_2 . Следовательно, множество $fix(\psi)$ имеет меру ноль в M_2 . Так как группа Ψ не более, чем счетная, отсюда вытекает, что множество K также имеет меру ноль в M_2 . \square

6.4. Доказательство Теоремы 4. Предположим, что (M, g) — невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, а F и F^\perp — его параллельные слоения дополнительной размерности, причем $\mathfrak{M} = TF^\perp$ — связность Эресмана для слоения (M, F) . По Лемме 2 слоения F и F^\perp являются одновременно вполне геодезическими и псевдоримановыми. Поэтому псевдогруппа

голономии слоения (M, F) образована локальными изометриями и является квазианалитической. Отсюда в силу Предложения 1 вытекает хаусдорфовость графика $G(F)$. Согласно Теореме 1 графики $G(F)$ и $G_{\mathfrak{M}}(F)$ канонически изоморфны и отождествляются, и утверждение 1 доказано.

Согласно [11, Теорема 2] индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ также псевдориманово, то утверждение 2 следует из Предложения 6 и утверждений 2 и 3 Теоремы 3.

Покажем, что распределение \mathfrak{N} интегрируемо. Для любого $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(G(F))$ по свойству дифференциала $p_{i*}(X) \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ при $i = 1, 2$. Учитывая это, в силу интегрируемости \mathfrak{M} , мы имеем $p_{1*}([X, Y]) = [p_{1*}(X), p_{1*}(Y)] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ и $p_{2*}([X, Y]) = [p_{1*}(X), p_{2*}(Y)] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\mathfrak{N} = p_1^*\mathfrak{M} \cap p_2^*\mathfrak{M}$, мы получаем $[X, Y] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(G(F))$. По теореме Фробениуса распределение \mathfrak{N} интегрируемо и определяет слоение, которое обозначим через $F^{\mathfrak{N}}$. Из Теоремы 2 вытекает, что слоения $F^{\mathfrak{N}}$ и \mathbb{F} — вполне геодезические. Согласно Лемме 2 это эквивалентно тому, что $(F^{\mathfrak{N}}, \mathbb{F})$ — пара дополнительных по ортогональности параллельных слоений.

Покажем, что распределение $\mathfrak{M}^{(2)}$ интегрируемо. Возьмем любые векторные поля X, Y , касательные к $\mathfrak{M}^{(2)}$. Пусть $Z := [X, Y]$. Так как $\mathfrak{M}^{(2)} = TF^{(1)} \oplus \mathfrak{N} = p_1^*\mathfrak{M}$, то благодаря интегрируемости распределения $\mathfrak{M} = TF^{\perp}$ выполняется цепочка равенств $p_{1*}(Z) = p_{1*}([X, Y]) = [p_{1*}(X), p_{1*}(Y)] \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$, поэтому необходимо, чтобы $Z \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}^{(2)}}(G(M))$. Согласно теореме Фробениуса распределение $\mathfrak{M}^{(2)}$ интегрируемо. Обозначим через $\mathcal{F}^{(2)}$ слоение, для которого $\mathfrak{M}^{(2)} = T\mathcal{F}^{(2)}$. По условию слоения (M, F) и (M, F^{\perp}) параллельны, поэтому из Леммы 2 следует вполне геодезичность слоения (M, F) . По Теореме 2 вполне геодезичность слоения (M, F) влечет вполне геодезичность слоения $(G(F), F^{(2)})$, а согласно [11, Теорема 2] псевдоримановость (M, F) влечет псевдоримановость слоения $(G(F), F^{(2)})$, поэтому благодаря Лемме 2 дополнительные по ортогональности слоения $F^{(2)}$ и $\mathcal{F}^{(2)}$ на графике $(G(F), d)$ параллельны. Аналогично доказывается параллельность пары дополнительных по ортогональности слоений $(F^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)})$. Таким образом, утверждения 2 и 3 доказаны.

Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $f : \widetilde{G(F)} \rightarrow G(F)$. Так как $\mathfrak{N} = TF^{\mathfrak{N}}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $(G(M), \mathbb{F})$, то по Теореме 5 $\widetilde{G(F)} = \widetilde{L}^{\mathfrak{N}} \times \widetilde{\mathbb{L}}$ — произведение односвязных многообразий, причем $f^*F^{\mathfrak{N}} = \{\widetilde{L}^{\mathfrak{N}} \times \{v\} \mid v \in \widetilde{\mathbb{L}}\}$ и $f^*\mathbb{F} = \{\{u\} \times \widetilde{\mathbb{L}} \mid u \in \widetilde{L}^{\mathfrak{N}}\}$. Из Теоремы 2 следует, что $\widetilde{\mathbb{L}} \cong \widetilde{L}_0 \times \widetilde{L}_0$, где $f|_{\widetilde{L}_0} : \widetilde{L}_0 \rightarrow L_0$ — универсальное накрывающее отображение для L_0 . Таким образом, $\widetilde{G(F)} \cong \widetilde{L}^{\mathfrak{N}} \times \widetilde{L}_0 \times \widetilde{L}_0$. Поскольку двуслоение $(\mathcal{F}^{(2)}, F^{(2)})$ покрыто произведением $(\widetilde{L}^{\mathfrak{N}} \times \widetilde{L}_0) \times \widetilde{L}_0$, то, согласно Теореме 5, $TF^{(2)}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения $(G(F), \mathcal{F}^{(2)})$ и наоборот, $T\mathcal{F}^{(2)}$ — интегрируемая связность Эресмана для $(G(F), F^{(2)})$. Аналогично, $TF^{(1)}$ — интегрируемая связность Эресмана для $(G(F), \mathcal{F}^{(1)})$ и наоборот. Отсюда вытекает утверждение 4 доказываемой теоремы. \square

7. ДВА КЛАССА ИССЛЕДУЕМЫХ СЛОЕНИЙ

7.1. Доказательство предложения 4. Семейство кусочно гладких геодезических любого псевдориманова многообразия образует систему путей в смысле [18]. Следовательно, на каждом слое (L_{α}, g) слоения (M, F) определена система путей. В силу полноты индуцированной метрики на слоях, аффинный параметр на каждой геодезической, лежащей в слое, изменяется на всей числовой прямой. Это означает полноту указанной системы путей. Согласно Лемме 1 и [16, Предложение 2.7] благодаря вполне геодезичности слоения (M, F) , для любой интегральной кривой σ распределения \mathfrak{M} локальный горизонтальный голономный диффеоморфизм $\Phi_{\sigma} : U_0 \rightarrow U_1$ является изометрией. Следовательно, Φ_{σ} отображает геодезическую в геодезическую с сохранением параметра. Это означает, что слоение (M, F) \mathfrak{M} -согласовано с системами путей на слоях, поэтому из [18, Теорема 6.1] вытекает, что \mathfrak{M} — связность Эресмана для слоения (M, F) .

7.2. Надстроечные слоения над псевдоримановыми многообразиями. *Надстроечные слоения.* Пусть (B, g^B) — произвольное m -мерное псевдориманово многообразие и T — любое гладкое q -мерное многообразие. Предположим, что задан гомоморфизм $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(T)$ группы $G = \pi_1(B, b)$ в группу $\text{Diff}(T)$ диффеоморфизмов многообразия T . Пусть группа G действует справа как группа накрывающих преобразований на универсальном накрывающем пространстве \widehat{B} . Тогда равенство $f(x, t, g) = (x \cdot g, \rho(g^{-1})(t))$, где $(x, t, g) \in \widehat{B} \times T \times G$, определяет правое

действие группы G на произведении многообразий $\widehat{B} \times T$. Фактор-отображение $f : \widehat{B} \times T \rightarrow M$ на фактор-многообразии $M := (\widehat{B} \times T)/G$ индуцирует гладкое слоение $F = \{f(\widehat{B} \times \{v\}) \mid v \in T\}$ на M , которое называется *надстроечным* и обозначается через $(M, F) = \text{Sus}(T, B, \rho)$. Проекция $p : M = (\widehat{B} \times T)/G \rightarrow B = \widehat{B}/G$ образует локально тривиальное расслоение, которое называется *ассоциированным*. Группа $\Psi = \rho(\pi_1(B, b))$ называется *структурной группой* надстроечного слоения (M, F) .

7.3. Доказательство предложения 3. Пусть $p : M \rightarrow B$ — ассоциированное расслоение, а \mathfrak{M} — распределение, образованное касательными пространствами к его слоям. Любое векторное поле X на M однозначно представимо в виде $X = X^F + X^{\mathfrak{M}}$, где $X^F \in \mathfrak{X}_F(M)$, $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Пусть g^M — псевдориманова метрика M , не вырождающаяся на слоях слоения (M, F) . Указанная метрика g^M существует, поскольку в качестве g^M можно взять произвольную риманову метрику. Тогда равенство

$$g(X, Y) := (p^*g^B)(X^F, Y^F) + g^M(X^{\mathfrak{M}}, Y^{\mathfrak{M}}) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

определяет псевдориманову метрику g на многообразии M . Из определения метрики g вытекает, что $p : M \rightarrow B$ — псевдориманова субмерсия (M, g) на (B, g^B) . Следовательно, локальные горизонтальные голономные диффеоморфизмы слоения F являются изометриями, поэтому, согласно Предложению 5, F — вполне геодезическое слоение на псевдоримановом многообразии (M, g) . По свойству надстроечного слоения, сужение $p|_{L_\alpha}$ проекции p на произвольный слой L_α слоения F является накрывающим отображением на базу B , следовательно, $p|_{L_\alpha} : L_\alpha \rightarrow B$ — псевдориманово накрывающее отображение. Отсюда вытекает, что слои L_α , наделенные индуцированной псевдоримановой метрикой, являются полными псевдоримановыми многообразиями тогда и только тогда, когда (B, g^B) — полное псевдориманово многообразие.

Полнота метрики g^B нами не предполагается. Таким образом, построено вполне геодезическое слоение (M, F) на псевдоримановом многообразии (M, g) с индуцированной псевдоримановой метрикой на слоях, причем ортогональное q -мерное распределение \mathfrak{M} является интегрируемой связностью Эресмана для этого слоения.

Итак, утверждения 1) – 3) доказаны.

Подчеркнем, что график слоения $G(F)$, вообще говоря, не хаусдорфов. Так как псевдогруппа голономии $\mathcal{H}(F)$ слоения F определяется преобразованиями из группы $\Psi := \rho(\pi_1(B, b)) \subset \text{Diff}(T)$, то, применяя Предложение 1, мы заключаем, что график $G(F)$ хаусдорфов тогда и только тогда, когда группа Ψ квазианалитически действует на T . Это доказывает утверждение 4).

Таким образом, слоения, полученные надстройкой гомоморфизма фундаментальной группы псевдориманова многообразия, принадлежат к исследуемому классу слоений.

Замечание 4. Во введенных выше обозначениях, график $G_{\mathfrak{M}}(F)$ надстроечного слоения (M, F) является хаусдорфовым гладким $(2t + q)$ -мерным многообразием с псевдоримановой метрикой d . Слои канонических проекций p_1 и p_2 — вполне геодезические t -мерные подмногообразия в $(G_{\mathfrak{M}}(F), d)$, изометричные любому слою (L_0, d) с тривиальной группой \mathfrak{M} -голономии слоения (M, F) , если таковой существует. q -мерное распределение \mathfrak{N} , ортогональное индуцированному вполне геодезическому слоению \mathbb{F} , интегрируемо и является касательным к некоторому псевдоримановому слоению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Е. Winkelkemper *The graph of a foliation*// Ann. Global Anal. Geom. V.1, no 3. 1993. P. 51-75.
2. I. Tamura *Topology of foliations: An Introduction*. Translations of Mathematical Monographs. V. 97. AMS. 1992. 193 p.
3. A. Connes *Non-commutative geometry*, Boston: Academic Press. 1994. 654 p.
4. R. Blumenthal, J. Hebda *Ehresmann connections for foliations*// Indiana Univ. Math. J. V.33, no 4. 1984. P. 597-611.

5. R. Blumenthal, J. Hebda *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations*// Quarterly J. Math. Oxford Ser. (2), V. 35, 1984. P. 383–392.
6. Жукова Н.И. *График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев*// Изв. вузов. Матем. № 2. 1994. С. 79–81.
7. Жукова Н.И. *Свойства графиков Эресмановых слоений*// Вестник ННГУ. Сер. Мат. Вып. 1. 2004. С. 73–87.
8. N.I. Zhukova *Singular foliations with Ehresmann connections and their holonomy groupoids*, Banach Center Publ. V.76, 2007. P. 471–490.
9. N.I. Zhukova *Local and global stability of compact leaves and foliations*// J. of Math. Phys., Analysis and Geometry. V. 9, no 3. 2013. P. 400–420.
10. R. A. Wolak *The graph of a totally geodesic foliation*// Annales Polonici Mathematici. V. 60, no 3. 1995. P. 241–247.
11. A.Yu. Dolgonosova, N.I. Zhukova *Pseudo-Riemannian foliations and their graphs* // Lobachevskii Journal of Math. V. 39, no 1. 2018. P. 54–64.
12. B. O’Neill *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York, London: Academic Press. 1983. 483 p.
13. A. Gray *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions*// J. Math. Mech. V. 16. 1967. P. 715–737.
14. G. Baditoiu *Classification of Pseudo-Riemannian submersions with totally geodesic fibres from pseudo-hyperbolic spaces*// Proceedings of the London Math. Soc. V. 105, no 6. 2012. P. 1315–1338.
15. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* **Т. 1**, М.: Наука Пресс. 1981.
16. K. Yokumoto *Mutual exclusiveness along spacelike, timelike, and lightlike leaves in totally geodesic foliations of lightlike complete Lorentzian two-dimensional tori*// Hokkaido Math. J. V. 31, no 3. 2002. P. 643–663.
17. S. Kashiwabara *The decomposition of a differentiable manifolds and its applications*// Tohoku Math. J. (2), V. 11, no 1. 1959. P. 43–53.
18. Жукова Н.И. *Слоения, согласованные с системами путей*// Изв. вузов. Матем. № 7. 1989. С. 5–13.
19. H. Wu *On the de Rham decomposition theorem*// Illinois J. Math. V. 8, no 2. 1964. P. 291–311.

Нина Ивановна Жукова,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Большая Печерская ул., 25/12, ,
603155, Нижний Новгород, Россия
E-mail: nina.i.zhukova@hse.ru