

ОБ ИЗОМОРФНОСТИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ ДЕЙСТВИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.Б. КЛИМЕНТОВ

Аннотация. Рассматриваются представления «второго рода» для решений общей линейной равномерно эллиптической системы первого порядка в единичном круге $D = \{z : |z| \leq 1\}$ в комплексной записи

$$\mathcal{D}w \equiv \partial_{\bar{z}}w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w} = R(z),$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $q_1(z)$ и $q_2(z)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1, \quad z \in \bar{D},$$

$A(z), B(z), R(z) \in L_p(\bar{D})$, $p > 2$, — также заданные комплексные функции. Представление второго рода основывается на известной формуле Помпейю: если $w \in W_p^1(\bar{D})$, $p > 2$, то

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

откуда для данного решения $w \in W_p^1(\bar{D})$, $p > 2$, при $A(z), B(z), R(z) \in L_p(\bar{D})$ можно записать представление второго рода

$$\Omega(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + TR(z)$$

где $\Omega(w) \equiv w(z) + T(q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w})$.

Установлено, что при определённых предположениях о коэффициентах и свободном члене системы оператор Ω есть изоморфизм банаховых пространств $C_\alpha^k(D)$ и $W_p^k(D)$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $p > 2$. Эти результаты развивают и дополняют работы Б.В. Боярского, где получены представления «первого рода», а также работы автора по представлениям «второго рода» с более сложными операторами.

В качестве следствия свойств оператора Ω получены следующие априорные оценки для норм $\|w\|_{C_\alpha^{k+1}(\bar{D})}$ и $\|w\|_{W_p^k(\bar{D})}$.

Ключевые слова: общая линейная эллиптическая система первого порядка, представление второго рода.

Mathematics Subject Classification: 35C15

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z -плоскости E_z , $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D ; $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

В статье используются следующие функциональные пространства со стандартными нормами в них: $L_p(\bar{D})$ — пространство суммируемых с показателем $p \geq 1$ в \bar{D} функций; $W_p^k(\bar{D})$, $k = 0, 1, \dots$, $p \geq 1$, — класс функций, имеющих в \bar{D} обобщённые в смысле Соболева производные до k -го порядка, суммируемые с показателем p , $W_p^0(\bar{D}) \equiv L_p(\bar{D})$; $C_\alpha^k(\bar{D})$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$, — пространство функций, имеющих непрерывные в \bar{D} частные производные до порядка k , удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α , $C_\alpha^0(\bar{D}) \equiv C_\alpha(\bar{D})$; $L_p(\Gamma)$ и $C_\alpha^k(\Gamma)$ определяются аналогично, но для функций, определённых на Γ . Подробные определения этих пространств и норм в них можно найти в [1].

Замкнутое подпространство голоморфных функций пространства $C_\alpha^k(\bar{D})$ (соответственно $W_p^k(\bar{D})$) будем обозначать $A_\alpha^k(\bar{D}) = A_\alpha^k$ (соответственно $A_p^k(\bar{D}) = A_p^k$). Очевидный смысл имеют обозначения $C_\alpha^k(\bar{G})$, $A_\alpha^k(\bar{G})$ и т. д., если G — некоторая другая область комплексной плоскости.

Также используется пространство $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ следов функций из $W_p^k(\bar{D})$ (подробности см. в п. 2.3).

Рассмотрим в \bar{D} общую эллиптическую систему первого порядка в комплексной записи

$$Dw \equiv \partial_z w + q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_z \bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w} = R(z), \quad (1)$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_z = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$, — производные в смысле Соболева, $q_1(z)$ и $q_2(z)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы (1)

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1, \quad z \in \bar{D}, \quad (2)$$

$A(z)$, $B(z)$, $R(z) \in L_p(\bar{D})$, $p > 2$, — также заданные комплексные функции.

При исследовании решений уравнения (1) важную роль играют различные представления, устанавливающие соответствие между голоморфными функциями и решениями системы. Для непрерывных в \bar{D} решений в частном случае $q_1(z) = q_2(z) \equiv 0$ различными авторами были получены два представления:

для однородной системы представление первого рода

$$w(z) = \Phi(z) \exp \left\{ -T \left(A + B \frac{\bar{w}}{w} \right) \right\} \quad (3)$$

и, для неоднородной системы, представление второго рода

$$w(z) + T(Aw + B\bar{w}) = \Phi(z) + TR(z), \quad (4)$$

где в обоих представлениях $\Phi(z)$ — некоторая голоморфная функция, а

$$Tf(z) = T_D f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad (5)$$

$$\partial_{\bar{z}} T f(z) = f(z)$$

(см. [1], там же библиографию).

Естественно, интересны случаи, когда в этих представлениях по заданной голоморфной функции $\Phi(z)$ можно восстановить решение $w(z)$, т.е. когда представления (3), (4) можно использовать как инструмент для построения решений системы (1), принадлежащих различным функциональным пространствам.

Для представления (3) в [1, гл. 3, §7] доказана биекция между решениями $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$, $p > 2$, и голоморфными функциями класса $A_p^1(\bar{D})$. При этом, если голоморфная функция $\Phi(z)$ имеет произвольные особенности, то из представления (3) также однозначно восстанавливается решение $w(z)$, имеющее соответствующие особенности. Вместе с тем, если коэффициенты A и B достаточно гладкие и голоморфная функция $\Phi(z)$ из какого-либо более узкого, чем $A_p^1(\bar{D})$ класса (например, из $A_\alpha^1(\bar{D})$), то для восстановленного решения гарантируется принадлежность максимум классу $W_p^1(\bar{D})$, где $p > 2$ может быть сколь угодно велико.

Для представления (4) непрерывных в \bar{D} решений картина более полная, а именно, при соответствующих предположениях о коэффициентах A и B (сейчас не будем на них останавливаться), в [1] доказано, что оператор $I + T$ является изоморфизмом банахова пространства $W_p^k(\bar{D})$ либо $C_\alpha^k(\bar{D})$.

Первое фундаментальное исследование решений общей системы (1) было предпринято Б. В. Боярским [2]. Им было получено обобщение представления первого рода (3) и доказана обратимость этого представления при заданной голоморфной функции $\Phi(z)$. Недостатки здесь остались прежние, плюс при любой достаточно «хорошей» голоморфной функции $\Phi(z)$ можно лишь утверждать, что $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$, где $s > 2$ достаточно близко к двум.

Представление второго рода (4) основано на хорошо известных формулах Помпейю [1, с. 41, 57]: если $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$, $p > 2$, то

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \\ w(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}}, \end{aligned} \quad z \in D. \quad (6)$$

В связи с этим для данного решения $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$, $p > 2$, общего уравнения (1) при $A(z), B(z), R(z) \in L_p(\bar{D})$ можно записать представление второго рода

$$\Omega(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + TR(z) \quad (7)$$

где

$$\Omega(w) \equiv w(z) + T(q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_{\bar{z}} \bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w}). \quad (8)$$

При этом естественно возникает вопрос об обратимости оператора Ω .

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $q_1(z), q_2(z) \in C(\bar{D})$, $A(z), B(z) \in L_p(\bar{D})$, $p > 2$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^1(\bar{D})$.*

Теорема 2. *Если $q_1(z), q_2(z), A(z), B(z) \in C_\alpha^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.*

Теорема 3. *Если $q_1(z), q_2(z), A(z), B(z) \in W_p^k(\bar{D})$, $k \geq 1$, $p > 2$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^{k+1}(\bar{D})$.*

Представления второго рода можно выписывать, основываясь на любом операторе «типа T » (т.е., правом обратном к оператору Коши-Римана $\partial_{\bar{z}}$). Аналоги теорем 1 – 3, основанные на более сложном, чем (5), операторе $T_n f(z)$, таком, что $\operatorname{Re}\{z^{-n} T_n f(z)\} = 0$, $z \in \Gamma$, $T_n f(z_m) = 0$, $z_m \in \Gamma$, $m = 1, \dots, n$, получены автором в [3]. Доказательство изоморфности оператора Ω , основанного на более простом операторе T , оказалось заметно сложнее.

Оператор $T_n f(z)$ и результаты работы [3] существенно привязаны к тому, что D — единичный круг. Развитая здесь техника позволяет перенести теоремы 1 – 3 на случай, когда D — односвязная ограниченная область с границей соответствующей гладкости. Чтобы не увеличивать чрезмерно объём статьи, здесь такой перенос не проводится.

Построению решений системы (1) класса $W_p^1(\bar{D})$ при произвольном $p > 2$, в предположениях о коэффициентах, совпадающих с предположениями теоремы 1, посвящены также работы В.С. Виноградова [4], [5]. В этих работах используются не представления второго рода (7), а так же, как и в [2], исключительно двумерные сингулярные интегральные уравнения (без которых, конечно, не обошлось и в настоящей работе). Результаты работы [5] относительно краевой задачи Римана-Гильберта с каноническим краевым условием повторяют соответствующие результаты из [3].

Приведём ещё два простых, но важных следствия теорем 1 – 3.

Теорема 4. *В предположениях теоремы 2 для любой функции $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$, $k \geq 0$, имеет место априорная оценка:*

$$\|w\|_{C_\alpha^{k+1}(\bar{D})} \leq \text{const} \left\{ \|\mathcal{D}w\|_{C_\alpha^k(\bar{D})} + \|w\|_{C_\alpha^{k+1}(\Gamma)} \right\},$$

где const зависит лишь от k , α и норм в $C_\alpha^k(\bar{D})$ коэффициентов оператора \mathcal{D} .

Теорема 5. *В предположениях теорем 1, 3 для любой функции $w(z) \in W_p^k(\bar{D})$, $k \geq 1$ имеет место априорная оценка:*

$$\|w\|_{W_p^k(\bar{D})} \leq \text{const} \left\{ \|\mathcal{D}w\|_{W_p^{k-1}(\bar{D})} + \|w\|_{W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \right\},$$

где const зависит лишь от k , p и норм в $W_p^{k-1}(\bar{D})$ коэффициентов оператора \mathcal{D} при $k > 1$, а при $k = 1$ от p и норм $\|q_1\|_{C(\bar{D})}$, $\|q_2\|_{C(\bar{D})}$, $\|A\|_{L_p(\bar{D})}$, $\|B\|_{L_p(\bar{D})}$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

2.1. Операторы T и Π . Обозначим

$$\Pi f(z) = \partial_z T f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения (по Коши). Справедлива

Лемма 1. *Сингулярный оператор Π непрерывно отображает пространства $C_\alpha^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, и $W_p^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$, в себя. При этом $\|\Pi\|_{L_2} = 1$ и для всякого $q_0 : 0 < q_0 < 1$ найдётся $s_0 = s_0(q_0) > 2$ такое, что $q_0 \|\Pi\|_{L_s} < 1$ при $2 < s < s_0$.*

Замечание 1. *Утверждение об ограниченности Π в $C_\alpha^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, и свойства его нормы в L_s доказаны в [1, гл. 1, §8, §9]. Аккуратное доказательство ограниченности Π в $W_p^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$, можно найти в [6].*

Из (5) и леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 2. *Оператор T непрерывно отображает $C_\alpha^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, в $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ и $W_p^k(\bar{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$, в $W_p^{k+1}(\bar{D})$.*

Очевидно, что аналогичное утверждение справедливо для оператора

$$\bar{T}f(z) = \overline{(Tf(z))}, \quad \partial_z \bar{T}f(z) = f(z).$$

2.2. Сдвиги. Будем говорить, что контур $\mathcal{L} \in C_\alpha^k$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, если существует гомеоморфное отображение $\zeta = f(z)$ окружности Γ на \mathcal{L} класса $C_\alpha^k(\Gamma)$, при этом обратное отображение $z = f^{-1}(\zeta)$ будет класса $C_\alpha^k(\mathcal{L})$. В этом случае отображение $\zeta = f(z)$ (как и обратное) называют диффеоморфизмом класса C_α^k контуров Γ и \mathcal{L} .

Отметим, что если s — длина дуги на Γ , а σ — длина дуги на \mathcal{L} , то при диффеоморфизме имеют место соотношения: $\zeta'_t(t) \neq 0$, где $\zeta'_t = \zeta'_s \cdot s'_t = \zeta'_s \cdot \bar{t}'_s$, t — аффикс точки контура Γ ; и, соответственно, $z'_\tau(\tau) \neq 0$, где $z'_\tau = z'_\sigma \cdot \sigma'_\tau = z'_\sigma \cdot \bar{\tau}'_\sigma$, τ — аффикс точки контура \mathcal{L} .

Обобщая [7, с. 33], для функции $\varphi(\zeta)$, определённой на \mathcal{L} , введём оператор $\mathcal{W}\varphi(t) = \varphi(\zeta(t))$, где $\zeta = \zeta(t)$ — диффеоморфное класса C_α^k , $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, отображение контура Γ на контур $\mathcal{L} \in C_\alpha^k$. Очевидно, \mathcal{W} — линейный, ограниченный, непрерывно обратимый оператор, действующий из $C_\alpha^k(\mathcal{L})$ в $C_\alpha^k(\Gamma)$.

Пусть $\zeta(t)$ — диффеоморфизм класса $C_\alpha^k(\Gamma)$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ контура Γ на контур \mathcal{L} . Обозначим

$$S_\Gamma \varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma, \quad (9)$$

одномерный сингулярный (интегральный) оператор. Аналогично определяется оператор $S_\mathcal{L}$.

Нам будут необходимы следующие свойства суперпозиции

$$\Psi \varphi(t) = (\mathcal{W}S_\mathcal{L}\mathcal{W}^{-1} - S_\Gamma) \varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \varphi(\tau) d\tau,$$

установленные в [8].

Теорема 6. Если $\zeta(t) \in C_\alpha^1(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$, $\mu = \alpha + \beta \leq 2$, то при $\mu < 1$ $\Psi \varphi(t) \in C_\mu(\Gamma)$, причём

$$\|\Psi \varphi(t)\|_{C_\mu(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C_\beta(\Gamma)}, \quad (10)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C_\alpha^1(\Gamma)}$.

Если $\mu = 1$, то $\Psi \varphi(t) \in C_{\mu-\varepsilon}(\Gamma)$ для $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \mu$ с выполнением оценки, аналогичной (10).

Если $\mu > 1$, то $\Psi \varphi(t) \in C_{\mu-1}^1(\Gamma)$, причём

$$\|\Psi \varphi(t)\|_{C_{\mu-1}^1(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C_\beta(\Gamma)}, \quad (11)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C_\alpha^1(\Gamma)}$.

Следствие 1. Если $\zeta(t) \in C_\alpha^1(\Gamma)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in C_\beta^1(\Gamma)$, $0 < \beta \leq 1$, то $\Psi \varphi(t) \in C_\alpha^1(\Gamma)$, причём

$$\|\Psi \varphi(t)\|_{C_\alpha^1(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{C_\beta^1(\Gamma)}, \quad (12)$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C_\alpha^1(\Gamma)}$.

Замечание 2. В работе [8] в формулировке теоремы 6 в качестве кривой \mathcal{L} фигурирует единичная окружность, но в доказательстве это нигде не используется. Очевидно, в вышеприведённой формулировке можно считать \mathcal{L} окружностью, а Γ — её диффеоморфным образом (о замене переменной интегрирования в сингулярном интеграле см., например, [13, с. 31]).

2.3. Пространство $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Следуя [9, гл. 5], обозначим $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, $k \geq 1$, $p > 2$, множество граничных значений (следов) функций из пространства $W_p^k(\bar{D})$. Норму функции $f \in W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ определим как норму в пространстве $W_p^k(\bar{D})$ гармонической в D функции

с граничными значениями на Γ , совпадающими с f . Это банахова норма и сингулярный оператор (9) ограничен в банаховом пространстве $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ (см. [10, гл. 6, § 1]).

Поскольку по теореме вложения Соболева-Кондрашева $W_p^k(\overline{D}) \subset C_\beta^{k-1}(\overline{D})$, $\beta = \frac{p-2}{p}$, имеет место вложение

$$W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma) \subset C_\beta^{k-1}(\Gamma), \quad k \geq 1, \quad p > 2. \quad (13)$$

Обозначим $\mathcal{K}f(z)$ интеграл типа Коши

$$\mathcal{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in D. \quad (14)$$

Имеет место неравенство

$$\|\mathcal{K}f(z)\|_{W_p^k(\overline{D})} \leq \text{const} \|f(t)\|_{W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)}, \quad k \geq 1, \quad p > 2, \quad (15)$$

где const от f не зависит (см. [10, гл. 6, § 1]).

2.4. Средства локализации.

2.4.1. Приграничные области. Имеет место

Лемма 3 ([3]). Пусть $f(x)$ — чётная, монотонно возрастающая при $x > 0$ функция вещественного аргумента x , $f(x) \in C_\gamma^1[-\varepsilon, \varepsilon]$, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$, и $\|f\|_{C_\gamma^1[-\varepsilon, \varepsilon]} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для данной константы $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x)$ продолжима на сегмент $[-1, 1]$ с сохранением чётности, монотонности при $x > 0$ и класса C_γ^1 ; $f(x) \equiv \text{const} > 0$ вблизи точек $x = \pm 1$ и

$$\|f^*\|_{C_\gamma^1[-\varepsilon, \varepsilon]} < \delta,$$

где f^* — продолжение f на $[-1, 1]$.

При этом будет выполнено неравенство

$$\left\| \frac{df^*}{dx} \right\|_{C[-\varepsilon, \varepsilon]} \leq \left. \frac{df^*}{dx} \right|_{x=\varepsilon}.$$

Пусть G — единичный круг $|\zeta| < 1$ в комплексной ζ -плоскости E_ζ . Построим в этой плоскости специальную область G^* с границей \mathcal{L} , задаваемой уравнением

$$\zeta(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

где $\rho(\theta) \in C_\gamma^1(-\infty, \infty)$ — 2π -периодическая функция, $0 < \gamma < 1$.

Функцию $\rho(\theta)$ определим так, чтобы $\rho(0) = 1$, $\rho(\theta) \geq 1$, $\zeta(\theta)$ задавала для $\theta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, окружность радиуса $r > 1$,

$$\begin{aligned} \rho'(\varepsilon) &\geq |\rho'(\theta)|, \quad \theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \\ \|\rho(\theta) - 1\|_{C_\gamma^1[0, 2\pi]} &< \delta, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\delta > 0$ — заданная константа, значение которой уточним ниже.

В силу леммы 3 такая функция $\rho(\theta)$ существует. Переменную точку области G^* обозначим t и положим $\overline{G}^* = G^* \cup \mathcal{L}$.

Справедливо следующее утверждение [11].

Лемма 4. Пусть $f(t) = \zeta$ — конформное отображение области G^* на круг G , $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.

Тогда существует такое (достаточно малое) число $\delta > 0$, что если выполнено второе неравенство (16), то $f \in C_\gamma^1(\overline{G}^*)$ и

$$\|f(t) - t\|_{C_\gamma^1(\overline{G}^*)} \leq M \cdot \delta, \quad (17)$$

где константа M зависит только от γ .

В дальнейшем в (16) число δ предполагаем подходящим для применения леммы 4 и меньшим $1/2M$. Эти предположения с помощью (17) позволяют провести следующую оценку:

$$|1 - |f'(t)|| \leq \|f'(t) - 1\|_{C_\gamma(\overline{G}^*)} \leq \|f(t) - t\|_{C_\gamma^1(\overline{G}^*)} \leq \frac{1}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq |f'(t)| \leq \frac{3}{2}, \quad \forall t \in \overline{G}^*; \\ \frac{1}{2} &\leq \|f'(t)\|_{C_\gamma(\overline{G}^*)} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Будем считать совмещёнными плоскости E_z и E_ζ (а значит, и единичные круги G и D). Пусть $z_0 \in \Gamma = \partial D$. Подвергнем \overline{G}^* преобразованию подобия

$$z = \frac{1}{r} \cdot t \tag{19}$$

и движением расположим образ замкнутой области \overline{G}^* так, чтобы образ точки $t = 1$ совместился с z_0 , а соответствующая часть границы образа \overline{G}^* наложилась на Γ . В силу первого неравенства (16) область G^* перейдёт в подобласть класса C_γ^1 круга D , которую обозначим D_r . Описанное отображение обозначим $z = g(t)$. Конформное отображение

$$\varphi = g \circ f^{-1} : G \rightarrow G^* \rightarrow D_r, \quad z = \varphi(\zeta),$$

по лемме 4 класса $C_\gamma^1(\overline{G})$ и в силу (18), (19)

$$\min_{\zeta \in \overline{G}} |\varphi'(\zeta)| \geq \frac{2}{3r}; \quad \max_{\zeta \in \overline{G}} |\varphi'(\zeta)| \leq \frac{2}{r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty. \tag{20}$$

Из (18) и (20) для $\zeta = \psi(z) = \varphi^{-1}(z)$ будем иметь:

$$\max_{\zeta \in \overline{D}_r} |\psi'(z)| \leq \frac{3r}{2}, \quad \min_{\zeta \in \overline{D}_r} |\psi'(z)| \geq \frac{r}{2}, \tag{21}$$

$$\|\psi'(z)\|_{C_\gamma(\overline{D}_r)} \leq 2r.$$

Ясно, что при $r \rightarrow +\infty$ имеем $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\text{diam } D_r \rightarrow 0$.

Лемма 5. Функция $\omega(z) = \frac{\psi'(z)}{\psi'(z)}$ $\in C_\gamma(\overline{D}_r)$ и $\|\omega(z)\|_{C_\gamma(\overline{D}_r)} \leq \text{const}$, где константа не зависит от r .

Доказательство. Поскольку $|\omega(z)| \equiv 1$, нужно оценить константу Гёльдера этой функции.

Итак, пусть $z_1, z_2 \in \overline{D}_r$. Очевидно соотношение:

$$|\omega(z_1) - \omega(z_2)| = \frac{|(\psi'(z_1) - \psi'(z_2))\overline{\psi'(z_2)} + \psi'(z_2)(\overline{\psi'(z_2)} - \overline{\psi'(z_1)})|}{|\psi'(z_1)| \cdot |\psi'(z_2)|}.$$

Отсюда, с учётом (21), получаем:

$$|\omega(z_1) - \omega(z_2)| \leq \frac{12}{r} |\psi'(z_1) - \psi'(z_2)| \leq 24 \cdot |z_1 - z_2|^\gamma.$$

□

Замечание 3. В вышеприведённых построениях число $\gamma : 0 < \gamma < 1$, может быть выбрано произвольным, не связанным с показателем Гёльдера из формулировки теоремы 2.

Замечание 4. Очевидно, если в качестве области D_r взять круг радиуса $1/r$, содержащийся в D , то оценки (20), (21) и утверждение леммы 5 остаются в силе.

2.4.2. *Разбиение единицы.* Обозначим $\mathcal{U} = \{U_l\}$ конечное покрытие замкнутого круга \bar{D} , $U_l \subset \bar{D}$, состоящее из открытых кругов фиксированного радиуса $1/r$, содержащихся в D , и областей типа D_r , прилегающих к границе Γ и описанных в предыдущем пункте. Число r считаем достаточно большим; насколько оно большое, будем уточнять при использовании покрытия \mathcal{U} .

Через $\mathcal{H} = \{h_l\}$ обозначим разбиение единицы класса C^∞ на \bar{D} , подчинённое покрытию \mathcal{U} , т.е., все функции h_l неотрицательны, $\forall h_l \in C^\infty(\bar{D})$, носитель каждой функции $\text{supp } h_l \subset U_l$ и $\sum_l h_l(z) = 1$ для $\forall z \in \bar{D}$. О существовании такого разбиения единицы см., например, [12, гл. II, § 4].

Лемма 6. Пусть $f(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta < 1$, $\mathcal{K}f(z)$ — интеграл типа Коши (14), h_l — элемент разбиения единицы \mathcal{H} .

Если $\mathcal{K}f(z) \in A_\alpha^k$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ (A_p^{k+1} , $p > 2$), то $\mathcal{K}(h_l f)(z) \in A_\alpha^k$ (A_p^{k+1}).

Доказательство. Ясно, что при $k = 0$, $\alpha \leq \beta$, а также при $\text{supp } h_l \cap \Gamma = \emptyset$ утверждение тривиально. Пусть $\text{supp } h_l \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Рассмотрим выражение

$$h_l(z)\mathcal{K}f(z) - \mathcal{K}(h_l f)(z) = P(z) \in C_\beta(\bar{D}).$$

В силу формул Сохоцкого–Племеля [13, гл. 1, §4] предельные значения функции $P(z)$ при $z \rightarrow \tau \in \Gamma$ имеют вид:

$$P^+(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_l(\tau) - h_l(t)}{t - \tau} \cdot f(t) \cdot dt.$$

Так как $h_l \in C^\infty(\Gamma)$, из формулы Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме с очевидностью следует, что как функция аргумента τ дробь

$$\frac{h_l(\tau) - h_l(t)}{t - \tau} \in C^\infty(\Gamma),$$

т.е., $P^+(\tau) \in C^\infty(\Gamma)$.

Вместе с тем, $h_l(\tau)\mathcal{K}^+f(\tau) \in C_\alpha^k(\Gamma)$ ($W^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$), что влечёт за собой $\mathcal{K}^+(h_l f)(\tau) \in C_\alpha^k(\Gamma)$ ($W^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$), откуда, с учётом свойств интеграла типа Коши (см. [1, гл. 1, §3] и (15)) и формулы Коши для голоморфных функций, получаем утверждение леммы 6. \square

2.5. Регулярность и единственность решений.

Лемма 7. Если в уравнении (1), при выполнении условий эллиптичности (2),

$$q_1(z), q_2(z) \in C_\alpha^{k+1}(D), k \geq 0, 0 < \alpha < 1 \quad (W_p^{k+1}(D), k \geq 0, p > 2),$$

$$A(z), B(z), R(z) \in C_\alpha^k(D), k \geq 0, 0 < \alpha < 1 \quad (W_p^k(D), k \geq 0, p > 2),$$

то любое решение этого уравнения $w(z) \in W_s^1(D)$, $s > 2$, принадлежит классу $C_\alpha^{k+1}(D)$ ($W_p^{k+1}(D)$).

Доказательство этого утверждения по существу содержится в [1, гл. 2, §7; гл. 4, §7].

Лемма 8. Если в уравнении (1), при выполнении условий эллиптичности (2), $q_1(z), q_2(z)$ — измеримые функции, $A(z), B(z) \in L_p(\bar{D})$, $p > 2$, $R(z) \equiv 0$, а граничные значения решения $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$, $s > 2$, равны нулю на множестве положительной линейной меры на Γ , то $w(z) \equiv 0$.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 4.4 работы [2] (см. также [1, гл. 3, §17]).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Схема доказательства следующая. Сначала доказывается однозначная разрешимость уравнения

$$\Omega(w) = F \in W_p^1(\bar{D}), \quad p > 2, \quad (22)$$

в пространстве $W_s^1(\bar{D})$, где $s : 2 < s \leq p$ и s достаточно близко к двум. Далее теоремы 1–2 устанавливаются в случае постоянных коэффициентов q_1 и q_2 и $A(z) = B(z) \equiv 0$, после чего с помощью развитого в [3] варианта метода «локальной регуляризации» с замораживанием коэффициентов получаем общие утверждения этих теорем. Доказательство теоремы 3 представляет собой небольшую переработку доказательства теоремы 2.

3.1. Разрешимость уравнения (22) в $W_s^1(\bar{D})$.

Лемма 9. *Если $q_1(z), q_2(z)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию (2), а $A(z), B(z) \in L_s(\bar{D})$, $s > 2$, то уравнение*

$$\Omega(w) = 0 \quad (23)$$

в классе $W_s^1(\bar{D})$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Предположим противное, что решение $w(z) \in W_s^1(\bar{D}) \subset C_\beta(\bar{D})$, $\beta = \frac{s-2}{s}$, уравнения (23) не равно тождественно нулю. Известно, что при $f(z) \in L_s(\bar{D})$ функция $Tf(z) \in C_\beta(E)$, голоморфна вне \bar{D} и $Tf(\infty) = 0$ [1, с. 54–58]. Таким образом, из (23) следует, что функция $w(z)$ непрерывно продолжима вне \bar{D} голоморфным образом и равна нулю на бесконечности.

С другой стороны, продифференцировав (23) по \bar{z} , мы получим, что $w(z)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) (при $F(z) \equiv 0$). Отсюда и из (6) получаем, что $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega(w) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt, \quad (24)$$

т.е., интеграл типа Коши в правой части (24) непрерывен на всей плоскости и равен нулю на бесконечности. Но это возможно только при $w(t) \equiv 0, t \in \Gamma$ [13, с. 39]. Вместе с тем, непрерывное в \bar{D} решение однородного уравнения (1), равное нулю на Γ , тождественно равно нулю (см. лемму 8). \square

Лемма 10. *Если $q_1(z), q_2(z)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию (2), а $A(z), B(z) \in L_p(\bar{D})$, $p > 2$, то уравнение (22) имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$, где $s : 2 < s \leq p$ и s достаточно близко к двум.*

Доказательство. Единственность следует из леммы 9. Покажем, что оператор

$$\Omega_1(w) = w + T(q_1 \partial_z w + q_2 \partial_{\bar{z}} \bar{w}) \quad (25)$$

имеет ограниченный обратный в $W_s^1(\bar{D})$, если $2 < s \leq p$ и s достаточно близко к двум.

Рассмотрим уравнения

$$\Omega_1(w) = \omega \in W_s^1(\bar{D}), \quad (26)$$

$$\lambda + \Pi(q_1 \lambda + q_2 \bar{\lambda}) \equiv \lambda + \sigma \lambda = \partial_z \omega. \quad (27)$$

Уравнение (27) получено дифференцированием (26) по z и заменой $\partial_z w$ на $\lambda(z)$. По лемме 1 существует $s : 2 < s < s_0(q_0) \leq p$ такое, что $q_0 \|\Pi\|_{L_s} < 1$, поэтому по принципу сжатых отображений уравнение (27) однозначно разрешимо в $L_s(\bar{D})$:

$$\lambda(z) = (I + \sigma)^{-1} \partial_z \omega(z) \quad (28)$$

и норма линейного оператора $(I+\sigma)^{-1} : L_s(\overline{D}) \rightarrow L_s(\overline{D})$ ограничена константой, зависящей только от q_0 .

Будем искать решение уравнения (26) в виде

$$w(z) = \overline{T\bar{\lambda}} + \Psi(\bar{z}), \quad (29)$$

где $\Psi(z)$ — голоморфная в D функция класса $W_s^1(\overline{D})$. Подставив (29) в (26), получим

$$\Psi(\bar{z}) = \omega(z) - \overline{T\bar{\lambda}} - T(q_1\lambda + q_2\bar{\lambda}). \quad (30)$$

Так как $Tf(z) \in W_s^1(\overline{D})$ если $f(z) \in L_s(\overline{D})$ [1, гл. 1, §6], в силу (5), (27) $\partial_z\Psi(\bar{z}) = 0$, т.е. функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (30), голоморфна и из класса $W_s^1(\overline{D})$.

Таким образом, формулой

$$w(z) = \omega(z) - T\left(q_1(z)(I+\sigma)^{-1}\partial_z\omega + q_2(z)\overline{(I+\sigma)^{-1}\partial_z\omega}\right) \quad (31)$$

определяется решение уравнения (26). Поскольку в силу свойств оператора T (см. лемму 2) оператор $\Omega_1 : W_s^1(\overline{D}) \rightarrow W_s^1(\overline{D})$, непрерывен, по теореме Банаха обратный оператор $\Omega_1^{-1} : W_s^1(\overline{D}) \rightarrow W_s^1(\overline{D})$ также непрерывен (это можно усмотреть и непосредственно из (31)).

Замечание 5. Из (31) и свойств оператора T [1, гл. 1, §6] следует, что норма линейного оператора $\Omega_1^{-1} : W_s^1(\overline{D}) \rightarrow W_s^1(\overline{D})$ ограничена числом, зависящим лишь от q_0 .

Перепишем уравнение (22) в виде

$$w + \Omega_1^{-1} \circ Pw = \Omega_1^{-1}F, \quad (32)$$

где $Pw = T(Aw + B\bar{w})$. Так как оператор P вполне непрерывен в $C(\overline{D})$ и отображает $C(\overline{D})$ в $W_p^1(\overline{D})$ [1, гл. 1, §6], то оператор $\Omega_1^{-1} \circ P$ вполне непрерывен в $C(\overline{D})$ и отображает $C(\overline{D})$ в $W_s^1(\overline{D})$.

В силу отмеченных свойств участвующих в (32) операторов, непрерывное в \overline{D} решение однородного уравнения (32) принадлежит классу $W_s^1(\overline{D})$ и по лемме 9 равно нулю. Таким образом, по теореме Фредгольма уравнение (32) однозначно разрешимо в классе $C(\overline{D})$ и его решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$. \square

3.2. Случай постоянных коэффициентов q_1 и q_2 у оператора Ω_1 .

Лемма 11. Если $q_1(z) = \text{const}$, $q_2(z) = \text{const}$, то оператор Ω_1 , определяемый формулой (25), является (вещественно) линейным изоморфизмом банахова пространства $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ ($W_p^{k+1}(\overline{D})$, $k \geq 0$, $p > 2$).

Доказательство. Из свойств оператора T (см. лемму 2) следует, что отображение

$$\Omega_1 : C_\alpha^{k+1}(\overline{D}) \rightarrow C_\alpha^{k+1}(\overline{D}) \quad (W_p^{k+1}(\overline{D}) \rightarrow W_p^{k+1}(\overline{D}))$$

непрерывно. В силу теоремы Банаха достаточно показать его сюръективность. Рассмотрим уравнение

$$\Omega_1(w) = F(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}) \quad (W_p^{k+1}(\overline{D})). \quad (33)$$

По лемме 10 уравнение (33) имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$, где $s > 2$ достаточно близко к двум. Покажем, что это решение принадлежит классу $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$ ($W_p^{k+1}(\overline{D})$).

Пользуясь (6), уравнение (33) перепишем в виде

$$w(z) + T(q_1\partial_z w + q_2\partial_z\bar{w}) = \Phi(z) + T\partial_z F(z), \quad (34)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(t)}{t-z} dt \in A_\alpha^{k+1} \quad (A_p^{k+1}).$$

Применяя к (34) оператор

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bullet}{z - \zeta} dz, \quad \zeta \in D,$$

получим, что $\Phi(z)$ также представляется формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt. \quad (35)$$

Сначала предположим, что $q_1 = 0$, т.е., рассмотрим уравнение

$$w + T(q_2 \partial_{\bar{z}} \bar{w}) = \Phi(z) + T \partial_{\bar{z}} F. \quad (36)$$

Дифференцируя (36) по \bar{z} , получим

$$\partial_{\bar{z}}(w + q_2 \bar{w}) = \partial_{\bar{z}} F,$$

т.е., в силу (6), $w(z)$ удовлетворяет соотношению

$$w(z) + q_2 \overline{w(z)} = \Phi(z) + q_2 \Psi(z) + T \partial_{\bar{z}} F, \quad (37)$$

где $\Phi(z)$ определяется формулой (35), а

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{w(t)}}{t - z} dt. \quad (38)$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow \tau \in \Gamma$, для предельных значений $\Psi^+(\tau)$ функции $\Psi(z)$ по формулам Сохоцкого–Племеля [13, с. 38] получим следующее выражение:

$$\Psi^+(\tau) = \frac{1}{2} \overline{w(\tau)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{w(t)}}{t - \tau} dt.$$

Поскольку на Γ $t \cdot \bar{t} = 1$, $\tau \cdot \bar{\tau} = 1$, выражение для $\Psi^+(\tau)$ мы можем преобразовать следующим образом:

$$\Psi^+(\tau) = \overline{w(\tau)} - \overline{\Phi^+(\tau)} - C, \quad (39)$$

где

$$\Phi^+(\tau) = \frac{1}{2} w(\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - \tau} dt, \quad C = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{w(t)}}{\bar{t}} d\bar{t}. \quad (40)$$

Таким образом, из (37) имеем

$$w(\tau) = \Phi^+(\tau) - q_2 \overline{\Phi^+(\tau)} - q_2 C + T \partial_{\bar{z}} F(\tau) \in C_{\alpha}^{k+1}(\Gamma) \left(W_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \right).$$

Но в таком случае и $\overline{w(\tau)} \in C_{\alpha}^{k+1}(\Gamma) \left(W_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \right)$, откуда $\Psi(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\bar{D}) \left(W_p^{k+1}(\bar{D}) \right)$ (см. [1, с. 38], (15)), и

$$w(z) + q_2 \overline{w(z)} = F_0(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\bar{D}) \left(W_p^{k+1}(\bar{D}) \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{1 - |q_2|^2} \left(F_0(z) - q_2 \overline{F_0(z)} \right) \equiv \\ &\equiv \Xi(\Phi, F)(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\bar{D}) \left(W_p^{k+1}(\bar{D}) \right) \end{aligned} \quad (41)$$

и частный случай $q_1 = 0$ исчерпан.

Замечание 6. Отметим, что отсюда следует, что если $q_1 = 0$ и $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$, $s > 2$, $\Phi^+(t) \in C_\gamma^n(\Gamma)$, где $0 \leq n \leq k+1$, $0 < \gamma \leq \alpha < 1$, то $w(z) \in C_\gamma^n(\overline{D})$. Более того, справедлива

Лемма 12. Если $\Phi(z) \in A_\gamma^n(\overline{D})$, где $0 \leq n \leq k+1$, $0 < \gamma \leq \alpha < 1$, то формулой (41) однозначно определяется в D решение уравнения

$$\partial_{\bar{z}}w + q_2\partial_{\bar{z}}\bar{w} = \partial_{\bar{z}}F$$

класса $C_\gamma^n(\overline{D})$, для которого функция $\Phi(z)$ представима формулой (35).

Пусть теперь $q_1 \neq 0$. Рассуждаем по индукции. Покажем сначала, что лемма справедлива при $k = 0$.

Обозначим

$$\mu = \frac{2q_1}{1 + |q_1|^2 - |q_2|^2 + \sqrt{\Delta}} = \text{const},$$

где $\Delta = (1 + |q_1|^2 - |q_2|^2)^2 - 4|q_1|^2 \geq (1 - q_0^2)^2 > 0$, q_0 — константа эллиптичности из (2). Легко видеть, что $|\mu| < 1$.

Далее обозначим $\zeta = \zeta(z)$ основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar{z}}\zeta + \mu\partial_z\zeta = 0,$$

отображающий единичный круг $\overline{D}_z = \{z : |z| \leq 1\}$ на единичный круг $\overline{D}_\zeta = \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}$ с нормировкой $\zeta(0) = 0$, $\zeta(1) = 1$. Как известно, $\zeta(z) \in C^\infty(\overline{D}_z)$ [14].

В уравнении

$$\partial_{\bar{z}}w + q_1\partial_zw + q_2\partial_{\bar{z}}\bar{w} = \partial_{\bar{z}}F(z) \quad (42)$$

перейдём к аргументу $\zeta = \zeta(z)$ и будем обозначать $w(z(\zeta)) = w(\zeta)$, где $z = z(\zeta) \in C^\infty(\overline{D}_\zeta)$ — отображение, обратное к $\zeta = \zeta(z)$. Уравнение (42) преобразуется к виду [15]:

$$\partial_{\bar{\zeta}}w + a\partial_{\bar{\zeta}}\bar{w} = R_1(\zeta) \in C_\alpha^k(\overline{D}_\zeta) \quad (W_p^k(\overline{D}_\zeta)), \quad (43)$$

где

$$a = \frac{q_2(1 - |\mu|^2)}{|1 - q_1\bar{\mu}|^2 - |q_2\mu|^2} = \text{const}, \quad |a| < 1.$$

Аналогично (36) функция $w = w(\zeta)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$w(\zeta) + aT(\partial_{\bar{\zeta}}\bar{w}) = \Phi_1(\zeta) + T\partial_{\bar{\zeta}}R_1, \quad (44)$$

где

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z(\omega))}{\omega - \zeta} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{\zeta(t) - \zeta} \zeta'(t) dt \quad (45)$$

(о замене переменной интегрирования в сингулярном интеграле см. [13, с. 31]).

Отметим, что в силу теоремы вложения Соболева–Кондрашёва $w(z) \in W_s^1(\overline{D}_z) \subset C_\beta(\overline{D}_z)$, где $\beta = (s - 2)/s$ [1, с. 51], т.е., $w(t) \in C_\beta(\Gamma_z)$ и $w(\zeta) = w(z(\zeta)) \in C_\beta(\Gamma_\zeta)$.

Обратимся теперь к выражению

$$\Psi w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] w(\tau) d\tau = \Phi_1^+(\zeta(t)) - \Phi^+(t),$$

где $\Phi^+(t)$ определяется формулой (40), а

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{1}{2}w(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\zeta} \frac{w(\omega)}{\omega - \zeta} d\omega.$$

Поскольку $\zeta(\tau) \in C^\infty(\Gamma_z)$, по теореме 6 $\Psi w(t) \in C_\beta^1(\Gamma_z)$, а так как $\Phi^+(t) \in C_\alpha^1(\Gamma_z)$ ($W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_z)$), то, если $\beta < \alpha$, $\Phi_1^+(\zeta(t)) \in C_\beta^1(\Gamma_z)$ ($W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_z)$) и $\Phi_1^+(\zeta) \in C_\beta^1(\Gamma_\zeta)$ ($W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_\zeta)$), откуда $w(\zeta) \in C_\beta^1(\overline{D}_\zeta)$ (см. замечание 6) (соответственно $w(\zeta) \in W_p^1(\overline{D}_\zeta)$) и $w(z) \in C_\beta^1(\overline{D}_z)$ ($w(z) \in W_p^1(\overline{D}_z)$), а $w(t) \in C_\beta^1(\Gamma_z)$.

Далее, если $\beta < \alpha$, в силу следствия 1 $\Psi(t) \in C_\alpha^1(\Gamma_z)$ и $\Phi_1^+(\zeta) \in C_\alpha^1(\Gamma_\zeta)$, вследствие чего $w(\zeta) \in C_\alpha^1(\overline{D}_\zeta)$ и $w(z) \in C_\alpha^1(\overline{D}_z)$. Если $\beta \geq \alpha$, рассуждения очевидным образом упрощаются.

Итак, в случае $k = 0$ лемма 11 доказана.

Отметим, что из проделанных рассуждений, формулы (41) и леммы 12 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 13. *Если*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt \in A_\alpha^1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (A_p^1, p > 2),$$

$w(z) \in C^1(D) \cap C_\alpha^1(\overline{D})$ ($W_p^1(D) \cap C_\beta^1(\overline{D})$, $0 < \beta < 1$) — решение уравнения (42), то функция $w(z)$ представима формулой

$$w(z) = \Xi(\Phi, R_1)(\zeta(z)), \quad (46)$$

а следовательно, $w(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$ ($W_p^1(\overline{D})$).

Предположим теперь, что лемма 11 справедлива при некотором $k = m - 1$, $m \geq 1$, и покажем, что тогда она справедлива и при $k = m$. Таким образом, в силу нашего предположения индукции, если в уравнении (33) правая часть принадлежит классу $C_\alpha^m(\overline{D})$ ($W_p^m(\overline{D})$), то решение этого уравнения $w(z) \in C_\alpha^m(\overline{D})$ ($W_p^m(\overline{D})$).

Пусть теперь правая часть уравнения (33) принадлежит классу $C_\alpha^{m+1}(\overline{D})$ ($W_p^{m+1}(\overline{D}) \subset C_\beta^m(\overline{D})$, $\beta = (p-2)/p$).

Обозначим $z = re^{is}$ и введём в рассмотрение функцию

$$\frac{\partial w(re^{is})}{\partial s} \equiv w_s(z) = i(zw_z - \bar{z}w_{\bar{z}}). \quad (47)$$

По лемме 7 $w(z) \in C_\alpha^{m+1}(D)$ ($W_p^{m+1}(D)$), т.е., $w_s(z) \in C_\alpha^m(D) \cap C_\alpha^{m-1}(\overline{D})$ ($W_p^m(D) \cap C_\beta^{m-1}(\overline{D})$), и поэтому в D корректно определены функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} &= i(zw_{z\bar{z}} - w_{\bar{z}} - \bar{z}w_{\bar{z}\bar{z}}); \\ \frac{\partial w_s}{\partial z} &= i(w_z + zw_{zz} - \bar{z}w_{\bar{z}z}); \\ \frac{\partial \bar{w}_s}{\partial \bar{z}} &= -i(\bar{w}_{\bar{z}} + \bar{z}\bar{w}_{\bar{z}\bar{z}} - z\bar{w}_{z\bar{z}}). \end{aligned} \quad (48)$$

Из (48) и (33) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + q_1 \frac{\partial w_s}{\partial z} + q_2 \frac{\partial \bar{w}_s}{\partial \bar{z}} &= i(-w_{\bar{z}} + q_1 w_z - q_2 \bar{w}_{\bar{z}}) - \\ &- i\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_{\bar{z}} + q_1 w_z + q_2 \bar{w}_{\bar{z}}) + iz \frac{\partial}{\partial z}(w_z + q_1 w_z + q_2 \bar{w}_{\bar{z}}) = \\ &= 2iq_1 w_z - i\bar{z}F_{\bar{z}\bar{z}} + izF_{z\bar{z}} - iF_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $w_s(z)$ удовлетворяет в D уравнению

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + q_1 \frac{\partial w_s}{\partial z} + q_2 \frac{\partial \bar{w}_s}{\partial \bar{z}} = R_s(z) \in C_\alpha^{m-1}(\overline{D}) (W_p^{m-1}(\overline{D})). \quad (49)$$

Наша ближайшая цель — доказать, что $w_s(z) \in C_\alpha^m(\bar{D})$ ($W_p^m(\bar{D})$).
Обозначим

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w_s(t)}{t-z} dt.$$

Имеет место соотношение [1, с. 39]:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w_s(t)t'_s}{t-z} dt.$$

Учитывая, что на Γ $t \cdot \bar{t} = 1$, $t'_s = -i\bar{t}$, отсюда получаем:

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w_s(t)}{t} dt + iz\Phi'(z) \in C_\alpha^m(\bar{D}) (W_p^m(\bar{D})). \quad (50)$$

При $m = 1$ из (50) и леммы 13 имеем $w_s(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$ ($W_p^1(\bar{D})$).

Если же $m > 1$, то $w_s(z)$ является решением уравнения

$$\Omega_1 w_s = TR_s + \Phi_s \in C_\alpha^m(\bar{D}) (W_p^m(\bar{D})),$$

а следовательно, в силу предположения индукции, $w_s(z) \in C_\alpha^m(\bar{D})$ ($W_p^m(\bar{D})$).

Из (47) и (42) получаем:

$$w_z = \frac{-i[w_s(\bar{z} + z\bar{q}_1) + \bar{z}q_2\bar{w}_s] + \bar{z}F_z(\bar{z} + z\bar{q}_1) - |z|^2q_2\bar{F}_z}{|z + \bar{z}q_1|^2 - |z|^2|q_2|^2}. \quad (51)$$

Поскольку $|q_1| + |q_2| < 1$, знаменатель дроби в (51) при $z \neq 0$ в нуль не обращается.

Из (51), $w_s(z) \in C_\alpha^m(\bar{D})$ ($W_p^m(\bar{D})$) и $w(z) \in C_\alpha^{m+1}(D)$ ($W_p^{m+1}(D)$) получаем $w_z(z) \in C_\alpha^m(\bar{D})$ ($W_p^m(\bar{D})$). Отсюда и из (42) следует, что $w_{\bar{z}} \in C_\alpha^m(\bar{D})$ ($W_p^m(\bar{D})$). Таким образом, $w(z) \in C_\alpha^{m+1}(\bar{D})$ ($W_p^{m+1}(\bar{D})$) и лемма 11 полностью доказана. \square

3.3. Доказательство теоремы 1. Докажем теорему сначала для частного случая — для оператора (25). По лемме 10 уравнение

$$\Omega_1(w) = F \in W_p^1(\bar{D}) \quad (52)$$

имеет единственное решение $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$, $s : 2 < s \leq p$. Поскольку оператор Ω_1 непрерывно отображает $W_p^1(\bar{D})$ в $W_p^1(\bar{D})$, в силу теоремы Банаха достаточно показать, что это решение $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$.

Рассмотрим на \bar{D} разбиение единицы $\mathcal{H} = \{h_l\}$, о котором говорится в п. 2.4.2, и набор функций $\{w_l(z)\}$, $w_l = h_l \cdot w \in W_p^1(\bar{D})$. Так как

$$\sum_l w_l(z) = w(z), \quad \forall z \in \bar{D},$$

достаточно показать, что $w_l(z) \in W_p^1(\bar{D})$ для $\forall l$, или, что эквивалентно, $w_l(z) \in W_p^1(\bar{U}_l)$.

Решение $w(z)$ уравнения (52) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar{z}}w + q_1(z)\partial_zw + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} = \partial_{\bar{z}}F(z) \in L_p(\bar{D}),$$

поэтому функция $w_l(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar{z}}w_l + q_1(z)\partial_zw_l + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w}_l = F_l(z) \in L_p(\bar{D}), \quad (53)$$

где

$$F_l(z) = \partial_{\bar{z}}F + \partial_{\bar{z}}h_l \cdot (w_l + q_2\bar{w}_l) + q_1 \cdot w_l \cdot \partial_z h_l.$$

Отсюда и из (6) следует, что $w_l(z)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$w_l(z) + T_{U_l}(q_1\partial_zw_l + q_2\partial_{\bar{z}}\bar{w}_l) = T_{U_l}F_l + \Phi_l(z), \quad (54)$$

где

$$\Phi_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_l} \frac{w_l(t) dt}{t - z}.$$

Отметим, что если $\text{supp } h_l \cap \Gamma = \emptyset$, то $\Phi_l(z) \equiv 0$, а если $\text{supp } h_l \cap \Gamma \neq \emptyset$, то

$$\Phi_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w_l(t) dt}{t - z}, \quad (55)$$

т.е., в любом случае справедлива формула (55).

В (52), аналогично (34),

$$F(z) = T_D \partial_{\bar{z}} F(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t) dt}{t - z} \in W_p^1(\bar{D}),$$

т.е., функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t) dt}{t - z} \in A_p^1. \quad (56)$$

Отсюда, по лемме 6 $\Phi_l(z) \in A_p^1 \subset C_{\beta}(\bar{D})$, $\beta = (p - 2)/p$.

Обозначим $\zeta = \psi(z)$ конформное отображение области $D_r = U_l$ на единичный круг $G = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, $\partial G = \Gamma^*$, о котором говорится в п. 2.4.1. Если $U_l \cap \Gamma = \emptyset$ — это преобразование подобия (см. замечание 4). Число $\gamma : 0 < \gamma < 1$, $\partial D_r \in C_{\gamma}^1$, выберем такое, чтобы $\beta + \gamma > 1$ (см. замечание 3).

В дифференциальном уравнении (53) перейдем к аргументу ζ и обозначим $w_l(\zeta) = w_l(\varphi(\zeta))$, где $\varphi = \psi^{-1}$. Уравнение (53) при этом преобразуется в уравнение

$$\partial_{\bar{\zeta}} w_l + q_1^*(\zeta) \partial_{\zeta} w_l + q_2^*(\zeta) \partial_{\bar{\zeta}} \bar{w}_l = F_l^*(\zeta), \quad (57)$$

где

$$q_1^*(\zeta) = q_1(\varphi(\zeta)) \cdot \frac{\psi'(\varphi(\zeta))}{\psi'(\varphi(\zeta))}; \quad q_2^*(\zeta) = q_2(\varphi(\zeta)); \quad (58)$$

$$F_l^*(\zeta) = \overline{\varphi'(\zeta)} \cdot F_l(\varphi(\zeta));$$

$$|q_1^*(\zeta)| + |q_2^*(\zeta)| \leq q_0 = \text{const} < 1; \quad (59)$$

$$q_1^*(\zeta), q_2^*(\zeta) \in C(\bar{G}); \quad F_l^*(\zeta) \in L_p(\bar{G}).$$

Аналогично (54), функция $w_l(\zeta)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$w_l(\zeta) + T_G(q_1^* \partial_{\zeta} w_l + q_2^* \partial_{\bar{\zeta}} \bar{w}_l) = T_G F_l^*(\zeta) + \Phi_l^*(\zeta), \quad (60)$$

где

$$\Phi_l^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{w_l(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_l} \frac{w_l(t) \psi'(t) dt}{\psi(t) - \zeta}. \quad (61)$$

В силу теоремы 6 и $\beta + \gamma > 1$ будем иметь:

$$\Psi w_l(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial U_l} \left[\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda) - \psi(t)} - \frac{1}{\lambda - t} \right] w_l(\lambda) d\lambda \in C_{\beta+\gamma-1}^1(\partial U_l).$$

Так как из формул Сохоцкого-Племеля [13, гл. 1, §4] имеем

$$\Psi w_l(t) = [\Phi_l^*(\psi(t))]^{+} - \Phi_l^{+}(t), \quad t \in \partial U_L, \quad (62)$$

а $\psi(z) \in C_\gamma^1(\bar{U}_l)$ и $\Phi_l^+(z) \in A_p^1(\bar{D})$, из (62) получаем, что $[\Phi_l^*(\psi(t))]^+ \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial U_l)$, $\Phi_l^*(\psi(z)) \in A_p^1(\bar{U}_l)$ и $\Phi_l^*(\zeta) \in A_p^1(\bar{G})$.

Таким образом, правая часть уравнения (60)

$$F_l^{**}(\zeta) = T_G F_l^*(\zeta) + \Phi_l^*(\zeta) \in W_p^1(\bar{G}). \quad (63)$$

Зафиксируем в $\bar{U}_l = \bar{D}_r$ точку z_l . Для конкретности будем считать, что если U_l — круг, то z_l — его центр; если U_l — прилегающая к Γ область, то $z_l \in \text{supp } h_l \cap \Gamma$.

Обозначим $\zeta_l = \psi(z_l)$ и $\tilde{q}_1 = q_1^*(\zeta_l)$, $\tilde{q}_2 = q_2^*(\zeta_l)$.

Покажем, что величина

$$\varepsilon_l = \max_{\zeta \in \bar{G}} \{|q_1^*(\zeta) - \tilde{q}_1| + |q_2^*(\zeta) - \tilde{q}_2|\}$$

при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно по l (эти подробности пригодятся нам далее).

В обозначениях леммы 5 имеем:

$$\begin{aligned} |q_1^*(\zeta) - \tilde{q}_1| &= |[q_1(z) - q_1(z_l)]\omega(z) + q_1(z_l)|\omega(z) - \omega(z)|| \leq \\ &\leq |q_1(z) - q_1(z_l)| + 24|z - z_l|^\gamma, \quad z = \varphi(\zeta). \end{aligned} \quad (64)$$

Из $q_1(z), q_2(z) \in C(\bar{D})$, (58) и (64) получаем, что

$$\varepsilon_l \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (65)$$

равномерно по l .

Перепишем уравнение (60) в виде

$$\Omega_1^*(w_l) + \Omega_2^*(w_l) = F_l^{**}(\zeta), \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(w_l) &= w_l + T_G(\tilde{q}_1 \partial_\zeta w_l + \tilde{q}_2 \partial_{\bar{\zeta}} \bar{w}_l), \\ \Omega_2^*(w_l) &= T_G[(q_1^*(\zeta) - \tilde{q}_1) \partial_\zeta w_l + (q_2^*(\zeta) - \tilde{q}_2) \partial_{\bar{\zeta}} \bar{w}_l]. \end{aligned}$$

По лемме 11 оператор Ω_1^* есть линейный изоморфизм пространства $W_p^1(\bar{G})$ и, очевидно, он непрерывно зависит от чисел \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 . Так как переход к обратному оператору есть операция непрерывная [16, гл. 2, §9], то и $[\Omega_1^*]^{-1}$ есть непрерывная операторнозначная функция переменных \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 , определённая на компакте, определяемом неравенством (59). Следовательно, норма обратного оператора $[\Omega_1^*]^{-1}$ ограничена равномерно по \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 .

Для оператора Ω_2^* из леммы 2 имеем оценку:

$$\|\Omega_2^*(w_l)\|_{W_p^1(\bar{G})} \leq \text{const} \cdot \varepsilon_l \cdot \|\partial_\zeta w_l\|_{L_p(\bar{G})} \leq \text{const} \cdot \varepsilon_l \cdot \|w_l\|_{W_p^1(\bar{G})}, \quad (67)$$

где const не зависит от r и l .

Перепишем уравнение (66) в виде

$$w_l + [\Omega_1^*]^{-1} \circ \Omega_2^*(w_l) = [\Omega_1^*]^{-1} F_l^{**} \quad (68)$$

и зафиксируем r настолько большим, чтобы

$$\|[\Omega_1^*]^{-1}\| \cdot \text{const} \cdot \varepsilon_l < 1,$$

равномерно по l , т.е., чтобы оператор $[\Omega_1^*]^{-1} \circ \Omega_2^*$ в уравнении (68) был оператором сжатия, действующим из $W_p^1(\bar{G})$ в $W_p^1(\bar{G})$.

После этого мы получаем, что $w_l(\zeta) \in W_p^1(\bar{G})$, а следовательно $w_l(z) \in W_p^1(\bar{U}_l)$ для любого l , и теорема 1 для оператора (25) доказана.

Перейдём к общему случаю. Уравнение (22), согласно лемме 10, имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$, $s > 2$. Аналогично предыдущему, достаточно показать, что $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$.

Перепишем уравнение (22) в виде

$$\Omega_1(w) = F_2(z),$$

где

$$F_2(z) = F(z) - T_D(Aw + B\bar{w}) \in W_p^1(\bar{D}).$$

Отсюда, согласно доказанному частному случаю,

$$w(z) = [\Omega_1]^{-1} F_2(z) \in W_p^1(\bar{D})$$

и теорема 1 полностью доказана.

3.4. Доказательство теоремы 2. Первоначально отдельно рассмотрим случай $k = 0$.

3.4.1. Случай $k = 0$. Для рассмотрения этого случая слегка модифицируем рассуждения п. 3.3.

Сначала докажем утверждение теоремы для оператора Ω_1 . Рассмотрим уравнение

$$\Omega_1(w) = F(z) \in C_\alpha^1(\bar{D}), \quad (69)$$

которое по теореме 1 имеет единственное решение $w(z) \in W_s^1(\bar{D}) \subset C_\beta(\bar{D})$, где $s > 2$ сколь угодно велико, а следовательно $\beta = \frac{s-2}{s}$ сколь угодно близко к единице. Как и в п. 3.3, в силу теоремы Банаха достаточно показать, что $w(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$.

Так же, как и в (34),

$$F(z) = T_D \partial_{\bar{z}} F(z) + \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ представляется формулой (35) и $\Phi(z) \in A_\alpha^1(\bar{D})$.

Как и в п. 3.3 рассмотрим разбиение единицы $\mathcal{H} = \{h_l\}$, функцию $w_l(z) = h_l(z)w(z)$, и покажем, что $w_l(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$ для любого l . Будем считать, что приграничные области $U_l = D_r$ ограничены кривыми класса C_γ^1 , где $\beta + \gamma > 1 + \alpha$ (см замечание 3).

Функция $w_l(z)$ удовлетворяет уравнению (53), где $F_l \in C_\alpha(\bar{D})$ и уравнению (54). Аналогично (56), используя лемму 6 и то, что $\Phi(z) \in A_\alpha^1(\bar{D})$, получаем, что $\Phi_l(z) \in A_\alpha^1(\bar{D})$.

Далее перейдём к уравнению (57), в котором $q_1^*(\zeta), q_2^*(\zeta) \in C_\alpha(\bar{G})$, $F_l^*(\zeta) \in C_\alpha(\bar{G})$, и к уравнению (60), в котором, аналогично п. 3.3, из $\beta + \gamma > 1 + \alpha$ и теоремы 6 $\Phi_l^*(\zeta) \in A_\alpha^1(\bar{G})$, $F_l^{**}(\zeta) \in C_\alpha^1(\bar{G})$.

Как и в п. 3.3 уравнение (60) переписываем в виде (66). По лемме 11 оператор Ω_1^* есть линейный изоморфизм пространства $C_\alpha^1(\bar{G})$ и обратный оператор $[\Omega_1^*]^{-1}$ ограничен равномерно по \tilde{q}_1 и \tilde{q}_2 .

Для оператора Ω_2^* , аналогично (67), из леммы 2 будем иметь:

$$\|\Omega_2^*(w_l)\|_{C_\alpha^1(\bar{G})} \leq \text{const} \cdot \tilde{\varepsilon}_l \cdot \|w_l\|_{C_\alpha^1(\bar{G})}, \quad (70)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_l = \|q_1^*(\zeta) - \tilde{q}_1\|_{C_\alpha(\bar{G})} + \|q_2^*(\zeta) - \tilde{q}_2\|_{C_\alpha(\bar{G})},$$

а const не зависит от r и l .

Покажем, что

$$\tilde{\varepsilon}_l \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (71)$$

равномерно по l . Во первых, в силу (65)

$$\|q_i^*(\zeta) - \tilde{q}_i\|_{C(\bar{G})} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2,$$

равномерно по l .

Оценим константы Гёльдера этих разностей. Из $q_i(z) \in C_\alpha(\bar{D})$, (64) и (20) получаем, что

$$|q_i^*(\zeta_1) - q_i^*(\zeta_2)| \leq \text{const} \cdot |\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)|^\alpha \leq \frac{\text{const}}{r^\alpha} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad i = 1, 2,$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{G}$, а const не зависит от r и l . Таким образом, при $r \rightarrow \infty$ константы Гёльдера функций $q_i^*(\zeta) - \tilde{q}_i$, $i = 1, 2$, равномерно по l стремятся к нулю и соотношение (71) доказано.

Далее перейдём к уравнению (68). В силу (70), (71) и равномерной ограниченности оператора $[\Omega_1^*]^{-1}$ можно зафиксировать такое большое r , что при любом l оператор $[\Omega_1^*]^{-1} \circ \Omega_2^*$ будет оператором сжатия, действующим из $C_\alpha^1(\overline{G})$ в $C_\alpha^1(\overline{G})$. Зафиксировав такое r , получим $w_l(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$ для $\forall l$ и $w(z) \in C_\alpha^1(\overline{D})$, чем случай $k = 0$ для оператора Ω_1 исчерпан.

Перейдём к оператору Ω (при $k = 0$). Запишем оператор Ω в виде

$$\Omega(w) = \Omega_1(w) + P(w),$$

где $P(w) = T_D(Aw + B\bar{w})$. В силу леммы 2 оператор P непрерывно отображает $C_\alpha(\overline{D})$ в $C_\alpha^1(\overline{D})$ и вполне непрерывен в $C_\alpha(\overline{D})$. Таким образом, оператор Ω непрерывно отображает пространство $C_\alpha^1(\overline{D})$ в себя и, в силу теоремы Банаха, достаточно доказать, что уравнение

$$\Omega(w) = F \in C_\alpha^1(\overline{D})$$

однозначно разрешимо в $C_\alpha^1(\overline{D})$. Перепишем это уравнение в виде

$$w + [\Omega_1]^{-1} \circ P(w) = [\Omega_1]^{-1} F. \quad (72)$$

Оператор $[\Omega_1]^{-1} \circ P$ вполне непрерывен в $C_\alpha(\overline{D})$ и отображает это пространство в $C_\alpha^1(\overline{D})$. Таким образом, решение $w \in C_\alpha(\overline{D})$ однородного уравнения (72) принадлежит классу $C_\alpha^1(\overline{D})$ и по лемме 9 равно нулю. По теореме Фредгольма уравнение (72) имеет единственное решение в классе $C_\alpha(\overline{D})$, которое принадлежит классу $C_\alpha^1(\overline{D})$ и случай $k = 0$ исчерпан полностью.

3.4.2. Регулярность решения во внутренних точках. Для перехода к случаю $k \geq 1$ исследуем регулярность решения во внутренних точках круга D .

Лемма 14. *Если $w(z)$ — финитная в D функция ($\text{supp } w(z) \subset D$) класса $W_s^1(\overline{D})$, $s > 2$, удовлетворяющая уравнению (1), в котором*

$$q_1(z), q_2(z), A(z), B(z), R(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}), k \geq 0, 0 < \alpha < 1,$$

то $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$.

Замечание 7. *Ясно, что в этом случае $R(z)$ — финитная в D функция.*

Доказательство леммы 14. В силу (6) функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega(w) = T_D R \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$$

и по лемме 9 определена однозначно. Утверждение леммы 14 в случае $k = 0$ — следствие уже доказанной изоморфности оператора Ω в $C_\alpha^1(\overline{D})$.

Рассмотрим случай $k = 1$. Сначала предположим, что $A(z) = B(z) \equiv 0$, т.е., что $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w + q_1(z) \partial_z w + q_2(z) \partial_{\bar{z}} \bar{w} = R(z). \quad (73)$$

Формально продифференцируем (73) по z и перепишем результат, обозначив $\partial_z w(z) = W(z)$:

$$\partial_{\bar{z}} W + q_1 \partial_z W + q_2 \partial_z \bar{W} + A_1(z) W + B_1(z) \bar{W} = \partial_z R(z) \in C_\alpha(\overline{D}), \quad (74)$$

где

$$A_1(z) = \partial_z q_1(z), \quad A_2(z) = \partial_z q_2(z) \in C_\alpha(\overline{D}).$$

Исключив из (74) и комплексно сопряжённого равенства $\partial_z \bar{W}$, получим:

$$\partial_{\bar{z}} W + Q_1 \partial_z W + Q_2 \partial_{\bar{z}} \bar{W} + A_2(z) W + B_2(z) \bar{W} = R_2(z), \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= \frac{q_1(z)}{1 - |q_2(z)|^2}, \quad Q_2(z) = -\frac{\bar{q}_1 \cdot q_2}{1 - |q_2(z)|^2}, \\ A_2(z) &= \frac{A_1 - q_2 \cdot \bar{B}_1}{1 - |q_2|^2}, \quad B_2(z) = \frac{B_1 - q_2 \cdot \bar{A}_1}{1 - |q_2|^2}, \\ R_2(z) &= \partial_z R - q_2 \cdot \partial_{\bar{z}} \bar{R}; \end{aligned} \quad (76)$$

$$Q_1, Q_2 \in C_\alpha^1(\bar{D}), \quad A_2, B_2, R_2 \in C_\alpha(\bar{D}),$$

$$|Q_1| + |Q_2| \leq \text{const} < 1.$$

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$W + T_D(Q_1 \partial_z W + Q_2 \partial_{\bar{z}} \bar{W} + A_2 W + B_2 \bar{W}) = T_D R_2. \quad (77)$$

По доказанному (для $k = 0$) это уравнение имеет единственное решение $W(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$. Покажем, что $W(z)$ — функция, финитная в D .

Из (77) и (6) имеем, что функция $W(z)$ непрерывна, голоморфным образом продолжима из \bar{D} на всю комплексную плоскость и интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{W(t) dt}{t - z} \equiv 0, \quad z \in \bar{D}.$$

и непрерывен на всей плоскости. Это, как уже отмечалось в доказательстве леммы 9, влечёт за собой

$$W(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma. \quad (78)$$

Поскольку функция $R_2(z)$ финитна в D , в некотором кольце $1 - \varepsilon \leq |z| \leq 1$, $\varepsilon > 0$, $W(z)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (77). А отсюда и из (78) следует, что в этом кольце $W(z) \equiv 0$ (см. [1, гл. 3, §17]).

Исключая из (75) и комплексно сопряжённого равенства $\partial_{\bar{z}} \bar{W}$, получим, что решение $W(z)$ уравнения (77) удовлетворяет уравнению (74).

Положим

$$w(z) = \bar{T}_D W(z) \in C_\alpha^2(\bar{D}). \quad (79)$$

Аналогично предыдущему устанавливается, что функция $w(z)$ финитна в D . Так как $\partial_z w = W(z)$, соотношение (74) можно переписать в виде

$$\partial_z [\partial_{\bar{z}} w + q_1 \partial_z w + q_2 \partial_{\bar{z}} \bar{w} - R] = 0, \quad z \in \bar{D}. \quad (80)$$

Таким образом, выражение в квадратных скобках в (80) есть антиголоморфная функция, равная нулю на Γ , т.е., это тождественный нуль, а (79) — то самое рассматриваемое нами единственное решение уравнения (73).

В случае $k = 1$ и общего уравнения (1) перепишем его в виде

$$\partial_{\bar{z}} w + q_1(z) \partial_z w + q_2(z) \partial_{\bar{z}} \bar{w} = R_3(z).$$

где $R_3 = R - Aw - B\bar{w} \in C_\alpha^1(\bar{D})$, поскольку по доказанному для $k = 0$ $w \in C_\alpha^1(\bar{D})$. Отсюда и из рассуждений для уравнения (73) получим $w(z) \in C_\alpha^2(\bar{D})$.

Далее проведём индукцию по k . Пусть утверждение леммы 14 верно при $k = n - 1 \geq 1$. Покажем, что тогда оно верно и при $k = n$.

Итак,

$$q_1(z), q_2(z), A(z), B(z), R(z) \in C_\alpha^n(\bar{D}),$$

и по предположению индукции $w(z) \in C_\alpha^n(\bar{D})$, $n \geq 2$. Продифференцируем уравнение (1) по z , обозначим $\partial_z w = W$ и исключим из получившегося равенства $\partial_{\bar{z}} \bar{W}$. В итоге получим

уравнение (в котором уже априори финитная функция W — производная рассматриваемого решения):

$$\partial_{\bar{z}}W + Q_1(z)\partial_zW + Q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{W} + A_3(z)W + B_3(z)\bar{W} = R_4(z),$$

где $Q_1(z), Q_2(z) \in C_\alpha^n(\bar{D})$ и определяются формулами (76), а $A_3(z), B_3(z), R_4(z) \in C_\alpha^{n-1}(\bar{D})$. Выписать точные формулы для A_3, B_3 и R_4 не составляет труда, но они здесь не нужны.

По лемме 7 $W(z) = \partial_z w(z) \in C_\alpha^n(D)$; с учётом этого, из (1) получаем $\partial_{\bar{z}}w(z) \in C_\alpha^n(D)$. В силу финитности $w(z) \in C_\alpha^{n+1}(\bar{D})$. Лемма 14 доказана полностью. \square

Лемма 15. Если в уравнении (1)

$$q_1(z), q_2(z), A(z), B(z), R(z) \in C_\alpha^k(\bar{D}), k \geq 0, 0 < \alpha < 1,$$

то любое его решение $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$ принадлежит классу $C_\alpha^{k+1}(D)$.

Доказательство леммы 15. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in D$ и круг $D_\varepsilon = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset D, \varepsilon > 0$. Обозначим $h_\varepsilon(z) \in C^\infty(\bar{D})$ финитную функцию, определяемую условиями:

$$\begin{aligned} 1. & h_\varepsilon(z) \geq 0; \\ 2. & h_\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & |z - z_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & |z - z_0| \geq \frac{3\varepsilon}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

О существовании такой функции см., например, [12, гл. II, § 4].

Очевидно, достаточно показать, что финитная в D функция $w_\varepsilon(z) = h_\varepsilon(z) \cdot w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. Но функция $w_\varepsilon(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar{z}}w_\varepsilon + q_1(z)\partial_zw_\varepsilon + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w}_\varepsilon + A_\varepsilon(z)w_\varepsilon + B_\varepsilon(z)\bar{w}_\varepsilon = R_\varepsilon(z),$$

коэффициенты которого и свободный член принадлежат классу $C_\alpha^k(\bar{D})$. Далее применяем лемму 14.

Лемма 15 доказана. \square

Замечание 8. Легко видеть, что в условии леммы 15 на коэффициенты и свободный член достаточно наложить требование принадлежности к $C_\alpha^k(D)$ и рассматривать решение $w(z) \in W_s^1(D)$.

3.4.3. Случай $k = 1$. Так же, как и выше, нам нужно доказать, что решение $w(z)$ уравнения

$$\Omega(w) = F^*(z) \in C_\alpha^2(\bar{D})$$

принадлежит классу $C_\alpha^2(\bar{D})$.

По доказанному в п. 3.4.1 $w(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$. Перепишем это уравнение в виде:

$$\Omega_1(w) = F(z) \in C_\alpha^2(\bar{D}), \tag{81}$$

где $F(z) = F^*(z) - T_D(A(z)w + B(z)\bar{w}) \in C_\alpha^2(\bar{D})$. Так как $w(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$, в \bar{D} корректно определена функция (47):

$$\frac{\partial w(re^{is})}{\partial s} \equiv w_s(z) = i(zw_z - \bar{z}w_{\bar{z}}).$$

В силу леммы 15 $w(z) \in C_\alpha^2(D)$, поэтому $w_s(z) \in C_\alpha^1(D) \cap C_\alpha(\bar{D})$.

Поскольку в силу (81) $w(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_{\bar{z}}w + q_1(z)\partial_zw + q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} = \partial_{\bar{z}}F(z) \in C_\alpha^1(\bar{D}), \tag{82}$$

аналогично (49) $w_s(z)$ в D удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + q_1(z)\frac{\partial w_s}{\partial z} + q_2(z)\frac{\partial \bar{w}_s}{\partial \bar{z}} = \tilde{R}_s(z), \tag{83}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_s(z) = & 2iq_1(z) + i\bar{z} \left(\frac{\partial q_1}{\partial \bar{z}} w_z + \frac{\partial q_2}{\partial \bar{z}} \bar{w}_z \right) - iz \left(\frac{\partial q_1}{\partial z} w_z + \frac{\partial q_2}{\partial z} \bar{w}_z \right) - \\ & -i\bar{z}F_{z\bar{z}} + izF_{\bar{z}z} - iF_{\bar{z}} \in C_\alpha(\bar{D}). \end{aligned}$$

Так же, как и в (50)

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w_s(t)}{t-z} dt \in C_\alpha^1(\bar{D}).$$

Рассмотрим теперь интегродифференциальное уравнение

$$\Omega_1(W_s) = T_D \tilde{R}_s + \Phi_s \in C_\alpha^1(\bar{D}).$$

По доказанному в п. 3.4.1 это уравнение имеет единственное решение $W_s(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$, для которого

$$\Phi_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{W_s(t)}{t-z} dt.$$

Таким образом, функция $W(z) = w_s(z) - W_s(z) \in C_\alpha(\bar{D}) \cap C_\alpha^1(D)$, удовлетворяет однородному уравнению (83) и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{W(t)}{t-z} dt = 0, \quad \forall z \in \bar{D}. \quad (84)$$

Из (84) следует, что $W(t)$, $t \in \Gamma$, есть граничные значения голоморфной при $|z| > 1$ функции, равной нулю на бесконечности (см. [13, гл. 1, п. 4.3]). Но это означает, что $W(z) \equiv 0$ [2, теорема 4.5], и $w_s(z) \in C_\alpha^1(\bar{D})$. Отсюда и из формулы (51) (которая, очевидно, справедлива и для непостоянных коэффициентов $q_1(z)$, $q_2(z)$), имеем $w_z \in C_\alpha^1(\bar{D} \setminus \{0\})$, а поскольку $w_z \in C_\alpha^1(D)$, то $w_z \in C_\alpha^1(\bar{D})$ и в силу (82) $w_{\bar{z}} \in C_\alpha^1(\bar{D})$.

Случай $k = 1$ исчерпан.

3.4.4. Случай $k > 1$. Проведём индукцию по k . Итак, пусть утверждение теоремы имеет место при $k = n-1 \geq 1$. Доказательство его справедливости при $k = n$ дословно повторяет рассуждения п. 3.4.3, только везде надо заменить $C_\alpha^2(\bar{D})$ и $C_\alpha^1(\bar{D})$ на $C_\alpha^{n+1}(\bar{D})$ и $C_\alpha^n(\bar{D})$ и, утверждая, что $W_s(z) \in C_\alpha^n(\bar{D})$, сослаться на предположение индукции.

Теорема 2 полностью доказана.

3.5. Доказательство теоремы 3. Рассуждения почти дословно повторяют соответствующие пункты из доказательства теоремы 2. Отметим немногочисленные отличия.

1) Нужно везде заменить классы $C_\alpha^n(\bar{D})$ на $W_p^n(\bar{D})$.

2) Случай $k = 0$ отсутствует.

3) Вместо лемм 14 и 15 используются следующие утверждения.

Лемма 16. Если $w(z)$ — финитная в D функция ($\text{supp } w(z) \subset D$) класса $W_s^1(\bar{D})$, $s > 2$, удовлетворяющая уравнению (1), в котором

$$q_1(z), q_2(z), A(z), B(z), R(z) \in W_p^k(\bar{D}), k \geq 1, p > 2,$$

то $w(z) \in W_p^{k+1}(\bar{D})$.

Лемма 17. Если в уравнении (1)

$$q_1(z), q_2(z), A(z), B(z), R(z) \in W_p^k(\bar{D}), k \geq 1, p > 2,$$

то любое его решение $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$ принадлежит классу $W_p^{k+1}(D)$.

Доказательства этих лемм дословно повторяют доказательства лемм 14 и 15 с указанной заменой пространств и тем лишь отличием, что существование решения $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$ уравнения (77) следует из теоремы 1 (везде далее также ссылку на рассмотренный случай $k = 0$ нужно заменить ссылкой на теорему 1).

4) При рассмотрении случая $k = 1$ нужно учесть, что $W_p^n(\bar{D}) \subset C_\beta^{n-1}(\bar{D})$, где $n \geq 1$, $\beta = \frac{p-2}{p}$, поэтому, в силу теоремы 2, решение уравнения (81) $w(z) \in C_\beta^1(\bar{D})$ и $W(z) = w_s(z) - W_s(z) \in W_p^1(\bar{D}) \cap C_\beta(\bar{D})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщённые аналитические функции*. М.: Физматгиз. 1959. 628 с.
2. Боярский Б.В. *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами* // Математ. сборник. Т. 43, № 4. 1957. С. 451–503.
3. Климентов С.Б. *Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны* // Украинский геометрический сборник. В.29. 1986. С.56–82. Английский перевод: S.B. Klimentov, *On a method of constructing the solutions of boundary-value problems of the theory of bendings of surfaces of positive curvature* // Journal of Mathematical Sciences. Volume 51, Number 2. 1990. Pages 2230–2248.
4. Виноградов В.С. *О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения* // Докл. АН СССР. Т. 241, № 2. 1978. С. 272–274.
5. Виноградов В.С. *О построении регуляризаторов для эллиптических граничных задач на плоскости* // Дифференц. уравнения. Т. 26, № 1. 1990. С. 16–23.
6. S.B. Klimentov *Another version of Kellogg's theorem* // Complex Variables and Elliptic Equations. Vol. 60, № 12. 2015. P. 1647–1657.
7. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*. М.: Физматгиз. 1977. 448 с.
8. Климентов С.Б. *О комбинациях диффеоморфных сдвигов окружности и некоторых одномерных интегральных операторов* // Владикавказский математ. журнал. Т. 19, в. 1. 2017. С. 30–40.
9. Агмон, Дуглис А., Ниренберг Л. *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы*. М.: Издательство ИЛ. 1962. 205 с.
10. Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*. Новосибирск: Наука. 1977. 424 с.
11. Данилов В.А. *Оценки искажения квазиконформного отображения в пространстве типа S_α^m* // Сибирский математ. журнал. Т. 14, № 3. 1973. С. 525–535.
12. Стернберг С. *Лекции по дифференциальной геометрии*. М.: Мир. 1970. 412 с.
13. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. М.: Наука. 1977. 640 с.
14. Климентов С.Б. *Представления «второго рода» для решений классов Харди уравнения Бельтрами* // Сибирский математ. журнал. Т. 55, № 2. 2014. С. 324–340.
15. Климентов С.Б. *Задача Римана-Гильберта в классах Харди для общих эллиптических систем первого порядка* // Известия вузов. Математика. № 6. 2016. С. 36–47.
16. Наймарк М.А. *Нормированные кольца*. М.: Наука. 1968. 664 с.

Сергей Борисович Климентов,
Южный федеральный университет, ЮМИ ВНИЦ РАН,
ул. Мильчакова, 8-а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru