ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 19-35.

УДК 519.633

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.К. БАЗЗАЕВ, И.Д. ЦОПАНОВ

Аннотация. В настоящее время для описания физических систем, обладающих такими свойствами, как степенная нелокальность, долговременная память и фрактальность, возникает дробно-дифференциальное уравнение. При этом порядок дробной производной определяется размерностью фрактала. Дробное математическое исчисление в теории фракталов и физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью, приобретает такое же важное значение, как классический анализ в механике сплошных сред.

В данной работе рассматриваются разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для дифференциальных уравнений с дробной производной по времени и по пространственной переменной. С помощью принципа максимума получены априорные оценки, доказаны устойчивость и равномерная сходимость разностных схем.

Ключевые слова: начально-краевая задача, дифференциальные уравнения дробного порядка, дробная производная Капуто, производная дробного порядка, уравнение медленной диффузии, разностная схема, принцип максимума, устойчивость разностной схемы, равномерная сходимость, априорная оценка, сосредоточенная теплоемкость на границе.

Mathematics Subject Classification: 65M12

Введение

Интегралы и производные нецелого порядка и дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в теоретической физике, механике и прикладной математике. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом для описания физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью. Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью и характеризуются долгосрочной памятью. Дробные интегральные и дробные дифференциальные операторы позволяют описывать некоторые из этих характеристик. Использование дробного математического анализа может быть полезным для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов [1].

Наличие в уравнениях дробной производной по времени интерпретируется как отражение особого свойства описываемого процесса — памяти, или в случае стохастического процесса — немарковости. Дробная производная по координатам обычно отражает самоподобную неоднородность структуры или среды, в которой развивается процесс. Такие

A.K. Bazzaev, I.D. Tsopanov, Difference schemes for partial differential equations of fractional order.

Поступила 31 мая 2018 г.

структуры называют фракталами. При этом порядок дробной производной определяется размерностью фрактала. Простые формулы, связывающие размерность фрактала d_f с порядком дробной производной, получены в работе [2]. В настоящее время в качестве математических моделей физических процессов рассматривают дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков по времени и по пространству [3]–[6].

Для описания структуры неупорядоченных сред и протекающих в них процессов широко используется теория фракталов (см. [7]–[11]). Примерами неупорядоченных сред являются пористые тела. При этом фракталами могут быть поровое пространство, скелет породы, поверхность скелета породы и т.д. В случае когда трещины и сплошные пористые блоки представляются однородными взаимопроникновении континуумами, для описания фильтрации однородной жидкости обычно используется модель Баренблатта-Желтова (см. [12]). В случае когда пространство представляет собой фрактал с размерностью Хаусдорфа-Безиковича d_f, погруженный в сплошную среду с размерностью d $(d > d_f,\ d = 2, 3)$, для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка (см. [13]). Дробно-дифференциальное уравнение возникает также при изучении физических процессов стохастического переноса (см. [8]).

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают также при изучении многих физических процессов [14]–[15], при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде [16].

Перенос, описываемый оператором с дробными производными на больших расстояниях от источников, приводит к иному поведению относительно малых концентраций по сравнению с классической диффузией. Эти малые концентрации или «далекие хвосты распределений» при дробной производной подчинены степенному закону убывания, что заставляет пересмотреть существующие представления о безопасности, базирующиеся на представлениях об экспоненциальной скорости затухания (см. [17], [18]). Как отмечено в [19], дробное исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в механике сплошных сред.

Существуют достаточно много подтверждений тому, что для диффузионного процесса характерно нелинейное нарастание среднего квадратичного отклонения [20]. Нарушения проявляются во многих ситуациях, в том числе при движении частиц в плазме [21], турбулентной диффузии частиц [22]. В качестве математических моделей подобных процессов рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков по пространству и времени [3]–[5]. В работе [6] для численного моделирования аномальной диффузии в многомерной области применяется метод приближенной факторизации. Для первой начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробных порядков по пространству и времени изучена чисто неявная схема на основе метода приближенной факторизации, доказана устойчивость схемы для рассматриваемого класса задач.

В работе [23] рассматривается специальная полудискретная схема на основе метода Галеркина, а также полностью дискретная схема, основанная на методе Кранка–Николсона для первой начально-краевой задачи для одномерного уравнения параболического типа с дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (1, 2)$ по пространственной переменной:

$$u_t - \mathcal{D}_x^{\alpha} u = f,\ x \in D = (0, 1),\ 0 < t \leqslant T,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ 0 < t \leqslant T,$$

$$u(x, 0) = v,\ x \in D.$$

Получены оценки для погрешности в нормах $L_2(D)$ и $H^{\alpha/2}(D)$ для полудискретной схемы и в норме $L_2(D)$ для полностью дискретной схемы.

Вариационная формулировка типа Петрова-Галеркина для одномерных краевых задач с дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ рассматривается в работе [24].

В работе [25] рассматривается уравнение с производной дробного порядка по времени с граничными условиями первого рода

$$\partial_{0t}^{\alpha} u - \Delta u = f,\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T,\ 0 < \alpha < 1,$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0,\ 0 < t \leqslant T, \Omega + \Gamma = \overline{\Omega},$$

$$u(x, 0) = v,\ x \in \Omega.$$

Здесь получен дискретный аналог дробной производной по времени порядка аппроксимации $O(\tau^{2-\alpha})$. Доказана сходимость построенной схемы в норме $L_2(\Omega)$.

В работах [26] и [27] были рассмотрены локально-одномерные схемы (ЛОС) для уравнения диффузии дробного порядка в p-мерном параллелепипеде с краевыми условиями первого и третьего рода соответственно, а в [28] для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью. В этих работах была доказана сходимость ЛОС в равномерной метрике при $1/2 < \alpha \leqslant 1$. В работе [29] построены многомерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка и доказана сходимость разностных схем при всех $\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1$. Работа [30] посвящена рассмотрению локально-одномерных разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами в области сложной формы. Доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

В [31] показано, что для получения априорных оценок при численном решении уравнения диффузии дробного порядка можно применять метод энергетических неравенств.

В работе [32] предложен алгоритм экстраполяционного типа для численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка, основанный на том, что последовательность приближенных решений обладает асимптотическим разложением по отношению к размеру шагу.

Работа [33] посвящена исследованию существования, единственности и устойчивости решения нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка по времени.

В работах [34]–[35] рассматриваются дифференциальные уравнения теплопроводности дробного порядка с краевыми условиями третьего рода.

Работа [36] посвящена численному методу второго порядка точности решения дробного дифференциального уравнения диффузии. Алгоритм численного решения, предложенный в данной работе, основан на классическом методе Кранка-Николсона. Доказывается сходимость предложенного метода.

Принцип максимума для дифференциальной задачи в случае, когда рассматривается уравнение диффузии с дробной производной по времени, установлен в работах Ю. Лучко [37]–[40]. Результаты этих работ использованы в работах [41], [42] для доказательства принципа максимума для дифференциального уравнения дробного (multi-term) порядка.

В работе [43] построены разностные схемы для дифференциальных уравнений в частных производных дробных порядков по времени и по пространству в одномерном и многомерном случаях. В многомерном случае для рассматриваемых задач строятся локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума получены априорные оценки в равномерной метрике, откуда следует сходимость разностных схем.

В работе [44] был предложен дискретный аналог дробной производной Капуто $\partial_{0t}^{\alpha}u$, $\alpha \in (0,1)$, а также показано, что если функция $u(t) \in C^2[0,t]$, то имеет место равенство

$$\partial_{0t_{j+1}}^{\alpha}u = \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}u + O(\tau),$$

где

$\partial_{0t}^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta$ — дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, $\dot u = \partial u/\partial t$,

$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}u$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $\alpha \in (0,1)$,

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right)u_t^s,\ u_t^s = \frac{u^{s+1}-u^s}{\tau}.$$

Позднее в работе [45] была доказана

Лемма 1. *Если $u(t) \in C^3[0,T]$, то*

$$\partial_{0t_{j+1}}^{\alpha}u = \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}u + O\left(\tau^{2-\alpha}\right),\ \alpha \in (0,1). \tag{1}$$

Данная работа посвящена рассмотрению разностных схем повышенного порядка аппроксимации для дифференциальных уравнений дробного порядка.

1. Уравнение диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах

В работе [28] для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода в многомерной области рассматриваются многомерные чисто неявные схемы и локально-одномерные схемы (ЛОС). С помощью принципа максимума для рассматриваемой задачи доказаны устойчивость и равномерная сходимость ЛОС для $1/2 < \alpha \leqslant 1$, α – порядок дробной производной по времени. В работе [46] для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной по пространственной переменной в младших членах также строятся локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума для рассматриваемой задачи также доказываются устойчивость и равномерная сходимость ЛОС при $1/2 < \alpha \leqslant 1$.

1.1. Постановка задачи. В прямоугольнике $Q_T = \{0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 < t \leqslant T\}$ рассматривается третья начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной $\partial_{0x}^{\nu}u$ по пространственной переменной x порядка ν $(0<\nu<1)$ в младших членах:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\partial_{0x}^{\beta}u - q(x,t)u + f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{2}$$

$$\begin{cases} k(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda_-(x,t)u - \mu_-(x,t),\ x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda_+(x,t)u - \mu_+(x,t),\ x=\ell,\ 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{4}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k \leqslant c_1,\ r\leqslant 0,\ |r|\leqslant c_2,\ q>0,\ \lambda_{\pm} \geq \lambda^* > 0,$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \dfrac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}} d\eta$ — дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \partial u/\partial t$, $\partial_{0x}^{\beta} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^x \dfrac{u'(\xi,t)}{(x-\xi)^{\beta}} d\xi$, $0 < \beta < 1$ — дробная производная Капуто порядка β, $0 < \beta < 1$, по переменной x, $u' = \partial u/\partial x$, c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные, $\overline{Q}_T = \{0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

1.2. Разностная схема. В замкнутой области $\overline{Q}_T$ зададим равномерную сетку. Пространственную сетку выберем равномерной с шагом $h = \ell/N$:

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih : i = 0, 1, \ldots, N,\ h = \ell/N\}.$$

При этом будем обозначать ω_h — множество всех внутренних узлов сетки $\overline{\omega}_h$.

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}'_{\tau} = \{0, t_{j+1} = (j+1)\,\tau,\ j = 0, 1,\ \ldots,\ j_0 - 1\}.$$

Будем обозначать ω'_{τ}– множество узлов сетки $\overline{\omega}'_{\tau}$, для которых $t > 0$.

Аналогично ([47], стр. 401) получим для уравнения (2) монотонную схему второго порядка аппроксимации по h, для которой справедлив принцип максимума при любых τ и h. Для этого рассмотрим уравнение (2) с возмущенным оператором $\widetilde{L} = \varkappa \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u$:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \widetilde{L}u + f = 0, \tag{5}$$

где $\varkappa = 1/(1+R)$, $R = 0.5h|r|/k$ — разностное число Рейнольдса.

Аппроксимируем оператор $\widetilde{L}$ при фиксированном $t = \bar{t} = t_{j+1/2}$ разностными оператором

$$\widetilde{\Lambda} u = \varkappa\,(a u_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} u_x + b^- a u_{\bar{x}} - du,$$

где

$$a = A[k(x+ih,\bar{t})],\ d = F[q(x+ih,\bar{t})],$$

$$a^{(+1)} = a(x+ih,\bar{t}),\ b^{\pm} = F[\widetilde{r}^{\pm}(x+ih,\bar{t})],$$

$$\widetilde{r}^{\pm} = \frac{r^{\pm}}{k},\ r^+ = 0.5(r+|r|) \geq 0,\ r^- = 0.5(r-|r|) \leqslant 0,$$

A и F — шаблонные функционалы, используемые для вычисления коэффициентов a, d и φ и обеспечивающие второй порядок аппроксимации. Например, можно положить $b^{\pm} = r^{\pm}/k$.

Дифференциальной задаче (2)—(4) поставим в соответствие чисто неявную разностную схему

$$\begin{gathered} \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} y = \overline{\Lambda} y^{j+1} + \Phi^{j+1}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{6}$$

$$\overline{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x + \dfrac{r_i}{\Gamma(2-\beta)} \sum\limits_{s=0}^{i} (x_{i-s+1}^{1-\beta} - x_{i-s}^{1-\beta}) y_{x,s} - dy,\ x \in \omega_h, \\ \Lambda^- y = \dfrac{\overline{a}^{(1)} y_{x,0} - \overline{\lambda}_- y_0}{0.5h},\ x = 0, \\ \Lambda^+ y = -\dfrac{\overline{a}^{(N)} y_{\bar{x},N} + \overline{\lambda}_+ y_N}{0.5h} + 0,5 h r_N \Delta_{0x_{N-1}}^{\beta} y,\ x = \ell, \end{cases}$$

$$\Phi=\begin{cases}\varphi,\ x\in\omega_h,\\ \dfrac{\overline{\mu}_-}{0.5h},\ x=0,\\ \dfrac{\overline{\mu}_+}{0.5h},\ x=\ell,\end{cases}$$

где

$$\overline{a}^{(1)}=a^{(1)}+\frac{0.5h^{2-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}r_0,\ \overline{a}^{(N)}=a^{(N)}-\frac{0.5h^{2-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}r_N,$$

$$\overline{\lambda}_-=\lambda_-+0.5hd^{(0)},\ \overline{\lambda}_+=\lambda_++0.5hd^{(N)},$$

$$\overline{\mu}_-=\mu_-+0.5hf_0,\ \overline{\mu}_+=\mu_++0.5hf_N,$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}}y=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t^{1-\alpha}_{j-s+1}-t^{1-\alpha}_{j-s}\right)y^s_t,\ y^s_t=\frac{y^{s+1}-y^s}{\tau},$$

$$\Delta^{\beta}_{0x_{N-1}}y=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=1}^{N-1}\left(x^{1-\beta}_{N-s+1}-x^{1-\beta}_{N-s}\right)y_{\overline{x},s},\ y_{\overline{x},s}=\frac{y_s-y_{s-1}}{h}.$$

При условии достаточной гладкости решения и входных данных задачи (2)–(4), согласно лемме 1, разностная схема (6) имеет порядок аппроксимации $O(h^{2-\beta}+\tau^{2-\alpha})$.

1.3. Устойчивость и равномерная сходимость разностной схемы. Справедлива следующая

Теорема 1. *Разностная схема (6) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (6) справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C\leqslant\|y^0\|_C+$$
$$+\frac{1}{\lambda^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(|\overline{\mu}_-(x,t')|+|\overline{\mu}_+(x,t')|\right)+\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\|\varphi^{j'}\|_C, \tag{7}$$

из которой следует сходимость схемы (6) в равномерной метрике со скоростью $O(h^{2-\beta}+\tau^{2-\alpha})$.

Доказательство. Разностную задачу (6) перепишем в виде:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}}y_i=\left(ay^{j+1}_{\overline{x}}\right)_{x,i}+r_i\Delta^{\beta}_{0x,i}y^{j+1}-d_iy^{j+1}_i+\varphi^{j+1}_i, i=1,\dots,N-1, \tag{8}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}}y_0=\frac{\overline{a}^{(1)}y_{x,0}-\overline{\lambda}_-y_0}{0.5h}+\frac{\overline{\mu}_-}{0.5h},\ x=0, \tag{9}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}}y_N=-\frac{\overline{a}^{(N)}y_{\overline{x},N}+\overline{\lambda}_+y_N}{0.5h}+0,5hr_N\Delta^{\beta}_{0x_{N-1}}y+\frac{\overline{\mu}_+}{0.5h},\ x=\ell, \tag{10}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h. \tag{11}$$

Априорную оценку для задачи (8)–(11) получим с помощью принципа максимума, доказанного в ([48], с. 339) для сеточного уравнения общего вида:

$$A(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P),$$

где

$$A(P)>0, B(P,Q)>0,$$

$$D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)\geqslant 0, \tag{12}$$

P,Q – узлы сетки $\overline{\omega}_h$, $Ш'(P)$ – окрестность узла P, не содержащая самого узла P.

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h$, $t \in \omega'_\tau$ – узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega_\tau$, через S – границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x \in \overline{\omega}_h$ и узлов $P(x,t_{j+1})$ при $t_{j+1} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_h$, $j = 0,1,\ldots,j_0$.

Решение задачи (8) — (11) представим в виде суммы

$$y = \overset{*}{y} + \overset{\circ}{y},$$

где $\overset{*}{y}$ — решение однородных уравнений (8) с неоднородными краевыми (11) и однородными начальными условиями (11):

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}\overset{*}{y}_i = \left(a\overset{*}{y}{}^{j+1}_{\overline{x}}\right)_{x,i} + r_i\Delta^\beta_{0x,i}\overset{*}{y}{}^{j+1} - d_i\overset{*}{y}{}^{j+1}_i, i=1,\ldots,N-1, \tag{13}$$

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}\overset{*}{y}_0 = \frac{\overline{a}^{(1)}\overset{*}{y}_{x,0} - \overline{\lambda}_-\overset{*}{y}_0}{0.5h} + \frac{\overline{\mu}_-}{0.5h},\ x=0, \tag{14}$$

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}\overset{*}{y}_N = -\frac{\overline{a}^{(N)}\overset{*}{y}_{\overline{x},N} + \overline{\lambda}_+\overset{*}{y}_N}{0.5h} + 0,5hr_N\Delta^\beta_{0x_{N-1}}\overset{*}{y} + \frac{\overline{\mu}_+}{0.5h},\ x=\ell, \tag{15}$$

$$\overset{*}{y}(x,0) = 0, \tag{16}$$

а $\overset{\circ}{y}$ — решение неоднородных уравнений (8) с однородными краевыми (11) и неоднородными начальными условиями (11):

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}\overset{\circ}{y}_i = \left(a\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{\overline{x}}\right)_{x,i} + r_i\Delta^\beta_{0x,i}\overset{\circ}{y}{}^{j+1} - d_i\overset{*}{y}{}^{j+1}_i - d_i\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_i + \varphi^{j+1}_i, i=1,\ldots,N-1, \tag{17}$$

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}\overset{\circ}{y}_0 = \frac{\overline{a}^{(1)}\overset{\circ}{y}_{x,0} - \overline{\lambda}_-\overset{\circ}{y}_0}{0.5h},\ x=0, \tag{18}$$

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}\overset{\circ}{y}_N = -\frac{\overline{a}^{(N)}\overset{\circ}{y}_{\overline{x},N} + \overline{\lambda}_+\overset{\circ}{y}_N}{0.5h} + 0,5hr_N\Delta^\beta_{0x_{N-1}}\overset{\circ}{y},\ x=\ell, \tag{19}$$

$$\overset{\circ}{y}(x,0) = u_0(x). \tag{20}$$

Задачу (13)–(16) запишем в канонической форме: в точке $P(x_i,t_{j+1}),\ i=1,\ldots,N-1$:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{a_{i+1}+a_i}{h^2} - \frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)}\frac{1}{h^\beta} + d_i\right]\overset{*}{y}{}^{j+1}_i =$$

$$= \frac{a_{i+1}}{h^2}\overset{*}{y}{}^{j+1}_{i+1} + \left[\frac{a_i}{h^2} - \frac{r_i(2-2^{1-\beta})}{\Gamma(2-\beta)h^\beta}\right]\overset{*}{y}{}^{j+1}_{i-1} -$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)h}\sum_{s=1}^{i-2}\left(-x^{1-\beta}_{i-s+1} + 2x^{1-\beta}_{i-s} - x^{1-\beta}_{i-s-1}\right)\overset{*}{y}{}^{j+1}_s -$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)h}\left(x^{1-\beta}_i - x^{1-\beta}_{i-1}\right)\overset{*}{y}{}^{j+1}_0 + \frac{(2-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{*}{y}{}^j_i +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{s=1}^{j-1}\left(-t^{1-\alpha}_{j-s+2} + 2t^{1-\alpha}_{j-s+1} - t^{1-\alpha}_{j-s}\right)\overset{*}{y}{}^s_i +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}(t^{1-\alpha}_{j+1} - t^{1-\alpha}_j)\overset{*}{y}{}^0_i.$$

В точке $P(x_0,t_{j+1}),\ j=1,2,\ldots$:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{\overline{a}^{(1)}}{0.5h^2} + \frac{\overline{\lambda}_-}{0.5h}\right]\overset{*}{y}{}^{j+1}_0 = \frac{\overline{a}^{(1)}}{0.5h^2}\overset{*}{y}{}^{j+1}_0 + \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{*}{y}{}^j_0 +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{s=0}^{j-2}\left(-t_{j-s+1}^{1-\alpha}+2t_{j-s}^{1-\alpha}-t_{j-s-1}^{1-\alpha}\right)\overset{*}{y}{}_0^{s+1}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha})\overset{*}{y}{}_0^{0}+\frac{\overline{\mu}_-}{0.5h}.$$

В точке $P(x_N,t_{j+1}),\ j=1,2,\ldots$:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{\overline{a}^{(N)}}{0.5h}+\frac{\overline{\lambda}_+}{0.5h}\right]\overset{*}{y}{}_N^{j+1}=\left[\frac{\overline{a}^{(N)}}{0.5h}+\frac{0.5hr_N(2^{1-\beta}-1)}{\Gamma(2-\beta)h^\beta}\right]\overset{*}{y}{}_{N-1}^{j+1}+$$

$$+\frac{(2-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{*}{y}{}_N^{j}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{s=1}^{j-1}\left(-t_{j-s+2}^{1-\alpha}+2t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\overset{*}{y}{}_N^{s}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha})\overset{*}{y}{}_N^{0}-\frac{r_N}{\Gamma(2-\beta)h}\sum_{s=1}^{N-2}\left(-x_{i-s+1}^{1-\beta}+2x_{i-s}^{1-\beta}-x_{i-s-1}^{1-\beta}\right)\overset{*}{y}{}_s^{j+1}-$$

$$-\frac{r_N}{\Gamma(2-\beta)h}\left(x_N^{1-\beta}-x_{N-1}^{1-\beta}\right)\overset{*}{y}{}_0^{j+1}.$$

Таким образом $A(P)>0, B(P,Q)>0, D(P)>0$, а значит, для решения $\overset{*}{y}$ задачи (13)–(16) на основании принципа максимума при малых h справедлива оценка

$$\|\overset{*}{y}{}^{j+1}\|_C\leqslant\frac{1}{\lambda^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(|\overline{\mu}_-(x,t')|+|\overline{\mu}_+(x,t')|\right). \tag{21}$$

Переходим к оценке функции $\overset{\circ}{y}$. Уравнение (17) перепишем в виде

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\tau^{1-\alpha}\overset{\circ}{y}{}_t^{j}=\Lambda\overset{\circ}{y}{}^{j+1}+\widetilde{\varphi}^{j+1}, \tag{22}$$

где

$$\widetilde{\varphi}^{j+1}=\varphi^{j+1}-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}_t^{s}.$$

Уравнение (21) приведем к каноническому виду:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{a_{i+1}+a_i}{h^2}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)}\frac{1}{h^\beta}+d_i\right]\overset{\circ}{y}{}_i^{j+1}=$$

$$=\frac{a_{i+1}}{h^2}\overset{\circ}{y}{}_{i+1}^{j+1}+\left[\frac{a_i}{h^2}-\frac{r_i(2-2^{1-\beta})}{\Gamma(2-\beta)h^\beta}\right]\overset{\circ}{y}{}_{i-1}^{j+1}+$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)h}\sum_{s=1}^{i-2}\left(-x_{i-s+1}^{1-\beta}+2x_{i-s}^{1-\beta}-x_{i-s-1}^{1-\beta}\right)\overset{\circ}{y}{}_s^{j+1}-$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)h}\left(x_i^{1-\beta}-x_{i-1}^{1-\beta}\right)\overset{\circ}{y}{}_0^{j+1}+\Phi^{j+1},$$

где

$$\Phi^{j+1}=\frac{(2-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{\circ}{y}{}_i^{j}+\overline{\varphi}^{j+1},$$

$$\overline{\varphi}^{j+1}=\varphi^{j+1}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}_i^{j-1}-$$

$$-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(\overset{\circ}{y}{}_i^{s}-\overset{\circ}{y}{}_i^{s-1}\right).$$

Проверим теперь выполнимость условий теоремы 4 ([48], гл. V. Дополнение, §2, ф. (25)–(27)):
в точке $P_i^{j+1} = P(x_i, t_{j+1})$:

$$A(P_i^{j+1}) = \left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{a_{i+1}+a_i}{h^2} - \frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)}\frac{1}{h^\beta} + d_i\right] > 0,$$

$$B(P_i^{j+1}, Q) = \left\{\frac{a_{i+1}}{h^2}; \left(\frac{a_i}{h^2} - \frac{r_i(2-2^{1-\beta})}{\Gamma(2-\beta)h^\beta}\right);\right.$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)h}\left(-x_{i-s+1}^{1-\beta} + 2x_{i-s}^{1-\beta} - x_{i-s-1}^{1-\beta}\right),\ s = 1, \ldots, i-2; -\frac{r_i}{\Gamma(2-\beta)h}\left(x_i^{1-\beta} - x_{i-1}^{1-\beta}\right);$$

$$D'(P_i^{j+1}) = A(P_i^{j+1}) - \sum_{Q\in Ш'(P_i^{j+1})} B(P_i^{j+1}, Q) = \frac{1+\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha d_i}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

для всех $Q \in Ш'', Q \in Ш'$,

$$\sum_{Q\in Ш''} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{j+1})}\sum_{Q\in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{1+\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha d_i} \leqslant 1, \tag{23}$$

где

$$Ш'_{(P(x,t_{j+1}))} = Ш'_{j+1} + Ш''_j,$$

$$Ш' - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t) \in Ш'_{(P(x,t_j))},$$

$$Ш''_j - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_j) \in Ш'_{(P(x,t_j))}.$$

На основании упомянутой теоремы 4 ([48], гл. V. Дополнение) и в силу (23) получаем оценку:

$$\|\overset{\circ}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \frac{2-2^{1-\alpha}}{1+\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha d_i}\|\overset{\circ}{y}{}^j\|_C + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\|\overline{\varphi}^{j+1}\|_C. \tag{24}$$

Оценим $\|\overline{\varphi}^{j+1}\|_C$, где

$$\overline{\varphi}^{j+1} = \varphi^{j+1} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{s=0}^{j-2}\left(-t_{j-s+1}^{1-\alpha} + 2t_{j-s}^{1-\alpha} - t_{j-s-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{s+1} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\left(t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^0. \tag{25}$$

Из (25) получаем оценку

$$\|\overline{\varphi}^{j+1}\|_C \leqslant \|\varphi^{j+1}\|_C + \frac{2^{1-\alpha}-1}{\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}\max_{0\leqslant s\leqslant j-2}\|\overset{\circ}{y}{}^s\|_C. \tag{26}$$

Следовательно, для $\overset{\circ}{y}$ получаем оценку:

$$\|\overset{\circ}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \|\overset{\circ}{y}{}^0\|_C + \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\|\varphi^{j'}\|_C. \tag{27}$$

Таким образом, из оценок (21) и (27) следует окончательная оценка (7). □

1.4. Уравнение диффузии дробного порядка с конвекцией. При повышении порядка аппроксимации краевых условий третьего рода до $O(h^{2-\beta}+\tau^{2-\alpha})$ получили разностную схему с нелокальным по пространственной переменной x граничным условием, чего не наблюдается в случае, если рассмотреть в задаче (2) — (4) вместо (2) уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{28}$$

где

$$0 < c_1 \leqslant k(x,t) \leqslant c_2,\ 0 < q(x,t) \leqslant c_3,$$
$$r(0,t) \geq 0,\ r(\ell,t) \leqslant 0,\ |r(x,t)| \leqslant c_4,\ \lambda_{\pm} \geq \lambda^* > 0,$$

$c_0,\ c_1$ — положительные постоянные.

Разностная схема для задачи (28), (3), (4) имеет вид:

$$\begin{gathered}\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y = \overline{\Lambda}y^{j+1} + \Phi^{j+1},\\ y(x,0) = u_0(x),\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$\overline{\Lambda}y = \begin{cases}\widetilde{\Lambda}y = \varkappa\left(ay_{\overline{x}}\right)_x + b^{+}a^{(+1)}y_x + b^{-}ay_{\overline{x}} - dy,\ x\in\omega_h,\\ \Lambda^{-}y = \dfrac{\overline{a}^{(1)}y_{x,0} - \overline{\lambda}_{-}y_0}{0.5h},\ x = 0,\\ \Lambda^{+}y = -\dfrac{\overline{a}^{(N)}y_{\overline{x},N} + \overline{\lambda}_{+}y_N}{0.5h},\ x = \ell,\end{cases}$$

где

$$\Phi = \begin{cases}\varphi,\ x\in\omega_h,\\ \dfrac{\overline{\mu}_{-}}{0.5h},\ x = 0,\\ \dfrac{\overline{\mu}_{+}}{0.5h},\ x = \ell,\end{cases}$$

$$\overline{a}^{(1)} = a^{(1)} + 0.5hr_0,\ \overline{a}^{(N)} = a^{(N)} - 0.5hr_N,$$
$$\overline{\lambda}_{-} = \lambda_{-} + 0.5hd^{(0)},\ \overline{\lambda}_{+} = \lambda_{+} + 0.5hd^{(N)},$$
$$\overline{\mu}_{-} = \mu_{-} + 0.5hf_0,\ \overline{\mu}_{+} = \mu_{+} + 0.5hf_N.$$

При условии достаточной гладкости решения и входных данных задачи (28), (3), (4), разностная схема (29) имеет порядок аппроксимации $O(h^2+\tau^{2-\alpha})$.

2. Уравнение теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью

Для уравнения теплопроводности, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины, ставится, например, при $x = 0$ краевое условие вида

$$c_0\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x},\ c_0 = const > 0.$$

Подобные условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью ([49], с. 186), при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость [50].

Похожие задачи возникают также в случае регулирования солевого режима почв, когда расслоение верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка ([51], с. 233). Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе следует задать условие

$$h\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial c}{\partial x},$$

где c — концентрация соли в почвенном растворе, D — коэффициент диффузивности [51].

Прежде чем перейти к постановке задачи, приведем пример [28], где возникает производная дробного порядка на границе без использования концепции фрактала.

На полубесконечной полосе $x > 0,\ 0 < t < T$, рассмотрим задачу:

$$u_t = (ku_x)_x, \tag{30}$$

$$k_1 u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \tag{31}$$

$$u(x,0) = 0, |u(x,t)| \leqslant M,\ 0 < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{32}$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1,\ x \leqslant x_1, \\ k_2,\ x > x_1. \end{cases}$$

В точке разрыва $k(x)$ выполнены условия непрерывности температуры и теплового потока

$$[u]_{x=x_1} = u(x_1+0,t) - u(x_1-0,t) = 0,\ \left[k\frac{du}{dx}\right]_{x=x_1} = 0. \tag{33}$$

Решение задачи (30)–(32) $u = u^+$ в области $x_1 > 0,\ t > 0$ имеет вид

$$u^+(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{k_2\pi}}\int\limits_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\ \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{4k_2(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$\nu(t) = k_2 u_x^+(x_1,t).$$

Отсюда при $x = x_1$ получаем

$$u^+(x_1+0,t) = -\frac{1}{\sqrt{k_2\pi}}\int\limits_0^t \frac{k_2 u_x^+(x_1+0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

На основании (33) из последнего находим

$$u^-(x_1-0,t) = -\frac{1}{\sqrt{k_2\pi}}\int\limits_0^t \frac{k_1 u_x^-(x_1-0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \tag{34}$$

где $u^-(x,t)$ — решение задачи (30)–(32) в области $0 < x < x_1,\ 0 < t \leqslant T$.

Обращая интегральное уравнение Абеля (34), получаем

$$-k_1 u_x^-(x_1-0,\tau) = \sqrt{\frac{k_2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{u^-(x_1,\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau. \tag{35}$$

Таким образом, при вычислении температурного поля в области $0 < x < x_1,\ t > 0$ влияние полубесконечной области $x > x_1,\ t > 0$ можно учесть, поставив при $x = x_1$ нелокальное условие (35) с дробной производной порядка $\alpha = \frac{1}{2}$.

Перейдем теперь к рассмотрению разностной схемы для дифференциального уравнения дробного порядка в случае, когда на границе области задано условие с сосредоточенной теплоемкостью дробного порядка вида

$$c_0\partial_{ot}^\alpha u = k\frac{\partial u}{\partial x},\ c_0 = const > 0,$$

где $\partial_{ot}^\alpha u$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

2.1. Постановка задачи. В прямоугольнике $Q_T = \{0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 < t \leqslant T\}$ рассматривается начально-краевая задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \tag{36}$$

$$\begin{cases} k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_- \partial_{0t}^{\alpha} u + \beta_-(x,t)u - \mu_-(x,t), \ x = 0, \\ -k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_+ \partial_{0t}^{\alpha} u + \beta_+(x,t)u - \mu_+(x,t), \ x = \ell, \end{cases} \tag{37}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{38}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k \leqslant c_1, \ \beta_{\pm\alpha} \geq \beta_* > 0, \ \varkappa_{\pm} = const > 0,$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \dfrac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}} d\eta$ — дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \partial u/\partial t$.

2.2. Разностная схема. Пространственную сетку выберем равномерной с шагом $h = \ell/N$, $\overline{\omega}_h = \{x^i = ih : i = 0, 1, \ldots, N\}$. На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}'_{\tau} = \{0, t_j = j\tau, \ j = 0, 1, \ldots, j_0\},$$

ω'_{τ}— множество узлов сетки $\overline{\omega}'_{\tau}$, для которых $t > 0$.

Используя дискретный аналог (1) регуляризованной дробной производной Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, уравнение (36) аппроксимируем чисто неявной разностной схемой. Тогда получим разностное уравнение:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) y_t^s = \Lambda y^{j+1} + \varphi^{j+1}, \ x \in \omega_h, \tag{39}$$

где

$$\Lambda y = (a y_{\overline{x}})_x, y_t^s = \frac{y^{s+1} - y^s}{\tau}.$$

К уравнению (39) надо присоединить граничные и начальные условия, что будет сделано несколько позже.

Запишем разностный аналог для граничных условий (37):

$$\begin{cases} a^{(1)} y_{x,0}^{j+1} = \varkappa_- \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} y_0^{j+1} + \beta_-(x,t) y_0^{j+1} - \mu_-(x,t), \ x = 0, \\ -a^{(N)} y_{\overline{x},N}^{j+1} = \varkappa_+ \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} y_0^{j+1} + \beta_+(x,t) y_0^{j+1} - \mu_+(x,t), \ x = \ell. \end{cases} \tag{40}$$

Условия (40) имеют порядок аппроксимации $O(h)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h^2 + \tau^{2-\alpha})$ на решениях уравнения (36). Так как

$$k\frac{\partial u}{\partial x} = a^{(1)} u_{x,0}^{j+1} - 0.5h\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u - f^{j+1}\Big)_0 + O(h^2),$$

то

$$a^{(1)} u_{x,0}^{j+1} - 0.5h\Big(\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} u - f^{j+1}\Big)_0 = \varkappa_- \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} u_0 + \beta_- u_0^{j+1} - \mu_- + O(h^2) + O(h\tau^{2-\alpha}). \tag{41}$$

Отбросив в (41) величины порядка малости $O(h^2)$ и $O(h\tau^{2-\alpha})$, после замены u на y, получим

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} y = \frac{a^{(1)} y_{x,0}^{j+1} - \beta_- y_0^{j+1}}{\varkappa_- + 0.5h} + \widetilde{\mu}_-, \ x = 0,$$

$$\widetilde{\mu}_- = \frac{\overline{\mu}_-}{\varkappa_- + 0.5h}, \ \overline{\mu}_- = \mu_- + 0.5hf_0.$$

Аналогично при $x = \ell$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y = -\frac{a^{(N)} y^{j+1}_{\overline{x},N} + \beta_+ y^{j+1}_N}{\varkappa_+ + 0.5h} + \widetilde{\mu}_+, \ x = \ell,$$

$$\widetilde{\mu}_+ = \frac{\overline{\mu}_+}{\varkappa_+ + 0.5h}, \ \overline{\mu}_+ = \mu_+ + 0.5hf_N.$$

Итак, разностный аналог задачи (36)–(38) имеет вид

$$\begin{gathered} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y = \overline{\Lambda} y^{j+1} + \Phi^{j+1}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{42}$$

где

$$\overline{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda y = (a y_{\overline{x}})_x, \ x \in \omega_h, \\ \Lambda^- y = \dfrac{a^{(1)} y^{j+1}_{x,0} - \beta_- y_0}{\varkappa_- + 0.5h}, \ x = 0, \\ \Lambda^+ y^{j+1} = -\dfrac{a^{(N)} y_{\overline{x},N} + \beta_+ y_N}{\varkappa_+ + 0.5h}, \ x = \ell, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi, \ x \in \omega_h, \\ \widetilde{\mu}_-, \ x = 0, \\ \widetilde{\mu}_+, \ x = \ell, \end{cases}$$

$$\widetilde{\mu}_- = \frac{\overline{\mu}_-}{\varkappa_- + 0.5h}, \ \overline{\mu}_- = \mu_- + 0.5hf_0,$$

$$\widetilde{\mu}_+ = \frac{\overline{\mu}_+}{\varkappa_+ + 0.5h}, \ \overline{\mu}_+ = \mu_+ + 0.5hf_{\alpha,N}.$$

2.3. Устойчивость и равномерная сходимость разностной схемы. Справедлива

Теорема 2. *Разностная схема (42) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (42) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \max_{0<t'\leqslant j\tau} \frac{1}{\beta_*} \left(|\overline{\mu}_-(x,t')| + |\overline{\mu}_+(x,t')|\right) + \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^{j} \tau^{\alpha} \|\varphi^{j'}\|_C, \tag{43}$$

из которой следует сходимость схемы (42) в равномерной метрике со скоростью $O(h^2 + \tau^{2-\alpha})$.

Доказательство. В дальнейшем опять же будем пользоваться принципом максимума для решения сеточного уравнения общего вида.

Приведем разностное уравнение и граничные условия (42) к каноническому виду

$$\begin{gathered} \left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^{\alpha}} + \frac{a_{i+1} + a_i}{h^2}\right] y^{j+1}_i = \frac{a_{i+1}}{h^2} y^{j+1}_{i+1} + \frac{a_i}{h^2} y^{j+1}_{i-1} + \frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} y^j_i + \\ + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \Bigg[\left(t^{1-\alpha}_{j+1} - t^{1-\alpha}_j\right) y^0_i + \left(-t^{1-\alpha}_{j+1} + 2t^{1-\alpha}_j - t^{1-\alpha}_{j-1}\right) y^1_i + \ \ldots \ + \\ + \left(-t^{1-\alpha}_3 + 2t^{1-\alpha}_2 - t^{1-\alpha}_1\right) y^{j-1}_i \Bigg] + \varphi^{j+1}, \end{gathered} \tag{44}$$

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^{\alpha}} + \frac{a_1}{(0.5h + \varkappa_-)h} + \frac{\beta_-}{0.5h + \varkappa_-}\right] y^{j+1}_0 =$$

$$= \frac{a_1}{(0.5h+\varkappa_-)h} y_1^{j+1} + \frac{(2-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} y_0^j +$$

$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)y_0^0+\left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)y_0^1+\ \dots\ +$$

$$+\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)y_0^{j-1}\Bigg]+\overline{\mu}_-.$$

Отсюда

$$D(P(x,t_{j+1}))=0,$$

$$D(P(0,t_{j+1}))=\frac{\beta_-}{0.5h+\varkappa_-}.$$

Аналогично, при $x=\ell$ имеем

$$D(P(\ell,t_{j+1}))=\frac{\beta_+}{0.5h+\varkappa_-}.$$

Чтобы получить оценку для решения задачи (42), представим опять решение y в виде суммы

$$y=\overset{*}{y}+\overset{\circ}{y},$$

где $\overset{\circ}{y}$ — решение задачи при $\overline{\mu}_-=\overline{\mu}_+=0$, а $\overset{*}{y}$ — решение задачи при $u_0(x)=0,\ \varphi(x,t)=0$.

На основании теоремы 3 (см. [48], с. 344) для $\overset{*}{y}$ получаем оценку

$$\|\overset{*}{y}^{j+1}\|_C\leqslant\max_{0<t'\leqslant j\tau}\frac{1}{\beta_*}\left(|\overline{\mu}_-(x,t')|+|\overline{\mu}_+(x,t')|\right). \tag{45}$$

Так как $D(P(x,t_{j+1}))=0$, то для оценки $\overset{\circ}{y}$ уравнение (44) перепишем в виде

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{a_{i+1}+a^i}{h^2}\right]\overset{\circ}{y}_i^{j+1}=\frac{a_{i+1}}{h^2}\overset{\circ}{y}_{i+1}^{j+1}+\frac{a_i}{h^2}\overset{\circ}{y}_{i-1}^{j+1}+\frac{(2-2^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{\circ}{y}_i^j+\Phi(P_{j+1}),$$

где

$$\Phi(P)=\varphi^{j+1}+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}_i^0+\left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}_i^1+\ \dots\ +$$

$$+\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}_i^{j-1}\Bigg].$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 (см. [48], с. 347):

$$D'(P)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}>0,\ P=P(x,t_{j+1}),$$

$$A(P)>0,\ B((P),Q)>0$$

для всех $Q\in Ш_j'',\ Q\in Ш'$,

$$\sum_{Q\in Ш_j''}B(P,Q)=\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}>0,$$

$$\frac{1}{D'(P)}\sum_{Q\in Ш_j''}B(P,Q)=2-2^{1-\alpha}\leqslant 1.$$

На основании теоремы 4 (см. [48], с. 347) для $\overset{\circ}{y}$ справедлива оценка

$$\|\overset{\circ}{y}^{j+1}\|_C \leqslant \|\overset{\circ}{y}^{0}\|_C + \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\|\varphi^{j'}\|_C. \tag{46}$$

Из оценок (45) и (46) следует окончательная оценка (43). □

Замечание 1. *Если вместо чисто неявной схемы рассматривать более общее разностное уравнение с весами $\Lambda(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j)$ в правой части (39), то возникнет условие на шаг τ:*

$$\tau \leqslant \frac{(2-2^{1-\nu})h^2}{2c_1\Gamma(2-\nu)(1-\sigma)},\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1,$$

которое при $\nu \to 1$ переходит в известное условие

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2c_1(1-\sigma)},\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Похожие ограничения на шаг τ возникнут также и в ранее рассмотренных задачах в предыдущих пунктах статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасов В.Е. *Модели теоретической физики с интегро - дифференцированием дробного порядка.* М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
2. Шогенов В.Х., Ахкубеков А.А., Ахкубеков Р.А. *Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения* // Изв. вузов. Сев.-Кав. Регион. 2004. № 1. С. 46–49.
3. F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2002. Vol. 4. № 2. P. 153–192.
4. E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi *Uncoupled continuous-time random walks: solution and limiting behaviour of the master equation* // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. P.011107/1–8.
5. Y. Zhang, D.A. Benson, M.M. Meerschaert, H.P. Scheffler *On using random walks to solve the space fractional advectiona-dispersion equations* // J. Stst. Phys. 2006. Vol. 123. № 1. P. 89–110.
6. Абрашина-Жадаева Н.Г., Тимошенко И.А. *Конечно-разностные схемы для уравнения с производными дробных порядков в многомерной области* // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 7. С. 819–825.
7. Динариев О.Ю. *Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин* // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1990. № 5. С. 66–70.
8. Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л., Романов Е.П. *Недебаевская релаксация и диффузия во фрактальном пространстве* // Докл. АН. 1998. Т. 361. № 6. С. 755–758.
9. Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л., Романов Е.П. *Автоволновые процессы при нелинейной фрактальной диффузии* // Докл. АН. 1999. Т. 369. № 3. С. 332–333.
10. Кочубей А.Ю. *Диффузия дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26. С. 660−670.
11. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *Обобщенное уравнение переноса и дробные производные* // Докл. АМАН. 1996. Т. 2. № 1. С. 43−45.
12. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. *Об основных уравнениях фильтрации жидкости в трещиноватых породах* // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545−548
13. Нигматулин Р.Р. *The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry* // Phys. Status Solidi. B. 1986. V. 133. P. 425−430.
14. Чукбар К.В. *Стохастический перенос и дробные производные* // Ж. эксперим. и теор. физ. 1995. Т. 108. Вып. 5 № 11. С. 1875–1884.
15. Головизнин В.М., Короткин И.А. *Методы численных решений некоторых одномерных уравнений с дробными производными* // Дифференц. ур-ния. 2006. Т. 42. № 7. С. 907–913.

16. Нигматулин Р.Р. *Особенности релаксации системы с остаточной памятью* // Физ. твердого тела. 1985. Т.27. № 5. С. 1583–1585.
17. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А. *Численные методы решения уравнения диффузии с дробной производной в одномерном случае:* Препринт IBRAE -2003-12. М.: ИБРАЭ РАН, 2003. 35 с.
18. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрков Ю.П. *Прямые задачи классического переноса радионуклидов в геологических формациях* // Изв. РАН. Энергетика. 2004. № 4. С. 121–130.
19. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* V.: Физматгиз, 2003 г.
20. Учайкин В.В. *К теории аномальной диффузии частиц с конечной скоростью свободного движения* // Теорет. и мат. физ. 1998. Т. 115. № 1. С. 154–160.
21. Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В. *Ускоренная супердиффузия и конечная скорость полетов Леви* // Журн. экспер. и теорет. физ. 2002. Т. 121. Вып. 2. С. 299–307.
22. J. Klafter, M.F. Shlesinger, G. Zumofen *Beyond Brownian Motion* // Phys. Today. 1996. V. 49. № 2. P. 33–39.
23. Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Zhi Zhou *A Petrov-Galerkin finite element method for fractional convection-diffusion equations* // SIAM J. Nummer. Anal. 2014. Vol. 54. № 1. P. 481–503.
24. Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Josef Pasciak, Zhi Zhou *Error analysis of a finite element method for the space-fractional parabolic equation* // SIAM J. Nummer. Anal. 2016. Vol. 52. № 5. P. 2272–2294.
25. B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou *An analysis of the L_1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmoothdata* // IMA J. Numer. Anal. 2015. 33. P. 691–698.
26. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 10. С. 1878–1887.
27. Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. 50:7. С. 1200–1208.
28. Баззаев А.К., Мамбетова А.Б., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Том 52. № 9. С. 1656–1665.
29. Баззаев А.К. *Разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода в многомерной области* // Уфимский матем. журнал. 2013. Том 5. №1. С. 11–16.
30. Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. 56:1. С. 113–123.
31. A.A. Alikhanov *Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings* // Appl. Math. Comput. 2012. 219. P. 3938–3946.
32. K. Diethelm, G. Walz *Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation* // Numer. Algorithms. 1997. 16. P. 231–253.
33. K. Diethelm, N.J. Ford *Analysis of fractional differential equations* // J. Math. Anal. Appl. 2002. 265. P. 229–248.
34. Yu. Povstenko *Axisymmetric Solutions to Fractional Diffusion-Wave Equation in a Cylinder Under Robin Boundary Condition* // Eur. Phys. J.-Spec. 2013. Top. 222:8. P. 1767–1777.
35. Yu. Povstenko *Time-Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Hole Under Robin Boundary Condition* // Fract. Calc. Appl. Anal. 16:2. 2013. P. 354–369.
36. Ch. Tadjeran, M. Meerschaert, H. Scheffler *A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation* // J. of Comput. Phys. (2006). № 213. P. 205–213.
37. Yu. Luchko *Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation* // J. Math. Anal. Appl. (2009). 351. P. 218–223.
38. Yu. Luchko *Boundary Value Problems For The Generalized Time-Fractional Diffusion Equation Of Distributed Order* // Fract. Calc. Appl. Anal. Vol. 12. 2009. № 4. 409–422.

39. Yu. Luchko *Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2011. Vol. 14. № 1. P. 409–422.
40. Yu. Luchko *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equatio* // Comput. and Math. with Applicat. 2010. 59. P. 1766–1772.
41. Juan J. Nieto *Maximum principles for fractional differential equations derived from Mittag–Leffler functions* // Applied Mathematics Letters. 2010. 23. P. 1248–1251.
42. H. Ye, F. Liu, V. Anh, I. Turner *Maximum principle and numerical method for the multi-term time-space Riesz-Caputo fractional differential equations* // Appl. Math. Comput. 2014. 227. P. 531–540.
43. Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений дробного порядка с краевыми условиями III рода* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:1 (2017), 122–132; Comput. Math. Math. Phys., 57:1 (2017), 133–144
44. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. *Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 10. С.1871–1881.
45. Алиханов А.А. *Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:4 (2016), 572–586; Comput. Math. Math. Phys., 56:4 (2016), 561–575
46. Баззаев А.К. *Третья краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области* // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2, С. 5—14.
47. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука. 1977. 656 с.
48. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука. 1973. 415 с.
49. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1996. 724 с.
50. Самарский А.А. *Об одной краевой задаче распространения тепла* // Избр. тр. А.А. Самарского. М.: МАКС Пресс, 2003. С 1–22.
51. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. *Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух.* Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 358 с.

Александр Казбекович Баззаев,
1) Северо-Осетинский гос. университет имени К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44 – 46,
362025, г. Владикавказ, Россия
2) Владикавказский институт управления,
ул. Бородинская, 14,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: al.bazzaev@gmail.ru

Игорь Дзастемирович Цопанов,
Владикавказский институт управления,
ул. Бородинская, 14,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: 55tsopanovig@gmail.com