ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 3 (2019). С. 10-29.

УДК 517.984.48

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ

И.Н. БРОЙТИГАМ, Д.М. ПОЛЯКОВ

Аннотация. Статья посвящена определению асимптотического поведения собственных значений – одному из актуальных направлений в исследовании операторов, порожденных трехдиагональными бесконечными блочными матрицами в гильбертовом пространстве бесконечных последовательностей конечномерных векторов с комплексными координатами или дискретных операторов Штурма – Лиувилля. В работе рассматривается класс несамосопряженных операторов с дискретным спектром, которые представляются в виде суммы самосопряженного оператора, играющего роль невозмущенного оператора, и возмущения, являющегося компактным оператором относительно невозмущенного оператора. Для исследования асимптотического поведения собственных значений в статье разрабатывается адаптированная схема абстрактного метода подобных операторов. Основная идея этого подхода заключается в том, что с помощью оператора преобразования подобия изучение спектральных свойств исходного оператора сводится к изучению свойств оператора, который имеет более простую структуру. Используя эту схему, выписываются формулы для асимптотики средних арифметических собственных значений рассматриваемого класса операторов. Отметим, что данный подход существенно отличается от тех, которые использовались ранее. Полученный общий результат применяется к определению собственных значений конкретных операторов. А именно, приводятся формулы для асимптотики собственных значений операторов, порожденных симметрическими и несимметрическими трехдиагональными бесконечными матрицами в скалярном случае, для асимптотики средних арифметических собственных значений операторов, порожденных блочными матрицами со степенным поведением собственных значений невозмущенного оператора и обобщенными якобиевыми матрицами с различным числом ненулевых побочных диагоналей.

Ключевые слова: бесконечные трехдиагональные блочные матрицы, якобиевые матрицы, метод подобных операторов, собственные значения, спектр.

Mathematics Subjects Classifications: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}^m$, $m \geq 1$, — евклидово m-мерное пространство вектор-столбцов со скалярным произведением $(x, y)_{\mathbb{C}^m} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$, где комплексные числа x_i, y_i, $i = 1, \dots, m$, — координаты векторов x и y соответственно. Пусть $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$ — гильбертово пространство бесконечных

I.N. Braeutigam, D.M. Polyakov, Asymptotics of the eigenvalues of infinite block matrices.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и DAAD (грант 1.12791.2018/12.2).
Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00205).
Поступила 18 февраля 2019 г.

последовательностей $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^m$, $u = (u_1, u_2, \ldots)$, $u_n \in \mathbb{C}^m$, $n \in \mathbb{N}$, со скалярным произведением $(u, v)_{l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}^m)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n, v_n)_{\mathbb{C}^m}$.

Рассмотрим бесконечную трехдиагональную блочную матрицу $\mathbf{J}$ вида

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & -\mathcal{B}_1 & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots \\ -\widetilde{\mathcal{B}}_1 & \mathcal{A}_2 & -\mathcal{B}_2 & \mathcal{O} & \ldots \\ \mathcal{O} & -\widetilde{\mathcal{B}}_2 & \mathcal{A}_3 & -\mathcal{B}_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \widetilde{\mathcal{B}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — комплекснозначные матрицы размера $m \times m$, $\mathcal{A}_n$ — самосопряженные матрицы, а $\mathcal{O}$ — нулевая матрица. Отметим, что в литературе матрицу $\mathbf{J}$ также называют бесконечной трехдиагональной матрицей с матричными элементами.

Матрица $\mathbf{J}$ определяет линейный оператор $L : D(L) \subset l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) \to l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$ с областью определения

$$D(L) \ = \ \{u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) : \mathbf{J}u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)\},$$

который действует по формуле

$$(Lu)_n = -\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1} u_{n-1} + \mathcal{A}_n u_n - \mathcal{B}_n u_{n+1}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

для $u \in D(L)$. Отметим, что $\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{O}$ при $n = 1$.

Везде далее будем предполагать, что область определения оператора L совпадает с областью определения блочно-диагонального оператора $L_0 : D(L_0) \subset l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) \to l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$, действующего по формуле $(L_0 u)_n = \mathcal{A}_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$D(L) = D(L_0) = \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) : \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}_n u_n\|^2 < \infty \right\}.$$

Предположим, что все собственные значения оператора L_0 однократные, обозначим через σ_n спектр матриц $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $\sigma_n \cap \sigma_j = \varnothing$, $n \neq j$, и допустим, что

$$d_n = \min_{n \neq j} \operatorname{dist}(\sigma_n, \sigma_j) \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{1}$$

Кроме того, будем считать, что матрицы $\mathcal{B}_n$, $\widetilde{\mathcal{B}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют следующим условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})} < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{B}_n\|^2 \|\mathcal{B}_{n+1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_{n+2}, \sigma_{n+1})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2 \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n+1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{B}_n\|^2 \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})} < \infty. \tag{3}$$

Отметим, что если дополнительно предположить, что $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ совпадает с сопряженной к $\mathcal{B}_n$, то $\mathbf{J}$ становится симметрической матрицей и называется блочной якобиевой матрицей, или якобиевой матрицей с матричными элементами.

Бесконечные трехдиагональные матрицы со скалярными или матричными элементами возникают в различных математических моделях. Например, они являются важными объектами при изучении проблемы моментов (матричной проблемы моментов) [1]–[4], при описании спектральных свойств дифференциальных операторов Шредингера и Дирака с точечными взаимодействиями [5]–[9] и оператора Хилла с тригонометрическими потенциалами [10].

К кругу основных вопросов исследования бесконечных трехдиагональных матриц относится и классификация спектра самосопряженных операторов, порожденных такими матрицами. В частности, задачи, связанные с определением условий на элементы бесконечных трехдиагональных матриц при которых спектр является дискретным или непрерывным, рассматриваются в [11]–[13]. В центре внимания находится также проблема определения собственных значений бесконечных симметрических и несимметрических трехдиагональных матриц или дискретных операторов Штурма-Лиувилля [14]–[21]. Существует несколько подходов к решению этой задачи. Так, в работах [14]–[16] найдена асимптотика собственных значений различных классов якобиевых матриц методом последовательной диагонализации. В [16], помимо вышеуказанного, применялись также метод, основанный на абстрактном результате Г.В. Розенблюма, и подход, базирующийся на построении аналитических моделей. Однако, одним из основных методов здесь является все же метод нахождения собственных значений самосопряженных или несамосопряженных трехдиагональных якобиевых матриц путем приближения их собственными значениями усеченных (конечных) трехдиагональных матриц, применяемый в [17]–[21].

Основной целью данной работы является нахождение асимптотических формул для собственных значений оператора L. В качестве метода исследования мы будем использовать метод подобных операторов [22]–[25], который значительно отличается от вышеперечисленных. Этот подход ранее применялся при вычислении асимптотического поведения собственных значений различных классов дифференциальных операторов с матричными коэффициентами [26]–[28], а также разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом, рассматриваемых в пространстве $l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ [29],[30].

Статья организована следующим образом. В §2 приводятся основные сведения о методе подобных операторов, §3 посвящен предварительному преобразованию подобия для оператора L и получению вспомогательных оценок. Основной результат доказывается в §4, а в §5 приводятся различные примеры.

2. Метод подобных операторов и построение абстрактной схемы исследования

В данном параграфе кратко изложим основные идеи и понятия метода подобных операторов (более подробно см. [22]–[25]). А также построим схему исследования абстрактных операторов, которые по своим свойствам близки к исходному оператору L.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Определение 1. *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$, $UD(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2.*

Преимущество рассмотрения подобных операторов заключается в том, что некоторые их спектральные свойства совпадают ([24, Лемма 1]). В частности, у подобных операторов совпадают спектры.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — замкнутый линейный оператор. Через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначим его спектр и резольвентное множество, а символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ — банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{H}$ и подчиненных оператору A. Рассмотрим далее линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Будем говорить, что B принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если $D(A) \subseteq D(B)$ и величина

$$\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$$

конечна. Эта величина принимается за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$.

Здесь же отметим, что символом C везде далее мы будем обозначать положительные постоянные величины, которые необязательно равны между собой.

Основным объектом дальнейших исследований является оператор $A-B$. При этом оператор A будет играть роль невозмущенного оператора, а B — роль возмущения. Кроме того, предполагается, что необходимые нам спектральные характеристики оператора A хорошо известны. Однако заметим, что в большинстве случаев между операторами A и $A-B$ нет подобия. Чтобы преодолеть это препятствие мы выделим из пространства $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ подпространство $\mathfrak{U}$ такое, что операторы вида $A-\widetilde{B}$, где $\widetilde{B}\in\mathfrak{U}$, имеют несложную структуру и, соответственно, достаточно просты для изучения интересующих нас спектральных свойств. Если при этом оператор $A-B$ подобен оператору $A-\widetilde{B}$, то, согласно определению 1, он обладает теми же свойствами.

Перейдем теперь к формулировке основных определений и теорем метода подобных операторов.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство операторов и $J:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$, $\Gamma:\mathfrak{U}\to\operatorname{End}\mathcal{H}$ — трансформаторы, т. е. линейные операторы в пространстве линейных операторов. Тройку $(\mathfrak{U},J,\Gamma)$ будем называть* допустимой тройкой *для оператора A, а $\mathfrak{U}$ —* пространством допустимых возмущений, *если выполнены следующие условия:*

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$;

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A)\subset D(A)$, $A(\Gamma X)-(\Gamma X)A=X-JX$ для любого $X\in\mathfrak{U}$ и $Y=\Gamma X$ — единственное решение уравнения

$$AY-YA=X-JX, \tag{4}$$

удовлетворяющее условию $JY=O$, где O — нулевой оператор;

4) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X\in\mathfrak{U}$ для всех $X,Y\in\mathfrak{U}$ и существует такая постоянная $\gamma>0$, что $\|\Gamma\|\leqslant\gamma$ и $\max\{\|X(\Gamma Y)\|_*,\|(\Gamma X)Y\|_*\}\leqslant\gamma\|X\|_*\|Y\|_*$;

5) для любого $X\in\mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon\in\rho(A)$, что $\|X(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|<\varepsilon$.

Отметим, что при построении допустимой тройки для конкретных классов операторов в качестве пространства $\mathfrak{U}$ выбирается некоторое удобное банахово или гильбертово пространство. Оператор J строится таким образом, чтобы итоговый оператор возмущения (аналог оператора B) имел достаточно простую структуру. Введение оператора Γ тесно связано с построением оператора преобразования U, который возникает в определении 1. Свойства 3) – 5) допустимой тройки необходимы для разрешимости некоторых нелинейных уравнений, возникающих при осуществлении преобразования подобия. Заметим, что построение допустимой тройки осуществляется не единственным способом. Главными критериями ее выбора является наличие нужных свойств у входящих в нее трансформаторов, а также удобство ее использования.

Перейдем теперь к основной теореме о подобии.

Теорема 1. *Пусть $(\mathfrak{U},J,\Gamma)$ — допустимая тройка для оператора A. Если $B\in\mathfrak{U}$ и выполняется условие*

$$\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\|<\frac{1}{4}, \tag{5}$$

то оператор $A-B$ подобен оператору $A-JX_*$, где оператор $X_*\in\mathfrak{U}$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X=B\Gamma X-(\Gamma X)JB-(\Gamma X)J(B\Gamma X)+B=\Phi(X), \tag{6}$$

рассматриваемого в пространстве $\mathfrak{U}$. Это решение можно найти методом простых итераций, полагая $X_0=O$, $X_1=B$ и т. д. При этом оператор $\Phi:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$ является *сжимающим в шаре* $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \leqslant 3\|B\|_*\}$, *а преобразование подобия оператора* $A - B$ *в оператор* $A - JX_*$ *осуществляет обратимый оператор* $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathcal{H}$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [22, Теорема 1.5] и в [23, Теорема 19.2]. Условие (5) служит условием существования решения нелинейного уравнения (6). Вид этого уравнения непосредственно связан с оператором преобразования $I + \Gamma X_*$. При этом условия 3) – 5) определения 2 гарантируют обратимость этого оператора и его инвариантность относительно области определения оператора A. Таким образом для операторов $A - B$ и $A - JX_*$ выполнены все свойства подобных операторов из определения 1.

Теперь применим описанную общую схему к абстрактным операторам, спектральные свойства которых совпадают со свойствами оператора L.

В качестве невозмущенного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ выберем самосопряженный оператор с дискретным спектром, матричное представление которого имеет блочно-диагональный вид с элементами $\mathcal{A}_n$ в ортонормированном базисе $e_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, пространства $\mathcal{H}$. Предположим, что оператор A имеет однократные собственные значения $\lambda_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда спектр $\sigma(A)$ оператора A допускает представление вида

$$\sigma(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n,$$

где $\sigma_n \cap \sigma_j = \varnothing$, $n \neq j$, $n, j \in \mathbb{N}$, и каждое из множеств σ_n состоит из m элементов. Кроме того, будем предполагать, что спектр оператора A удовлетворяет условию (1).

Символом P_n, $n \in \mathbb{N}$, обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_n. Для любого $x \in \mathcal{H}$ определим его следующим образом

$$P_n x = \sum_{i=1}^{m}(x, e_{n,i})e_{n,i}. \tag{7}$$

Всюду далее через $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ будем обозначать идеал операторов Гильберта-Шмидта с нормой $\|\cdot\|_2$ (см. [31, Гл. 3, §9]). Каждому оператору $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ поставим в соответствие блочную матрицу $X = (X_{nj})$, $n, j \in \mathbb{N}$, составленную из операторов $X_{nj} = P_n X P_j$. Так как проекторы P_n, $n \in \mathbb{N}$, являются ортопроекторами, то норму в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ зададим формулой

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{n,j\in\mathbb{N}} \|P_n X P_j\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Теперь мы готовы перейти к построению допустимой тройки. В качестве пространства допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ выберем пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Введем трансформатор $J : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следующим образом:

$$JX = \sum_{j=1}^{\infty} P_j X P_j, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{8}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим семейство трансформаторов J_k по формуле:

$$J_k X = J(X - P_{(k)}XP_{(k)}) + P_{(k)}XP_{(k)} = P_{(k)}XP_{(k)} + \sum_{j=k+1}^{\infty} P_j X P_j, \tag{9}$$

где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $P_{(k)} = \sum_{l=1}^{k} P_l$. В силу принадлежности X пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ ряды в (8) и (9) являются сходящимися.

Построим теперь оператор $\Gamma : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Для этого обозначим оператор ΓX через Y и рассмотрим блочную матрицу (Y_{nj}), $n, j \in \mathbb{N}$, этого оператора. Обозначим сужение оператора A на подпространство $\mathcal{H}_n$ как $A|\mathcal{H}_n = \mathcal{A}_n I_n$, где $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$, I_n — тождественный оператор в $\mathcal{H}_n$. Тогда уравнение (4) условия 3) определения 2 для матричных элементов Y_{nj} запишется в виде

$$\mathcal{A}_n Y_{nj} - Y_{nj}\mathcal{A}_j = X_{nj}, \quad n \neq j, \quad n, j \in \mathbb{N}.$$

При этом справедливо неравенство

$$\|Y_{nj}\|_2 \leqslant \frac{\|X_{nj}\|_2}{\operatorname{dist}(\sigma_n, \sigma_j)}, \quad Y_{nn} = \mathcal{O}.$$

Семейство трансформаторов Γ_k, $k \in \mathbb{N}$, определим следующим образом

$$\Gamma_k X = \Gamma X - \Gamma(P_{(k)} X P_{(k)}) = \Gamma X - P_{(k)}(\Gamma X) P_{(k)}. \tag{10}$$

Замечание 1. *Отметим, что при таком построении транформаторы J_k и Γ_k, $k \in \mathbb{N}$, образуются "вырезанием" конечномерного блока размера $mk \times mk$, расположенного в левом верхнем углу матричного представления операторов J и Γ. Следовательно, они отличаются от операторов J и Γ на операторы конечного ранга. Кроме того, несложно показать, что $\|\Gamma\|_2 \leqslant C$, поэтому согласно условию (5) норма $\|B\|_2$ должна быть достаточно малой величиной. Введение операторов J_k и Γ_k позволяет снять это ограничение с оператора B.*

Замечание 2. *Непосредственно из вида транформаторов J_k и Γ_k, следует справедливость соотношений*

$$\begin{aligned} &(J_k X) P_n = P_n (JX) P_n = P_n X P_n, \quad \Gamma_k(P_n X P_n) = O, \\ &P_n((J_k X)\Gamma_k Y) P_n = O \end{aligned} \tag{11}$$

для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Итак, мы построили тройку $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$. Теперь, для применения теоремы 1, необходимо показать, что эта тройка является допустимой. Доказательство этого факта мы проведем в следующей лемме, в которой также выпишем оценку, позволяющую снять ограничение на оператор B, упомянутое в замечании 1.

Лемма 1. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для оператора A и постоянная $\gamma = \gamma(k)$ из определения 2 удовлетворяет оценке*

$$\|\Gamma_k\|_2 \leqslant \gamma = d_k^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Проверим все свойства определения 2. Первое свойство выполнено в силу свойств пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Проверим свойство 2). Операторы J_k и Γ_k являются непрерывными трансформаторами по построению. Исходя из формулы (9), имеем

$$\|J_k X\|_2^2 \leqslant \|P_{(k)} X P_{(k)}\|_2^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|P_j X P_j\|_2^2 \leqslant \|X\|_2^2.$$

Причем, если матрица X является блочно-диагональной, т. е. $X = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j X P_j$, то $J_k X = X$. Тогда $\|J_k X\|_2 = \|X\|_2$ и $\|J_k\|_2 = 1$.

Свойства 3) и 5) доказываются по той же схеме, что и [27, Теорема 5].

Докажем свойство 4). Пусть X, $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда, с учетом условия (1), имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n,j=k+1 \\ n\neq j}}^{\infty} \|(X\Gamma_k Y)_{nj}\|_2^2 &\leqslant \|X\|_2^2 \sum_{\substack{n,j=k+1 \\ n\neq j}}^{\infty} \frac{\|Y_{nj}\|_2^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_j)} \\ &\leqslant \Bigg(\min_{\substack{n\neq j \\ n,j\geq k+1}} \operatorname{dist}(\sigma_n, \sigma_j) \Bigg)^{-2} \|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 \leqslant d_k^{-2} \|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 < \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, $X\Gamma_k Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Аналогичным образом доказывается принадлежность оператора $(\Gamma_k Y)X$ пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Кроме того, из оценки (13) непосредственно вытекает неравенство (12).

Таким образом, $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для оператора A. □

Далее, до конца этого параграфа, мы будем предполагать, что возмущение B принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда на основе доказанной леммы 1 и абстрактной теоремы 1 мы можем сформулировать основную теорему о подобии для рассматриваемого оператора $A - B$.

Теорема 2. *Пусть число $k \in \mathbb{N}$ таково, что выполнено условие*

$$\|B\|_2 < \frac{d_k}{4}. \tag{14}$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_k X_*$, где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma_k X - (\Gamma_k X)(J_k B) - (\Gamma_k X)J_k(B\Gamma_k X) + B, \tag{15}$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = O$, $X_1 = B, \dots$. Преобразование подобия оператора $A-B$ в оператор $A-J_k X_*$ осуществляет оператор $I+\Gamma_k X_*$, т. е. имеет место равенство

$$A - B = (I + \Gamma_k X_*)(A - J_k X_*)(I + \Gamma_k X_*)^{-1}.$$

Заметим, что в силу (1) условие (14) этой теоремы выполняется для достаточного большого k.

Сформулированная теорема 2 позволяет получить информацию о представлении спектра оператора $A - B$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор $A - B$ имеет дискретный спектр, который совпадает со спектром оператора*

$$A - J_k X_* = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{n=k+1}^{\infty} P_n X_* P_n. \tag{16}$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\sigma(A - B) = \sigma(A_{(k)}) \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant k+1} \sigma(A_n) \Big) = \sigma_{(k)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant k+1} \sigma_n \Big), \tag{17}$$

где оператор $A_{(k)}$ — сужение оператора $A - J_k X_*$ на инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$ и A_n — сужение оператора $A - J_k X_*$ на $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$. Множества $\sigma_{(k)}$, σ_n, $n \geqslant k+1$, взаимно не пересекаются.

Доказательство. Поскольку оператор A — это оператор с дискретным спектром, а оператор $J_k X_*$ — ограничен, то оператор $A - J_k X_*$ также является оператором с дискретным спектром. По теореме 2 операторы $A - B$ и $A - J_k X_*$ подобны. Следовательно, оператор $A - B$ также является оператором с дискретным спектром и справедливо равенство $\sigma(A - B) = \sigma(A - J_k X_*)$.

Представление (16) непосредственно следует из (9). Кроме того, из теоремы 2 и свойств подобных операторов (см., например, [25, Лемма 1]) заключаем, что оператор $A - J_k X_*$ вида (16) перестановочен со всеми проекторами $P_{(k)}$, P_n, $n \geq k+1$. Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$, $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$, $n \geq k+1$, являются инвариантными для этого оператора. Так как $A - J_k X_*$ имеет дискретный спектр, то для любого $\lambda_0 \in \sigma(A - J_k X_*)$

существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - J_k X_*)x_0 = \lambda_0 x_0$. Таким образом, из вида оператора $J_k X_*$ следуют равенства

$$A_{(k)} P_{(k)} x_0 = \lambda_0 P_{(k)} x_0, \quad A_n P_n x_0 = \lambda_0 P_n x_0,\ n \geq k+1, \tag{18}$$

где $A_{(k)}$ — сужение оператора $A - J_k X_*$ на инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$ и A_n — сужение оператора $A - J_k X_*$ на $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$. Поскольку система проекторов $P_{(k)}$, P_n, $n \geq k+1$, образует разложение единицы, то из (18) следует, что хотя бы один из векторов $P_{(k)}x_0$, $P_n x_0$, $n \geq k+1$, ненулевой. Следовательно, λ_0 — собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов $A_{(k)}$, A_n, $n \geq k+1$. Таким образом, имеет место включение правой части равенства (17) во множество $\sigma(A - J_k X_*) = \sigma(A - B)$. Обратное включение очевидно. Следовательно, справедливо равенство (17). □

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему данного параграфа, которая посвящена получению асимптотических формул для средних арифметических собственных значений оператора $A - B$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (14) и спектр оператора $A - B$ представим в виде (17). Тогда множества σ_n, $n \geq k+1$, содержат не более m элементов и среднее арифметическое каждого из этих множеств совпадает со средним арифметическим собственных значений матрицы $\mathfrak{A}_n$ вида*

$$\mathfrak{A}_n = \mathcal{A}_n - \mathfrak{B}_n + \mathfrak{C}_n. \tag{19}$$

Здесь $\mathcal{A}_n$ — n–й блок в блочно-диагональном представлении оператора A, $\mathfrak{B}_n$ — матрица размера $m \times m$ с элементами $(Be_{n,i}, e_{n,i})$, $i = 1, \ldots, m$, и для матрицы $\mathfrak{C}_n$ имеет место оценка

$$\|\mathfrak{C}_n\| \leqslant \frac{2}{d_n} \|P_n B - P_n B P_n\|_2 \|B P_n - P_n B P_n\|_2,\ n \geq \max\{k+1, n_0\}, \tag{20}$$

где n_0 — это номер, начиная с которого справедливо неравенство
$\|B\|_2 \leqslant \frac{d_n}{6}$.

Доказательство. Применим к обеим частям равенства (15) слева и справа проектор P_n. С учетом замечания 2, получим равенство

$$P_n X_* P_n = P_n B P_n + P_n (B \Gamma_k X_*) P_n. \tag{21}$$

Далее представим оператор $P_n(B\Gamma_k X_*)P_n$ в виде

$$P_n(B\Gamma_k X_*)P_n = P_n(B - J_k B)(\Gamma_k X_*)P_n = (P_n B - P_n B P_n)(\Gamma_k X_*)P_n.$$

Следовательно,

$$\|P_n(B\Gamma_k X_*)P_n\|_2 \leq \|P_n B - P_n B P_n\|_2 \|(\Gamma_k X_*)P_n\|_2. \tag{22}$$

Снова применяя формулы (11), получим $(\Gamma_k X_*)P_n = \Gamma_k(X_* - J_k X_*)P_n$, $n \geq k+1$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|(\Gamma_k X_*)P_n\|_2 \leq \frac{\|X_* P_n - P_n X_* P_n\|_2}{d_n}.$$

Из (21), с учетом замечания 2, следует соотношение

$$P_n X_* P_n = P_n B P_n + P_n B \Gamma_k (X_* - P_n X_* P_n) P_n, \quad n \geqslant k+1.$$

Применим справа к (15) проектор P_n. Справедлива следующая цепочка равенств

$$X_* P_n - P_n X_* P_n = B P_n - P_n B P_n + B \Gamma_k (X_* - P_n X_* P_n) P_n -$$
$$\Gamma_k (X_* - P_n X_* P_n) P_n B P_n - P_n B \Gamma_k (X_* - P_n X_* P_n) P_n.$$

Значит,

$$\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2 \le \|BP_n - P_nBP_n\|_2 + \frac{3}{d_n}\|B\|_2\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2.$$

А следовательно, для $n \in \mathbb{N}$ таких, что выполняется неравенство $\frac{3}{d_n}\|B\|_2 \le \frac{1}{2}$, получаем

$$\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_2 \le 2\|BP_n - P_nBP_n\|_2.$$

Таким образом,

$$\|(\Gamma_k X_*)P_n\|_2 \le \frac{2\|BP_n - P_nBP_n\|_2}{d_n}.$$

Из этой оценки и (22), следует

$$\|P_n(B\Gamma_k X_*)P_n\|_2 \le \frac{2}{d_n}\|P_nB - P_nBP_n\|_2\|BP_n - P_nBP_n\|_2 \tag{23}$$

для $n \ge \max\{k+1, n_0\}$, где n_0 — это номер, начиная с которого справедливо неравенство $\|B\|_2 \le \frac{d_n}{6}$.

Рассматривая сужение оператора $A - J_kX_*$ на $\operatorname{Im} P_n$ и, учитывая равенство (21), получим представление (19). □

3. Предварительное преобразование подобия оператора L

В этом параграфе мы возвращаемся к исследованию оператора L, порожденному бесконечной блочной матрицей $\mathbf{J}$. В качестве пространства $\mathcal{H}$ будет выступать пространство $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$. В роли невозмущенного оператора рассмотрим самосопряженный оператор $L_0 : D(L_0) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, порожденный якобиевой матрицей

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}_2 & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{A}_3 & \mathcal{O} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

с областью определения $D(L_0) = \{u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) \ : \ \mathbf{A}u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)\}$ и действующий по формуле $(L_0u)_n = \mathcal{A}_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in D(L_0)$.

Напомним, что собственные значения оператора L_0 однократны. Как и выше, обозначим через σ_n спектр матрицы $\mathcal{A}_n$ и предположим, что выполняется условие (1). Таким образом, спектр $\sigma(L_0)$ оператора L_0 допускает представление вида

$$\sigma(L_0) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n,$$

где $\sigma_n \cap \sigma_j = \varnothing$, $n \ne j$, $n, j \in \mathbb{N}$, и каждое из множеств σ_n состоит из m — элементов.

Рассмотрим стандартный базис пространства $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$, в котором оператор L_0 представляется матрицей $\mathbf{A}$. А именно, он состоит из векторов

$$e_{n,i} = \{\Delta^i_{n,j}\}_{j=1}^{\infty},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$, $\Delta^i_{n,j} = (0, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^m$ для $j \ne n$, t — символ транспонирования, $\Delta^i_{n,n} = (\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \dots, \delta_{m,i})^t \in \mathbb{C}^m$ и $\delta_{s,i}$ — символ Кронекера.

Как и выше, символом P_n, $n \in \mathbb{N}$, будем обозначать проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_n, который определяется формулой (7).

В качестве возмущения B будет выступать оператор, порожденный бесконечной блочной матрицей

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{B}_1 & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots \\ \widetilde{\mathcal{B}}_1 & \mathcal{O} & \mathcal{B}_2 & \mathcal{O} & \dots \\ \mathcal{O} & \widetilde{\mathcal{B}}_2 & \mathcal{O} & \mathcal{B}_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условия (1) – (3), сформулированные во введении, обеспечивают компактность оператора B относительно оператора L_0 (более подробно см. [32, Ch.14]). А следовательно, оператор $L_0 - B$ имеет дискретный спектр.

Далее, поскольку оператор B не принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то мы не можем применить абстрактную схему, построенную в параграфе 2. В связи с этим сначала необходимо провести предварительное преобразование подобия оператора $L_0 - B$ в оператор $L_0 - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ уже принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Замечание 3. *Непосредственно из вида матрицы* $\mathbf{B}$ *и того, что оператор* J_k*, определенный в (9), является диагонализирующим оператором, следует справедливость равенств* $J_k B = O$ *и* $(\Gamma_k B) J_k B = O$.

Теперь перейдем к лемме, которая позволит нам провести предварительное преобразование подобия.

Лемма 2. *Существует число* $q \in \mathbb{N}$ *такое, что операторы* $B, J_q B, \Gamma_q B$ *удовлетворяют следующим условиям*
(a) $\Gamma_q B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ *и* $\|\Gamma_q B\|_2 < 1$;
(b) $(\Gamma_q B)\mathrm{D}(L_0) \subset \mathrm{D}(L_0)$;
(c) $B\Gamma_q B, (\Gamma_q B) J_q B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;
(d) $L_0(\Gamma_q B)x - (\Gamma_q B)L_0 x = Bx - (J_q B)x,\ x \in \mathrm{D}(L_0)$;
(e) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$ *такое, что* $\|B(L_0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем свойство (a). Обозначим через b_{si}^{lr} величину $(Be_{r,i}, e_{l,s})_{l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}^m)}$, тогда

$$b_{si}^{lr} = \begin{cases} 0, & |r-l| > 1, l = r, \\ \widetilde{b}_{si}^{r}, & l = r+1, \\ b_{si}^{r-1}, & l = r-1, \end{cases} \tag{24}$$

где $\widetilde{b}_{si}^{r}$ — элемент матрицы $\widetilde{\mathcal{B}}_r$ и b_{si}^{r-1} — элемент матрицы $\mathcal{B}_{r-1}$, $s, i = 1, \ldots, m$.

Покажем теперь, что $\Gamma_q B$ является оператором Гильберта-Шмидта. Для этого сначала установим, что ΓB принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Из условия (2) и формулы (24) следует оценка

$$\begin{aligned} \sum_{l,r=1}^{\infty} \sum_{s,i=1}^{m} |(\Gamma B e_{r,i}, e_{l,s})_{l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}^m)}|^2 &\leqslant \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{s,i=1}^{m} \frac{|b_{si}^{r-1}|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_r, \sigma_{r-1})} \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s,i=1}^{m} \frac{|\widetilde{b}_{si}^{r}|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_r, \sigma_{r+1})} &= \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\|\mathcal{B}_{r-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_r, \sigma_{r-1})} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_r\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_r, \sigma_{r+1})} \\ = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{B}_r\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_r\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_r, \sigma_{r+1})} < \infty. \end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, $\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Так как по формуле (10) операторы $\Gamma_q B$, $q \in \mathbb{N}$, отличаются от оператора ΓB на оператор конечного ранга, то $\Gamma_q B$ также являются операторами Гильберта-Шмидта, т. е. $\Gamma_q B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \operatorname{End}\mathcal{H}$. Кроме того, из (10) также следует, что

$$\lim_{q\to\infty} \|\Gamma_q B\|_2^2 = \lim_{q\to\infty} \|\Gamma B - P_{(q)}(\Gamma B)P_{(q)}\|_2^2 = \lim_{q\to\infty} \sum_{\substack{\max\{n,j\} \\ \geqslant q+1}} \|P_n(\Gamma_q B)P_j\|_2^2 = 0.$$

Таким образом, с учетом замечания 2, можно выбрать такое достаточно большое $q \in \mathbb{N}$, для которого справедливо неравенство $\|\Gamma_q B\|_2 \leqslant 1/2 < 1$.

Для доказательства свойств (b) и (d) достаточно повторить рассуждения, проведенные в [24, Лемма 7].

Перейдем к доказательству свойства (c). Используя условие (3) и (24), получаем следующие оценки

$$\sum_{l,r=1}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}|(B\Gamma Be_{r,i},e_{l,s})_{l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}^m)}|^2\leqslant\sum_{r=3}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\frac{|\sum\limits_{h=1}^{m}b_{sh}^{r-2}b_{hi}^{r-1}|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r-1})}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\frac{|\sum\limits_{h=1}^{m}\widetilde{b}_{sh}^{r+1}\widetilde{b}_{hi}^{r}|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}+\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\left|\frac{\sum\limits_{h=1}^{m}\widetilde{b}_{sh}^{r-1}b_{hi}^{r-1}}{\mathrm{dist}(\sigma_r,\sigma_{r-1})}+\frac{\sum\limits_{h=1}^{m}b_{sh}^{r}\widetilde{b}_{hi}^{r}}{\mathrm{dist}(\sigma_r,\sigma_{r+1})}\right|^2$$

$$\leqslant\sum_{r=3}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\frac{\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|b_{sh}^{r-2}|^2\right)\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|b_{hi}^{r-1}|^2\right)}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r-1})}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\frac{\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|\widetilde{b}_{sh}^{r+1}|^2\right)\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|\widetilde{b}_{hi}^{r}|^2\right)}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}$$

$$\leqslant 2\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\frac{\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|\widetilde{b}_{sh}^{r-1}|^2\right)\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|b_{hi}^{r-1}|^2\right)}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r-1})}+2\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s,i=1}^{m}\frac{\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|b_{sh}^{r}|^2\right)\left(\sum\limits_{h=1}^{m}|\widetilde{b}_{hi}^{r}|^2\right)}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}$$

$$=\sum_{r=3}^{\infty}\frac{\|\mathcal{B}_{r-2}\|^2\|\mathcal{B}_{r-1}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r-1})}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r+1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}+2\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r-1}\|^2\|\mathcal{B}_{r-1}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r-1})}$$

$$+2\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\|\mathcal{B}_{r}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}\leqslant C\Bigg(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\|\mathcal{B}_{r}\|^2\|\mathcal{B}_{r+1}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_{r+2},\sigma_{r+1})}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r+1}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\|\mathcal{B}_{r}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{r}\|^2}{\mathrm{dist}^2(\sigma_r,\sigma_{r+1})}\Bigg)<\infty. \tag{26}$$

Отсюда следует что, оператор $B\Gamma B$ является оператором Гильберта-Шмидта, а, значит, и $B\Gamma_q B\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Из замечания 3 следует, что $(\Gamma_q B)J_q B\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Свойство e) следует из самосопряженности оператора L_0, компактности оператора B относительно L_0 и леммы 14.3 книги [32].

□

Следующая лемма посвящена получению дополнительных оценок, которые понадобятся нам при доказательстве основной теоремы в следующем параграфе. Мы приводим эту лемму здесь, поскольку при ее доказательстве используются выкладки, проведенные при проверке свойств a) и c) леммы 2.

Лемма 3. *Имеют место следующие оценки:*

$$\|P_n(\Gamma_q B)\|_2\leqslant d_n^{-1}\Big(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2+\|\mathcal{B}_n\|^2\Big)^{1/2}, \tag{27}$$

$$\|(\Gamma_q B)P_n\|_2\leqslant d_n^{-1}\Big(\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2+\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big)^{1/2}, \tag{28}$$

$$\|P_n(B\Gamma_q B)\|_2\leqslant Cd_n^{-1}\Bigg(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-2}\|^2+\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2$$

$$+\|\mathcal{B}_n\|^2\|\mathcal{B}_{n+1}\|^2+\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2\Bigg)^{1/2}, \tag{29}$$

$$\|(B\Gamma_q B)P_n\|_2 \leqslant Cd_n^{-1}\Big(\|\mathcal{B}_{n-2}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2$$
$$+\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n+1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big)^{1/2}, \tag{30}$$

$$\|P_n(B\Gamma_q B)P_n\|_2 \leqslant Cd_n^{-1}\Big(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big)^{1/2}. \tag{31}$$

Доказательство. Для доказательства оценок (27) и (28) необходимо в (25) в первом случае положить $l = n$, а во втором $r = n$. Таким образом, имеем

$$\|P_n(\Gamma_q B)\|_2^2 \leqslant \frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_{n-1}, \sigma_n)} + \frac{\|\mathcal{B}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})}$$
$$\leqslant d_n^{-2}\Big(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2\Big).$$

$$\|(\Gamma_q B)P_n\|_2^2 \leqslant \frac{\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n-1})} + \frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})}$$
$$\leqslant d_n^{-2}\Big(\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big).$$

Для доказательства оценок (29) и (30) положим в (26) в первом случае $l = n$, а во втором $r = n$. Таким образом,

$$\|P_n(B\Gamma_q B)\|_2^2 \leqslant \frac{\|\mathcal{B}_n\|^2\|\mathcal{B}_{n+1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_{n+2}, \sigma_{n+1})} + 2\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n-1})}$$
$$+ 2\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})} + \frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-2}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n-1})}$$
$$\leqslant 2d_n^{-2}\Big(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-2}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2$$
$$+ \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2\|\mathcal{B}_{n+1}\|^2\Big),$$

$$\|(B\Gamma_q B)P_n\|_2^2 \leqslant \frac{\|\mathcal{B}_{n-2}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n-1})} + 2\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n-1})}$$
$$+ 2\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})} + \frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n+1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})}$$
$$\leqslant 2d_n^{-2}\Big(\|\mathcal{B}_{n-2}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2$$
$$+ \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n+1}\|^2\Big).$$

Полагая в (26) $l = n$ и $r = n$, получим

$$\|P_n(B\Gamma_q B)P_n\|_2^2 \leqslant 2\left(\frac{\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n-1})} + \frac{\|\mathcal{B}_n\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_n, \sigma_{n+1})}\right)$$
$$\leqslant 2d_n^{-2}\Big(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big).$$

$\square$

Справедлива следующая теорема (см. [25, Теорема 2], [24, Теорема 9]).

Теорема 5. *При выполнении условий леммы 2 оператор $L_0 - B$ подобен оператору $L_0 - JB - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$, причем имеет место равенство*

$$(L_0 - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(L_0 - JB - \widetilde{B}).$$

На основании этой теоремы, а также замечания 3 сформулируем первую теорему о подобии.

Теорема 6. *Пусть число $q \in \mathbb{N}$ таково, что выполнено условие*

$$\|\Gamma_q B\|_2 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{32}$$

Тогда оператор $L = L_0 - B$ подобен оператору $L_0 - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и имеет вид

$$\widetilde{B} = (I + \Gamma_q B)^{-1}(B\Gamma_q B). \tag{33}$$

При этом справедливо равенство

$$(L_0 - B)(I + \Gamma_q B) = (I + \Gamma_q B)(L_0 - \widetilde{B}).$$

Из формулы (33), очевидно, следует цепочка равенств

$$\widetilde{B} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_q B)^j\right)(B\Gamma_q B) = B\Gamma_q B - (\Gamma_q B)(I + \Gamma_q B)^{-1}(B\Gamma_q B). \tag{34}$$

Теорема 6 позволяет нам свести изучение оператора L к оператору $L_0 - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ уже принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, для оператора $L_0 - \widetilde{B}$ справедлива общая теория метода подобных операторов, а также построения, сделанные в параграфе 2. Учитывая это, сформулируем вторую теорему о подобии.

Теорема 7. *Существует такое число $k \in \mathbb{N}$, $k \geq q + 1$, что выполнены неравенства (14) и (32). Тогда оператор L подобен оператору вида $L_0 - J_k X_*$, где X_* — решение нелинейного уравнения*

$$X = \widetilde{B}\Gamma_k X - (\Gamma_k X)(J_k \widetilde{B}) - (\Gamma_k X)J_k(\widetilde{B}\Gamma_k X) + \widetilde{B} \tag{35}$$

и оператор $\widetilde{B}$ определен формулой (34).

4. Основной результат

В этом параграфе мы докажем основную теорему об асимптотических формулах для собственных значений оператора L. Для доказательства этой теоремы нам понадобится явный вид матричного представления оператора $J_k(B\Gamma_k B)$, поэтому, прежде чем перейти к доказательству, приведем здесь следующее замечание.

Замечание 4. *Матричное представление оператора $J_k(B\Gamma_k B)$ имеет блочно-диагональный вид и его n–ый блок представляется как*

$$\mathcal{D}_n = \widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{B}_n\widetilde{\mathcal{C}}_n, \tag{36}$$

где элементы матриц $\mathcal{C}_{n-1}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_n$ имеют соответственно вид $c_{ij}^{n-1} = \frac{b_{ij}^{n-1}}{\lambda_i^{n-1} - \lambda_j^n}$ и $\widetilde{c}_{ij}^n = \frac{\widetilde{b}_{ij}^n}{\lambda_i^{n+1} - \lambda_j^n}$, при этом λ_i^n — i–ое собственное значение матрицы $\mathcal{A}_n$, а b_{ij}^{n-1} и $\widetilde{b}_{ij}^n$ — элементы матриц $\mathcal{B}_{n-1}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_n$.

Определение 3. *Для любой ограниченной матрицы $\mathcal{A}$, действующей в $\mathbb{C}^m$, среднее арифметическое ее собственных значений определяется как*

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i,$$

где λ_i — собственные значения матрицы A.

Теорема 8. *Существует такое число $k \in \mathbb{N}$, для которого спектр оператора L представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{n\geqslant k+1}\sigma_n), \tag{37}$$

где $\sigma_{(k)}$ — конечное множество, а σ_n — не более чем m-точечное множество. Каждое из множеств σ_n совпадает со спектром сужения оператора L на подпространство $\operatorname{Im} P_n$, и для среднего арифметического собственных значений $\widehat{\lambda}_n$, $n \geqslant k+1$, множества σ_n имеет место следующее асимптотическое представление

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{m}\mathrm{tr}\ \mathcal{A}_n - \frac{1}{m}\mathrm{tr}\ \mathcal{D}_n + \beta_n, \tag{38}$$

или

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{n,i} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_{n,i} + \beta_n, \tag{39}$$

где последовательность β_n определена в (43), $\mathrm{tr}\ \mathcal{A}_n$, $\mathrm{tr}\ \mathcal{D}_n$ и $\lambda_{n,i}$, $\mu_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — следы и собственные значения матриц $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{D}_n$ соответственно, а матрица $\mathcal{D}_n$ определена в (36).

Доказательство. По теореме 7 оператор L подобен оператору $L_0 - J_kX_*$, где X_* — решение уравнения (35). Тогда, исходя из теоремы 3, спектр оператора L представим в виде

$$\sigma(L) = \sigma(L_0 - J_kX_*) = \sigma(A_{(k)}) \cup (\cup_{n\geqslant k+1}\sigma(A_n)) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{n\geqslant k+1}\sigma_n),$$

где $A_{(k)}$ — сужение оператора $L_0 - J_kX_*$ на $\operatorname{Im} P_{(k)}$ и A_n — сужение оператора $L_0 - J_kX_*$ на $\operatorname{Im} P_n$. Так как размерность пространства $\operatorname{Im} P_{(k)}$ конечна, то $\sigma(A_{(k)}) = \sigma_{(k)}$ — конечное множество. Следовательно, имеет место представление (37).

Теперь докажем формулы (38) и (39). По построению трансформаторов J_k и Γ_k имеем $J_k(\Gamma_kX_*)J_k\widetilde{B} = O$. Учитывая это тождество и используя формулы (33) и (35), оператор $L_0 - J_kX_*$ представим в виде

$$\begin{aligned} L_0 - J_kX_* &= L_0 - J_k(X_* - \widetilde{B} + \widetilde{B}) = L_0 - J_k\widetilde{B} - J_k(X_* - \widetilde{B}) \\ &= L_0 - J_k(B\Gamma_kB) - J_k(\widetilde{B}\Gamma_kX_*) + T, \end{aligned}$$

где оператор T содержит все остаточные члены оператора $\widetilde{B}$.

Воспользуемся теперь теоремой 4. Так как оператор $\widetilde{B}$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то справедлива формула (19) и оценка (20), где роль оператора B играет оператор $\widetilde{B}$.

Вычислим точную оценку в формуле (20). Действуя на (34) справа и слева оператором P_n, а также учитывая равенство $J_kB = O$, имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n =& (B\Gamma_kB)P_n - P_n(B\Gamma_kB)P_n \\ &+ (P_n(\Gamma_kB) - \Gamma_kB)(I + \Gamma_kB)^{-1}(B\Gamma_kB)P_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n\widetilde{B} - P_n\widetilde{B}P_n =& P_n(B\Gamma_kB) - P_n(B\Gamma_kB)P_n \\ &+ P_n(\Gamma_kB)(I + \Gamma_kB)^{-1}((B\Gamma_kB)P_n - B\Gamma_kB). \end{aligned}$$

Оценим по норме обе части полученных равенств. Тогда

$$\begin{aligned}\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \le \|(B\Gamma_k B)P_n\|_2 + \|P_n(B\Gamma_k B)P_n\|_2 \\ + \frac{\|P_n(\Gamma_k B)\|_2 + \|\Gamma_k B\|_2}{1-\|\Gamma_k B\|_2}\|(B\Gamma_k B)P_n\|_2\end{aligned} \tag{40}$$

и

$$\begin{aligned}\|P_n\widetilde{B} - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \le \|P_n(B\Gamma_k B)\|_2 + \|P_n(B\Gamma_k B)P_n\|_2 \\ + \frac{\|P_n(\Gamma_k B)\|_2}{1-\|\Gamma_k B\|_2}(\|(B\Gamma_k B)\|_2 + \|(B\Gamma_k B)P_n\|_2).\end{aligned} \tag{41}$$

Подставляя теперь в (40) и (41) оценки (27)–(31) и учитывая неравенство $\|\Gamma_k B\| \le \frac{1}{2}$, получим

$$\begin{aligned}\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2\|P_n\widetilde{B} - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \le \frac{C}{d_n^2}\Big(\|\mathcal{B}_{n-2}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2\|\mathcal{B}_{n+1}\|^2 \\ +\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-2}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n+1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, из (23) следует оценка

$$\|P_n(\widetilde{B}\Gamma_k X_*)P_n\|_2 \le C\beta_n, \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned}\beta_n = &d_n^{-3}\Big(\|\mathcal{B}_{n-2}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{B}_n\|^2\|\mathcal{B}_{n+1}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\mathcal{B}_{n-1}\|^2 \\ &+ \|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-2}\|^2 + \|\widetilde{\mathcal{B}}_{n+1}\|^2\|\widetilde{\mathcal{B}}_n\|^2\Big).\end{aligned} \tag{43}$$

Непосредственно из вида оператора $J_k(B\Gamma_k B)$ (см. формулу (31)) следует, что средние арифметические его собственных значений имеют порядок $d_n^{-1}(\|\widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}\mathcal{B}_{n-1}\| + \|\mathcal{B}_n\widetilde{\mathcal{B}}_n\|)$, т.е. не входят в остаток, а выделяются отдельным членом в формуле (39).

Так как в конечномерном пространстве спектральный след совпадает с матричным, то среднее арифметическое собственных значений сужения оператора $L_0 - J_k(B\Gamma_k B)$ на подпространство $\operatorname{Im} P_n$ определяется как $\frac{1}{m}\operatorname{tr}\mathcal{A}_n - \frac{1}{m}\operatorname{tr}\mathcal{D}_n$ или, соответственно, $1/m\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_{n,i} - 1/m\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_{n,i}$. Учитывая теперь оценки (23) и (42), получаем справедливость формул (38) и (39).

□

5. Примеры

Предположим сначала, что матрицы $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \widetilde{\mathcal{B}}_n$ размерности 1×1, т.е. $\mathcal{A}_n := a_n$, $\mathcal{B}_n := b_n$, $\widetilde{\mathcal{B}}_n := c_n$ и матрица $\mathbf{J}$ является скалярной бесконечной трехдиагональной матрицей.

1. Следуя работе [14], допустим, что элементы матрицы $\mathbf{J}$ имеют вид

$$a_n = n^2 + c_1 n + c_2 n^{-1} + c_3 n^{-2} + O(n^{-3}),$$

$$b_n = c_n = -g - p_1 n^{-1} - p_2 n^{-2} + O(n^{-3}),$$

где $c_j, p_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$, $b_n \ne 0$. Оператор L, порожденный матрицей $\mathbf{J}$, имеет дискретный спектр. Выпишем асимптотику его собственных значений. Очевидно, что собственные значения оператора L_0, порожденного матрицей $\mathbf{A}$ (см. §3), имеют вид

$\lambda_n = n^2 + c_1 n + c_2 n^{-1} + c_3 n^{-2} + O(n^{-3})$. Для того чтобы непосредственно применить теорему 8, нам необходимо проверить выполнение условий (2) и (3). Очевидно, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(g + p_1 n^{-1} + p_2 n^{-2} + O(n^{-3}))^2}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2}$$

сходится. Таким образом, выполнено условие (2). Теперь проверим условие (3). Имеют место соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 b_{n+1}^2}{(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 b_{n+1}^2}{(\lambda_n - \lambda_{n+1})^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 b_n^2}{(\lambda_n - \lambda_{n+1})^2} \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^4}{(2n + 1 + c_1 - c_2 n^{-1}(n+1)^{-1} + O(n^{-3}))^2} \leqslant C g^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} < \infty.$$

Таким образом, мы можем применить теорему 8. Тогда собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$ оператора L допускают следующее асимптотическое представление

$$\widetilde{\lambda}_n = \lambda_n - \mu_n + O(n^{-3}),$$

где $\mu_n = \frac{b_{n-1}^2}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} + \frac{b_n^2}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ (см. (36)). Подставляя в это выражение исходные значения, получим окончательную асимптотическую формулу

$$\widetilde{\lambda}_n = n^2 + c_1 n + c_2 n^{-1} + c_3 n^{-2} + \frac{g^2}{2} n^{-2} + O(n^{-3}).$$

Эта формула соответствует результату теоремы 3.1 работы [14].

2. Предположим, что элементы бесконечной трехдиагональной матрицы $\mathbf{J}$ удовлетворяют следующим условиям:

a) $a_n \in \mathbb{R}$, $|a_n| \to \infty$ при $n \to \infty$,

b) $(|b_n| + |c_{n-1}|)/a_n \to 0$ при $n \to \infty$,

c) $b_n \neq 0$, $c_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

тогда оператор L, порожденный $\mathbf{J}$, имеет дискретный спектр, причем все собственные значения этого оператора имеют геометрическую кратность, равную 1 (см. [10]). Если дополнительно предположить, что все числа a_n, $n \in \mathbb{N}$, различны и выполняются условия (2) и (3), а именно, сходятся следующие ряды

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2 + |c_n|^2}{(a_{n+1} - a_n)^2} < \infty$ и

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2 |b_{n+1}|^2}{(a_{n+2} - a_{n+1})^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2 |c_{n+1}|^2}{(a_{n+1} - a_n)^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2 |c_n|^2}{(a_{n+1} - a_n)^2} < \infty$,

тогда, применяя теорему 8, находим асимптотические формулы для собственных значений оператора L

$$\lambda_n = a_n - \frac{c_{n-1} b_{n-1}}{a_{n-1} - a_n} - \frac{b_n c_n}{a_{n+1} - a_n} + \beta_n,$$

где $\beta_n = O\Bigg((a_{n+1} - a_n)^{-3} \Bigg(\sum\limits_{s=0,2} (|b_{n-2+s}|^2 |b_{n-1+s}|^2 + |c_{n-1+s}|^2 |c_{n-2+s}|^2) + \sum\limits_{s=0,1} |c_{n-s}|^2 |b_{n-s}|^2 \Bigg)\Bigg)$.

Отметим, что этот пример позволяет выписать асимптотику собственных значений для некоторых операторов Хилла с тригонометрическим потенциалом, в частности, некоторых операторов Матье (см., например, [21]).

В следующих примерах мы рассматриваем бесконечные блочные трехдиагональные матрицы.

3. Предположим, что собственные значения матриц $\mathcal{A}_n$ представимы в виде $\lambda_{n,i} = c_{n,i} n^{\alpha}(1 + \varepsilon_{n,i})$, $\alpha > 0$, $c_{n,i}$ — некоторые постоянные, которые не зависят от n и $\varepsilon_{n,i} \to 0$ при $n \to \infty$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть, далее, $\widetilde{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B}_n^*$ и $\|\mathcal{B}_n\| = n^{\beta}(1 + \gamma_n)$,

$\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\beta > 0$. Очевидно, что условие (2) справедливо при $\alpha > \beta + \frac{3}{2}$, а условие (3) при $\alpha > 2\beta + \frac{3}{2}$. Таким образом, при $\alpha > 2\beta + \frac{3}{2}$ выполняются оба условия. При этих значениях параметров α и β оператор L с областью определения $D(L) = \{u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}_n u_n\|^2 < \infty\}$, порожденный якобиевой матрицей $\mathbf{J}$, является ограниченным снизу, самосопряженным оператором в пространстве $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m)$. Спектр оператора L состоит из его собственных значений, асимптотическое представление средних арифметических $\widehat{\lambda}_n$ которых, согласно теореме 8, определяется следующим образом

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{m} n^{\alpha} \sum_{i=1}^{m} c_{n,i}(1 + \varepsilon_{n,i}) - \frac{1}{m} \operatorname{tr} \mathcal{D}_n + \beta_n,$$

где матрица $\mathcal{D}_n$ определена в (36), а $\beta_n = O(n^{4\beta - 3\alpha + 3})$.

4. Предположим, что собственные значения матриц $\mathcal{A}_n$ представимы в виде $\lambda_{n,i} = n^{\alpha}(1 + \varepsilon_{n,i})$, $\varepsilon_{n,i} \to 0$ при $n \to \infty$, $i = 1, \dots, m$. Пусть матрицы $\widetilde{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B}_n^*$ являются постоянными матрицами. Тогда условия (2) и (3) выполняются при $\alpha > \frac{3}{2}$. При этом спектр оператора L состоит из его собственных значений, асимптотическое представление средних арифметических $\widehat{\lambda}_n$ которых, согласно теореме 8, определяется следующим образом

$$\widehat{\lambda}_n = n^{\alpha}(1 + \tilde{\varepsilon}_{n,i}) - \frac{1}{m} n^{1-\alpha} \left(\sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{b_{hi}^{n-1}} b_{ih}^{n-1}}{d_{h,i}^{n-1}(1 + \gamma_{h,i}^{n-1})} + \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{b_{hi}^{n}} b_{ih}^{n}}{d_{h,i}^{n}(1 + \gamma_{h,i}^{n})} \right) + \beta_n,$$

где $\overline{b_{hi}^n}$, b_{ih}^n — элементы матриц B_n^* и B_n, соответственно, $\tilde{\varepsilon}_{n,i}, \gamma_{h,i}^{n-1}, \gamma_{h,i}^{n}$ — бесконечно малые последовательности, а $d_{h,i}^{n-1}, d_{h,i}^{n}$ — постоянные числа, независящие от n и возникающие в выражениях $\lambda_{n-1,i} - \lambda_{n,i}$ и $\lambda_{n+1,i} - \lambda_{n,i}$, $\beta_n = O(n^{-3\alpha+3})$.

Следующие два примера посвящены обобщенным якобиевым матрицам. Вначале покажем, что такую матрицу можно представить в виде блочной якобиевой матрицы. А именно, рассмотрим обобщенную якобиевую матрицу размерности $2m$ с вещественными элементами $c_{p,j}$, $p, j \in \mathbb{N}$, при этом $c_{p,j} = c_{j,p}$, $c_{p,j} = 0$, если $|p - j| > m$ и $c_{p,p+m} \neq 0$, т. е. эта матрица имеет $2m + 1$ диагональ, некоторые из которых могут быть нулевыми, кроме двух крайних (см., например, [19], [33]). Очевидно, что такую обобщенную якобиевую матрицу можно представить в виде бесконечной блочной трехдиагональной матрицы $\mathbf{J}$ с матричными элементами $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_n^*$ размера $m \times m$, которые имеют вид

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} c_{nm,nm} & c_{nm,nm+1} & \cdots & c_{nm,(n+1)m-1} \\ c_{nm+1,nm} & c_{nm+1,nm+1} & \cdots & c_{nm+1,(n+1)m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(n+1)m-1,nm} & c_{(n+1)m-1,nm+1} & \cdots & c_{(n+1)m-1,(n+1)m-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} c_{nm,(n+1)m} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{nm+1,(n+1)m} & c_{nm+1,(n+1)m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(n+1)m-1,(n+1)m} & c_{(n+1)m-1,(n+1)m+1} & \cdots & c_{(n+1)m-1,(n+2)m-1} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что оператор L, порожденный данной обобщенной бесконечной якобиевой матрицей, имеет дискретный спектр. Кроме того, все собственные значения $\lambda_{n,i}$, $i = 1, \dots, m$, $n \in \mathbb{N}$, невозмущенного оператора L_0 с областью опеределения $D(L_0) = \{u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^m) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}_n u_n\|^2 < \infty\}$, действующего по формуле $(L_0 u)_n = \mathcal{A}_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in D(L_0)$, различны, и матрицы $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_n^*$ удовлетворяют условиям (2) и (3). Тогда, согласно теореме 8, мы можем определить среднее арифметическое собственных значений оператора L.

5. Допустим, что обобщенная якобиева матрица имеет только три отличные от нуля диагонали (главная и две крайние побочные) и ее элементы удовлетворяют всем условиям, перечисленным выше. Тогда среднее арифметическое собственных значений оператора L определяется по формуле

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_n =&\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} c_{n,m+i} - \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\Bigg(\frac{c^2_{nm+i,(n-1)m+i}}{c_{(n-1)m,(n-1)m+i+1} - c_{nm,nm+i+1}} \\ &+ \frac{c^2_{nm+i,(n+1)m+i}}{c_{(n+1)m,(n+1)m+i+1} - c_{nm,nm+i+1}}\Bigg) + \beta_n,\end{aligned}$$

где β_n определена в (43).

6. Предположим, что обобщенная якобиева матрица имеет пять ненулевых диагоналей, тогда ее можно представить в виде трехдиагональной блочной якобиевой матрицы с матричными элементами размера 2×2, т.е.

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} c_{2n,2n} & c_{2n,2n+1} \\ c_{2n+1,2n} & c_{2n+1,2n+1}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} c_{2n,2(n+1)} & 0 \\ c_{2n+1,2(n+1)} & c_{2n+1,2(n+1)+1}\end{pmatrix}.$$

Допустим, что выполняются все условия, перечисленные выше, и оператор L, порожденный такой обобщенной якобиевой матрицей, имеет дискретный спектр. Очевидно, что собственные значения матрицы $\mathcal{A}_n$ находятся по формуле

$$\lambda_{n,i} = \frac{1}{2}\Big(c_{2n,2n} + c_{2n+1,2n+1} \pm [(c_{2n,2n} - c_{2n+1,2n+1})^2 + 4c_{2n,2n+1}c_{2n+1,2n}]^{1/2}\Big),$$

где $i = 1, 2$. Таким образом, согласно теореме 8, среднее арифметическое собственных значений оператора L имеет вид

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{2}(c_{2n,2n} + c_{2n+1,2n+1}) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{c^2_{2n,2(n-1)+i}}{\lambda_{n-1,i+1} - \lambda_{n,i+1}} + \frac{c^2_{2n+i,2(n+1)+i}}{\lambda_{n+1,i+1} - \lambda_{n,i+1}}\right) + \beta_n,$$

где β_n определена в (43).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г. *Бесконечные J – матрицы и матричная проблема моментов* // ДАН СССР. Т. 69. вып 3. 1949. С. 125–128.
2. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. *Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай* // Матем. заметки. Т. 63. вып 5. 1998. С. 709–716.
3. B. Simon *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator* // Advances in Mathematics. V. 137. 1998. P. 82–203.
4. A.J. Duran, P. Lopez-Rodrigez *The matrix moment problem* // Margarita Mathematica en memoria de Jose Javier Guadalupe (L. Espanol and J. L. Varona, eds.). Universidad de La Rioja. Logrono. 2001. P. 333–348.
5. Костенко А.С., Маламуд М.М., Натягайло Д.Д. *Матричный оператор Шрёдингера с δ - взаимодействиями* // Матем. заметки. Т. 100. вып 1. 2016. С. 59–77.
6. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. *Об индексе дефекта векторного оператора Штурма-Лиувилля* // Матем. заметки. Т. 99. вып 2. 2016. С. 262–277.
7. Бройтигам И.Н., Мирзоев К.А. *О дефектных числах операторов, порожденных якобиевыми матрицами с операторными элементами* // Алгебра и анализ. Т. 30. вып 4. 2018. С. 1–26.

8. V. Budyika, M. Malamud, A. Posilicano *Nonrelativistic Limit for $2p \times 2p$–Dirac Operators with Point Interactions on a Discrete Set* // Russian Journal of Mathematical Physics. V. 24. N 4. 2017. P. 426–435.
9. Будыка В. С., Маламуд М. М., Посиликано А. *К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями*// ДАН. Т. 479. вып 2. 2018. С. 117–125.
10. P. Djakov, B. Mityagin *Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two-term potential* // Journal of Approximation Theory. V. 135. 2005. P. 70–104.
11. P.A. Cojuhari, J. Janas *Discreteness of the spectrum for some unbounded Jacobi matrices* // Acta Sci. Math. (Szeged). V .73. 2007. P. 649–667.
12. P.A. Cojuhari *On the spectrum of a class of block jacobi matrices* // Operator theory, Structed Matrices and Dilations. 2007. P.137–152.
13. S. Kupin, S. Naboko *On the instability of the essential spectrum for block Jacobi matrices* // S. Constr Approx. V. 48. N 3. 2018. P. 473–500.
14. J. Janas, S. Naboko *Infinite Jacobi matrices with unbounded entries: Asymptotics of eigenvalues and the transformation operator approach*// SIAM J. Math. Anal. V. 36. N 2. 2004. P. 643–658.
15. A. Boutet de Monvel, S. Naboko, L. Silva *The asymptotic behaviour of eigenvalues of modified Jaynes–Cummings model* // Asymptotic Analysis. V. 47. N 3-4. 2006. P. 291–315.
16. J.Janas, M. Malejki *Alternative approaches to asymptotic behavior of eigenvalues of some unbounded Jacobi matrices* // Journal of Computational and Applied Mathematics. V. 200. 2007. P. 342–356.
17. M. Malejki *Eigenvalues for some complex infinite tridiagonal matrices* // Journal of Advances in Mathematics and Computer Science. V. 26. N 5. 2018. P. 1–9.
18. M. Malejki *Asymptotics of large eigenvalues for some discrete unbounded Jacobi matrices* // Linear Algebra and its Applications. V. 431. 2009. P. 1952–1970.
19. M. Malejki *Asymptotic behaviour and approximation of eigenvalues for unbounded block Jacobi matrices* // Opuscula Mathematica. V. 30. N 3. 2010. P. 311–330.
20. A. Boutet de Monvel, L. Zielinski *Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices* // Cent. Eur. J. Math. V. 12. N 3. 2014. P. 445–463.
21. Y. Ikebe, N. Asai, Y. Miyazaki, D. Cai *The eigenvalue problem for infinite complex symmetric tridiagonal matrices with application* // Linear Algebra Appl. V. 241–243. 1996. P. 599–618.
22. Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов* // Сиб. матем. журн. Т. 24. вып 1. 1983. С. 21–39.
23. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов*, Изд. ВГУ. Воронеж. 1987.
24. Баскаков А.Г., Поляков Д.М. *Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом* // Матем. сб. Т. 208. вып 1. 2017. С. 3–47.
25. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом* //Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. вып 3. 2011. С. 3–28.
26. Ускова Н.Б. *О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом* // Дифференц. уравнения. Т. 52. вып 5. 2016. С. 579–588.
27. Ускова Н.Б. *О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом* // Уфимск. матем. журн. Т. 7. вып 3. 2015. С. 88–99.
28. Бройтигам И. Н., Поляков Д. М. *Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с матричными коэффициентами* // Дифференц. уравнения. Т. 54. вып 4. 2018. С. 458–474.

29. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. *Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов* // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. вып 3. 2016. С. 101–111.
30. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. *Асимптотика собственных значений разностного оператора с растущим потенциалом и полугруппы операторов* // Математическая физика и компьютерное моделирование. Т. 20. вып 4. 2017. С. 6–17.
31. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М. 1965.
32. P.D. Hislop, I.M. Sigal *Introduction to spectral theory: with applications to Schrödinger operators*, Springer. V. 113. 1996.
33. Чистяков А. Л. *Индексы дефекта J_m —матриц и дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами* // Матем. сб. Т. 85. вып 4. 1971. С. 474–503.

Ирина Николаевна Бройтигам,
Fachhochschule Kiel,
Grüner Kamp,11 ,
24783, Osterrönfeld, Germany
E-mail: `irinadolgih@rambler.ru`

Дмитрий Михайлович Поляков,
Южный математический институт —
филиал Владикавказского научного центра РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: `dmitrypolyakow@mail.ru`