

УДК 517.9

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ , $f_2 = g_2v(t, x)$

М.В. ДОНЦОВА

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями  $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2v(t, x)$ . Исследование разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента. Получены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями  $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2v(t, x)$ , при которых решение имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции задачи Коши. Сформулирована теорема о локальном существовании и единственности решения задачи Коши. Приведено доказательство теоремы о локальном существовании и единственности решения задачи Коши. Теорема о локальном существовании и единственности решения задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями  $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2v(t, x)$  доказана с помощью метода дополнительного аргумента. Получены достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями  $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2v(t, x)$ . Сформулирована теорема о нелокальном существовании и единственности решения задачи Коши. Приведено доказательство теоремы о нелокальном существовании и единственности решения задачи Коши. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями  $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2v(t, x)$  опирается на глобальные оценки.

**Ключевые слова:** уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки.

**Mathematics Subject Classification:** 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (au(t, x) + bv(t, x))\partial_x u(t, x) = 0, \\ \partial_t v(t, x) + (cu(t, x) + gv(t, x))\partial_x v(t, x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

---

M.V. DONTSOVA, SOLVABILITY OF CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF FIRST ORDER QUASILINEAR EQUATIONS WITH RIGHT-HAND SIDES  $f_1 = a_2u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2v(t, x)$ .

©Донцова М.В. 2019.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол\_а.

Поступила 10 мая 2018 г.

где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции,  $a, c, b, g$  – известные положительные константы,  $(t, x) \in \Omega_T$ , где  $\Omega_T = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$  с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

где  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  – известные функции.

В работе [2] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (a_1 u(t, x) + b_1 v(t, x)) \partial_x u(t, x) = a_2 u(t, x) + b_2 v(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + (c_1 u(t, x) + g_1 v(t, x)) \partial_x v(t, x) = g_2 v(t, x), \end{cases} \quad (3)$$

где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции,  $a_1, b_i, c_1, g_1, i = 1, 2$  – известные положительные константы,  $a_2, g_2$  – известные константы,  $(t, x) \in \Omega_T$  с начальными условиями (2).

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (a_1(t)u(t, x) + b_1(t)v(t, x))\partial_x u(t, x) = a_2 u(t, x) + b_2(t)v(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + (c_1(t)u(t, x) + g_1(t)v(t, x))\partial_x v(t, x) = g_2 v(t, x), \end{cases} \quad (4)$$

где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции,  $a_2, g_2$  – известные константы,

$a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t)$  – известные функции.

Примем, что  $a_1(t) > 0, b_1(t) > 0, b_2(t) > 0, c_1(t) > 0, g_1(t) > 0, t \in [0, T]$ .

Для исследования систем квазилинейных уравнений первого порядка применялись самые разнообразные подходы. В [3] содержится анализ разрешимости систем квазилинейных уравнений первого порядка на основе классического метода характеристик.

В рамках классического метода характеристик исследование сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где присутствует суперпозиция неизвестных функций. И найдя решение в характеристических переменных, для получения решения исходной задачи требуется перейти от характеристических переменных к переменным  $(t, x)$ . Последняя задача во многих случаях бывает настолько сложной, что её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия [3].

В работе [4] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ , и указаны границы интервала разрешимости.

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента для системы вида (4) с начальными условиями (2) на  $\Omega_T$  определяем достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах, при которых решение имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции задачи Коши, и достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка  $t \in [0, T]$ ). Будут сформулированы и доказаны теоремы о локальном и нелокальном существовании и единственности решений задачи Коши.

В соответствии с методом дополнительного аргумента, запишем для задачи (4), (2) расширенную характеристическую систему [2], [5]–[9]:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x)}{ds} = a_1(s)u(s, \eta_1(s, t, x)) + b_1(s)v(s, \eta_1(s, t, x)), \quad (5)$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x)}{ds} = c_1(s)u(s, \eta_2(s, t, x)) + g_1(s)v(s, \eta_2(s, t, x)), \quad (6)$$

$$\frac{du(s, \eta_1(s, t, x))}{ds} = a_2 u(s, \eta_1(s, t, x)) + b_2(s)v(s, \eta_1(s, t, x)), \quad (7)$$

$$\frac{dv(s, \eta_2(s, t, x))}{ds} = g_2 v(s, \eta_2(s, t, x)), \quad (8)$$

$$\eta_1(t, t, x) = x, \quad \eta_2(t, t, x) = x, \quad (9)$$

$$u(0, \eta_1(0, t, x)) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)), \quad v(0, \eta_2(0, t, x)) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)). \quad (10)$$

Вводим новые неизвестные функции:

$$w_1(s, t, x) = u(s, \eta_1(s, t, x)), \quad w_2(s, t, x) = v(s, \eta_2(s, t, x)),$$

$$w_3(s, t, x) = v(s, \eta_1(s, t, x)), \quad w_4(s, t, x) = u(s, \eta_2(s, t, x)).$$

Тогда расширенная характеристическая система примет вид:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x)}{ds} = a_1(s)w_1(s, t, x) + b_1(s)w_3(s, t, x), \quad (11)$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x)}{ds} = c_1(s)w_4(s, t, x) + g_1(s)w_2(s, t, x), \quad (12)$$

$$\frac{dw_1(s, t, x)}{ds} = a_2w_1(s, t, x) + b_2(s)w_3(s, t, x), \quad (13)$$

$$\frac{dw_2(s, t, x)}{ds} = g_2w_2(s, t, x), \quad (14)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2), \quad (15)$$

$$\eta_1(t, t, x) = x, \quad \eta_2(t, t, x) = x, \quad (16)$$

$$w_1(0, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)), \quad w_2(0, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)). \quad (17)$$

Неизвестные функции  $\eta_i$ ,  $w_j$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$  зависят не только от  $t$  и  $x$ , но и от дополнительного аргумента  $s$ . Интегрируя уравнения (11)–(14) по аргументу  $s$ , и учитывая условия (15)–(17), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s, t, x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau, \quad (18)$$

$$\eta_2(s, t, x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau, \quad (19)$$

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)) + \int_0^s (a_2w_1 + b_2(\tau)w_3)d\tau, \quad (20)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)) + \int_0^s g_2w_2d\tau, \quad (21)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad (22)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2). \quad (23)$$

Подставим (18), (19) в (20)–(23), получим следующую систему:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau) + \int_0^s (a_2w_1(\tau, t, x) + b_2(\tau)w_3(\tau, t, x))d\tau, \quad (24)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_4(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_2(\tau, t, x))d\tau) + \int_0^s g_2w_2(\tau, t, x)d\tau, \quad (25)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau), \quad (26)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau). \quad (27)$$

Мы будем писать, что константы  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ... определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедлива лемма:

**Лемма 1.** Пусть функции  $w_1(s, t, x)$ ,  $w_2(s, t, x)$  удовлетворяют системе интегральных уравнений (24)–(27), являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции  $u(t, x) = w_1(t, t, x)$ ,  $v(t, x) = w_2(t, t, x)$  будут решением задачи (4), (2) на  $\Omega_{T_0}$ ,  $T_0 \leq T$ , где  $T_0$  – константа, определяемая через исходные данные.

Лемма 1 составляет основу метода дополнительного аргумента. Лемма 1 доказывается так же, как в работах [2], [4], [5], [7]–[9].

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для доказательства существования решения задачи (4), (2) в классе ограниченных функций будем использовать систему интегральных уравнений (24)–(27).

Обозначим  $\Gamma_T = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$ ,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R |\varphi_i^{(l)}| | i = 1, 2, l = \overline{0, 2}\},$$

$$l = \max\{\sup_{[0, T]} a_1(t), \sup_{[0, T]} b_1(t), \sup_{[0, T]} b_2(t), \sup_{[0, T]} c_1(t), \sup_{[0, T]} g_1(t), |a_2|, |g_2|\},$$

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s, t, x)|, \|f\| = \sup_{\Omega_T} |f(t, x)|,$$

$\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$  – пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной  $t$ , дважды дифференцируемых по переменной  $x$ , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на  $\Omega_T$ ,

$\bar{C}^2(R)$  – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на  $R$ ,

$C([0, T])$  – пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке  $[0, T]$ .

Введем условия, играющие ключевую роль в доказательстве нелокальной разрешимости задачи Коши (4), (2):

$$\begin{aligned} a_1(t) > 0, b_1(t) > 0, b_2(t) > 0, c_1(t) > 0, g_1(t) > 0, \quad t \in [0, T], \\ \varphi'_1(x) \geq 0, \varphi'_2(x) \geq 0, \quad x \in R. \end{aligned} \quad (28)$$

Справедлива теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (4), (2), при которых решение

$u(t, x) = w_1(t, t, x)$ ,  $v(t, x) = w_2(t, t, x)$  имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ ,  $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$  и выполняются условия (28). Тогда для любого  $0 \leq t \leq T_2$ , где  $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ , задача Коши (4), (2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_{T_2})$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (24) – (27).

Доказательство теоремы разбито на две леммы.

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ ,  $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$  и выполняются условия (28). Тогда система интегральных уравнений (24)–(27) имеет единственное решение  $w_j \in \bar{C}^{1,1,1}(\Gamma_{T_2})$ , где  $j = \overline{1, 4}$ ,

$$T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l}).$$

*Доказательство.* Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [4]. Поэтому приведем только его ключевые пункты. Основная трудность состоит в том, что в системе (24)–(27) присутствует суперпозиция неизвестных функций. Для преодоления этой трудности используется «двухуровневый» алгоритм последовательных приближений.

Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (24)–(27) зададим равенствами:

$$w_{10}(s, t, x) = \varphi_1(x), \quad w_{20}(s, t, x) = \varphi_2(x), \quad w_{30}(s, t, x) = \varphi_2(x), \quad w_{40}(s, t, x) = \varphi_1(x).$$

Первое и последующие приближения системы уравнений (24)–(27) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$w_{1n}(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n})d\tau) + \int_0^s (a_2w_{1n} + b_2(\tau)w_{3n})d\tau, \quad (29)$$

$$w_{2n}(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4n}(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_{2n}(\tau, t, x))d\tau) + \int_0^s g_2w_{2n}(\tau, t, x)d\tau, \quad (30)$$

$$w_{3n}(s, t, x) = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n})d\tau), \quad (31)$$

$$w_{4n}(s, t, x) = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n} + g_1(\tau)w_{2n})d\tau). \quad (32)$$

Для системы уравнений (29)–(32) нулевое приближение определим равенствами:

$$w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Для системы уравнений (29)–(32) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w_{1n}^{k+1}(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1n}^k + b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau) + \int_0^s (a_2w_{1n}^k + b_2(\tau)w_{3n}^k)d\tau, \quad (33)$$

$$w_{2n}^{k+1}(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4n}^k(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_{2n}^k(\tau, t, x))d\tau) + \int_0^s g_2w_{2n}^k(\tau, t, x)d\tau, \quad (34)$$

$$w_{3n}^{k+1}(s, t, x) = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n}^k + b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau), \quad (35)$$

$$w_{4n}^{k+1}(s, t, x) = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n}^k + g_1(\tau)w_{2n}^k)d\tau). \quad (36)$$

Так же, как в [2], [4], установлено, что для всех  $0 \leq t \leq T_1$ , где  $T_1 = \min(\frac{1}{20C_\varphi l}, \frac{1}{4l})$ , последовательные приближения (33)–(36) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (29)–(32), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные  $\partial_x w_{jn}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Справедливы оценки:

$$\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi, \quad j = \overline{1, 4}, \quad \|\partial_x w_{1n}\| \leq 4C_\varphi,$$

$$\|\partial_x w_{2n}\| \leq 4C_\varphi, \quad \|\partial_x w_{3n}\| \leq 6C_\varphi, \quad \|\partial_x w_{4n}\| \leq 6C_\varphi.$$

Так же, как в [2], [4], установлено, что для всех  $0 \leq t \leq T_2$ , где  $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ , последовательные приближения (29)–(32) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (24)–(27), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные  $\partial_x w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Справедливы оценки:

$$\|w_j\| \leq 2C_\varphi, \quad j = \overline{1, 4}, \quad \|\partial_x w_1\| \leq 4C_\varphi,$$

$$\|\partial_x w_2\| \leq 4C_\varphi, \quad \|\partial_x w_3\| \leq 6C_\varphi, \quad \|\partial_x w_4\| \leq 6C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что  $w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной  $t$  на  $\Gamma_{T_2}$ . Единственность решения доказывается так же, как в статье [4].  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ ,  $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$  и выполняются условия (28). Тогда функции  $\{w_j\}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , представляющие собой решение системы уравнений (24) - (27), имеют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  на  $\Gamma_{T_2}$ , где  $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10i})$ .

*Доказательство.* Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [2]. Поэтому приведем только его ключевые пункты. Дважды продифференцируем последовательные приближения (29)–(32) по  $x$  и обозначим  $\omega_j^n = w_{jnxx}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_1^n = & -\varphi_1' \int_0^t (a_1(\tau)\omega_1^n + b_1(\tau)\omega_3^n) d\tau + \int_0^s (a_2\omega_1^n + b_2(\tau)\omega_3^n) d\tau + \\ & + \varphi_1'' \cdot (1 - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx}) d\tau)^2, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^n = & -\varphi_2' \int_0^t (c_1(\tau)\omega_4^n + g_1(\tau)\omega_2^n) d\tau + \int_0^s g_2\omega_2^n d\tau + \\ & + \varphi_2'' \cdot (1 - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx}) d\tau)^2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \omega_3^n = & \omega_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx}) d\tau)^2 - \\ & - w_{2(n-1)x} \int_s^t (a_1(\tau)\omega_1^n + b_1(\tau)\omega_3^n) d\tau, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \omega_4^n = & \omega_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx}) d\tau)^2 - \\ & - w_{1(n-1)x} \int_s^t (c_1(\tau)\omega_4^n + g_1(\tau)\omega_2^n) d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

При выполнении условий (28) с учетом установленных выше оценок

$\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , получаем

$$|\int_s^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n}) d\tau| \leq tl(\|w_{1n}\| + \|w_{3n}\|) \leq 4tlC_\varphi \leq \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \leq 0.16,$$

$$|\int_s^t (c_1(\tau)w_{4n} + g_1(\tau)w_{2n}) d\tau| \leq tl(\|w_{4n}\| + \|w_{2n}\|) \leq 4tlC_\varphi \leq \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \leq 0.16.$$

Зафиксируем точку  $x_0 \in R$ . Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x \mid x_0 - 0.16 \leq x \leq x_0 + 0.16\}.$$

Так же, как в статье [2], доказано при выполнении условий (28) для всех  $x_1, x_2 \in R$  справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}(s, t, x_1) - \eta_{1n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad (41)$$

$$|\eta_{2n}(s, t, x_1) - \eta_{2n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad (42)$$

где

$$\eta_{1n}(s, t, x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n}(\tau, t, x) + b_1(\tau)w_{3n}(\tau, t, x)) d\tau,$$

$$\eta_{2n}(s, t, x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n}(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_{2n}(\tau, t, x)) d\tau.$$

В замкнутом ограниченном множестве  $\Omega_{x_0}$  непрерывные вторые производные функций  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$  будут равномерно непрерывны. Так же, как в статье [2], доказано, что при выполнении условий (28) доказана равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n$ ,  $\omega_2^n$  по  $x$

при  $x \in \Omega_{x_0}$ , из которой следует равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  в выбранной произвольной точке  $x_0 \in R$ . Равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  используется для доказательства сходимости последовательных приближений  $\omega_j^n, j = \overline{1, 4}$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1^n &= -\varphi_1'(\eta_1(0, t, x)) \int_0^t (a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n) d\tau + \int_0^s (a_2\tilde{\omega}_1^n + b_2(\tau)\tilde{\omega}_3^n) d\tau + \\ &\quad + \varphi_1'' \cdot \left(1 - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x}) d\tau\right)^2, \\ \tilde{\omega}_2^n &= -\varphi_2'(\eta_2(0, t, x)) \int_0^t (c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n) d\tau + \int_0^s g_2\tilde{\omega}_2^n d\tau + \\ &\quad + \varphi_2'' \cdot \left(1 - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x}) d\tau\right)^2, \\ \tilde{\omega}_3^n &= \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot \left(1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x}) d\tau\right)^2 - w_{2x}(s, s, \eta_1(s, t, x)) \int_s^t (a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n) d\tau, \\ \tilde{\omega}_4^n &= \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot \left(1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x}) d\tau\right)^2 - w_{1x}(s, s, \eta_2(s, t, x)) \int_s^t (c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n) d\tau.\end{aligned}$$

Доказано, что при выполнении условий (28) на  $\Gamma_{T_2}$   $\tilde{\omega}_j^n \rightarrow \tilde{\omega}_j, j = \overline{1, 4}$ , справедливы оценки:

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leq 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_2\| \leq 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_3\| \leq 3C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_4\| \leq 3C_\varphi.$$

Далее установлено, что при выполнении условий (28) на  $\Gamma_{T_2}$  последовательные приближения  $\omega_j^n$  сходятся к функциям  $\tilde{\omega}_j, j = \overline{1, 4}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Получаем, что при выполнении условий (28)  $w_{jnx} \rightarrow w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$ , где функции  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}, j = \overline{1, 4}$  непрерывные и ограниченные на  $\Gamma_{T_2}$ .

Далее установлено, что при выполнении условий (28) существуют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}, j = \overline{1, 4}$  на  $\Gamma_{T_2}$ .  $\square$

### 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Справедлива теорема, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка  $t \in [0, T]$ ).

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R), a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$  и выполняются условия (28).

Тогда для любого  $T > 0$  задача Коши (4), (2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (24) - (27).

*Доказательство.* Продифференцируем систему уравнений (4) по  $x$  и обозначим  $p(t, x) = u_x(t, x), q(t, x) = v_x(t, x)$ , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t p + (a_1(t)u(t, x) + b_1(t)v(t, x))\partial_x p = -a_1(t)p^2 - b_1(t)pq + a_2p + b_2(t)q, \\ \partial_t q + (c_1(t)u(t, x) + g_1(t)v(t, x))\partial_x q = -g_1(t)q^2 - c_1(t)pq + g_2q, \\ p(0, x) = \varphi_1'(x), \quad q(0, x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \quad (43)$$

Добавим к системе уравнений (18)–(23) два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s, t, x)}{ds} = -a_1(s)\gamma_1^2 - b_1(s)\gamma_1\gamma_2(s, s, \eta_1) + a_2\gamma_1 + b_2(s)\gamma_2(s, s, \eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s, t, x)}{ds} = -g_1(s)\gamma_2^2 - c_1(s)\gamma_1(s, s, \eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2. \end{cases} \quad (44)$$

с условиями:  $\gamma_1(0, t, x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0, t, x) = \varphi_2'(\eta_2)$ .

Перепишем систему уравнений (44) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) + \int_0^s [-a_1(\tau)\gamma_1^2 + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) + a_2\gamma_1]d\tau, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) + \int_0^s [-g_1(\tau)\gamma_2^2 - c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2]d\tau. \end{cases} \quad (45)$$

Существование непрерывного решения системы (45) на  $\Gamma_{T_2}$ , где

$T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$  при выполнении условий (28) проводится с помощью метода последовательных приближений. Определим последовательные приближения:

$$\begin{cases} \gamma_1^{n+1} = \varphi'_1(\eta_1) + \int_0^s [-a_1(\tau)(\gamma_1^n)^2 + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1^n)\gamma_2^n(\tau, \tau, \eta_1) + a_2\gamma_1^n]d\tau, \\ \gamma_2^{n+1} = \varphi'_2(\eta_2) + \int_0^s [-g_1(\tau)(\gamma_2^n)^2 - c_1(\tau)\gamma_1^n(\tau, \tau, \eta_2)\gamma_2^n + g_2\gamma_2^n]d\tau, \end{cases} \quad (46)$$

при этом  $\gamma_1^0 = \varphi'_1(\eta_1)$ ,  $\gamma_2^0 = \varphi'_2(\eta_2)$ . При выполнении условий (28) на  $\Gamma_{T_2}$  справедливы оценки:  $|\gamma_i^{n+1}| \leq 2C_\varphi$ ,

Так же, как в статье [2], установлено, что для всех  $0 \leq t \leq T_2$ , где

$T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ , справедливо неравенство:

$$\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\| + \|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\| \leq 0.52(\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| + \|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\|),$$

из которого следует, что последовательные приближения  $\{\gamma_i^n\}$ ,  $i = 1, 2$  сходятся к непрерывному решению системы (45) на  $\Gamma_{T_2}$  при выполнении условий (28). Для решения будут справедливы оценки:

$$|\gamma_i| \leq 2C_\varphi, \quad i = 1, 2.$$

Продифференцируем по  $x$  последовательные приближения (46):

$$\begin{cases} \gamma_{1x}^{n+1} = \varphi''_1(\eta_1)\eta_{1x} + \\ + \int_0^s [(a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1^n - b_1(\tau)\gamma_2^n)\gamma_{1x}^n + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1^n)\gamma_{2x}^n(\tau, \tau, \eta_1)\eta_{1x}]d\tau, \\ \gamma_{2x}^{n+1} = \varphi''_2(\eta_2)\eta_{2x} + \\ + \int_0^s [(g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2^n - c_1(\tau)\gamma_1^n)\gamma_{2x}^n - c_1(\tau)\gamma_2^n\gamma_{1x}^n(\tau, \tau, \eta_2)\eta_{2x}]d\tau, \end{cases} \quad (47)$$

где

$$\eta_{1x}(s, t, x) = 1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x})d\tau,$$

$$\eta_{2x}(s, t, x) = 1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x})d\tau.$$

При выполнении условий (28) на  $\Gamma_{T_2}$  справедливы оценки:

$$|\eta_{ix}| \leq 1, \quad |\gamma_{ix}^{n+1}| \leq 5C_\varphi, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{21} = \varphi''_1(\eta_1)\eta_{1x} + \\ + \int_0^s [(a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2)\omega_{21} + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}(\tau, \tau, \eta_1)\eta_{1x}]d\tau, \\ \omega_{22} = \varphi''_2(\eta_2)\eta_{2x} + \\ + \int_0^s [(g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22} - c_1(\tau)\omega_{21}(\tau, \tau, \eta_2)\gamma_2\eta_{2x}]d\tau. \end{cases} \quad (48)$$



Докажем существования непрерывного решения системы (48) с помощью метода последовательных приближений:

$$\begin{cases} \omega_{21}^{n+1} = \varphi_1''(\eta_1)\eta_{1x} + \\ + \int_0^s [(a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2)\omega_{21}^n + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}^n(\tau, \tau, \eta_1)\eta_{1x}]d\tau, \\ \omega_{22}^{n+1} = \varphi_2''(\eta_2)\eta_{2x} + \\ + \int_0^s [(g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}^n - c_1(\tau)\omega_{21}^n(\tau, \tau, \eta_2)\gamma_2\eta_{2x}]d\tau. \end{cases} \quad (49)$$

При выполнении условий (28) на  $\Gamma_{T_2}$  справедливы оценки:

$$\|\omega_{2i}^{n+1}\| \leq 5C_\varphi, \quad i = 1, 2.$$

Из (49) следует, что

$$\begin{aligned} |\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n| &\leq \left| \int_0^s (a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2)(\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1})d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_0^s (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)(\omega_{22}^n(\tau, \tau, \eta_1) - \omega_{22}^{n-1}(\tau, \tau, \eta_1))\eta_{1x}d\tau \right|, \\ |\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n| &\leq \left| \int_0^s (g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1)(\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1})d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_0^s c_1(\tau)\gamma_2(\omega_{21}^n(\tau, \tau, \eta_2) - \omega_{21}^{n-1}(\tau, \tau, \eta_2))\eta_{2x}d\tau \right|. \end{aligned}$$

По свойствам интегралов, модулей, супремума функции получаем, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n| &\leq l \int_0^s (1 + 2|\gamma_1| + |\gamma_2|) |\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}| d\tau + \\ &+ l \int_0^s (1 + |\gamma_1|) \cdot |\omega_{22}^n(\tau, \tau, \eta_1) - \omega_{22}^{n-1}(\tau, \tau, \eta_1)| \cdot |\eta_{1x}| d\tau, \\ |\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n| &\leq l \int_0^s (1 + 2|\gamma_2| + |\gamma_1|) |\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}| d\tau + \\ &+ l \int_0^s |\gamma_2| \cdot |\omega_{21}^n(\tau, \tau, \eta_2) - \omega_{21}^{n-1}(\tau, \tau, \eta_2)| \cdot |\eta_{2x}| d\tau. \end{aligned}$$

Так как  $|\gamma_i| \leq 2C_\varphi$ ,  $i = 1, 2$ ,  $|\eta_{1x}| \leq 1$ , то

$$\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\| \leq (6ltC_\varphi + lt) \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\| + (2ltC_\varphi + lt) \|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\|.$$

Так как  $|\gamma_i| \leq 2C_\varphi$ ,  $i = 1, 2$ ,  $|\eta_{2x}| \leq 1$ , то

$$\|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| \leq (6ltC_\varphi + lt) \|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\| + 2ltC_\varphi \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\|.$$

Сложим последние неравенства, получим:

$$\begin{aligned} &\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\| + \|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| \leq \\ &\leq (8ltC_\varphi + lt) \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\| + (8ltC_\varphi + 2lt) \|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\|. \end{aligned}$$

Для всех  $0 \leq t \leq T_2$ , где  $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ , справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} &\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\| + \|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| \leq \\ &\leq \left(\frac{8lC_\varphi}{25C_\varphi l} + \frac{l}{10l}\right) \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\| + \left(\frac{8lC_\varphi}{25C_\varphi l} + \frac{2l}{10l}\right) \|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\|, \\ &\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\| + \|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| \leq 0.42 \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\| + 0.52 \|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\|, \\ &\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\| + \|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| \leq 0.52 (\|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\| + \|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\|). \end{aligned}$$

Получаем, что при выполнении условий (28) последовательные приближения  $\{\omega_{2i}^n\}$ ,  $i = 1, 2$ , сходятся к непрерывному решению системы (48) на  $\Gamma_{T_2}$ .

Из (47), (48) следует, что

$$\begin{aligned} \|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| &\leq \left| \int_0^s (a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1))(\gamma_{1x}^n - \omega_{21})d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_0^s (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)(\gamma_{2x}^n(\tau, \tau, \eta_1) - \omega_{22}(\tau, \tau, \eta_1))\eta_{1x}d\tau \right| + |\sigma_{31}^n|, \\ \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| &\leq \left| \int_0^s (g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2))(\gamma_{2x}^n - \omega_{22})d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_0^s (-c_1(\tau)\gamma_2)(\gamma_{1x}^n(\tau, \tau, \eta_2) - \omega_{21}(\tau, \tau, \eta_2))\eta_{2x}d\tau \right| + |\sigma_{41}^n|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \sigma_{31}^n = \int_0^s [(-2a_1(\tau)\gamma_{1x}^n - b_1(\tau)\gamma_{2x}^n\eta_{1x})(\gamma_1^n - \gamma_1) - b_1(\tau)\gamma_{1x}^n(\gamma_2^n - \gamma_2)]d\tau,$$

$$\sigma_{41}^n = \int_0^s [(-2g_1(\tau)\gamma_{2x}^n - c_1(\tau)\gamma_{1x}^n\eta_{2x})(\gamma_2^n - \gamma_2) - c_1(\tau)\gamma_{2x}^n(\gamma_1^n - \gamma_1)]d\tau.$$

По свойствам интегралов, модулей, супремума функции получаем, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}| &\leq l \int_0^s (1 + 2|\gamma_1| + |\gamma_2|) |\gamma_{1x}^n - \omega_{21}| d\tau + \\ &+ l \int_0^s (1 + |\gamma_1|) \cdot |\gamma_{2x}^n(\tau, \tau, \eta_1) - \omega_{22}(\tau, \tau, \eta_1)| \cdot |\eta_{1x}| d\tau + |\sigma_{31}^n|, \\ |\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}| &\leq l \int_0^s (1 + 2|\gamma_2| + |\gamma_1|) |\gamma_{2x}^n - \omega_{22}| d\tau + \\ &+ l \int_0^s |\gamma_2| \cdot |\gamma_{1x}^n(\tau, \tau, \eta_2) - \omega_{21}(\tau, \tau, \eta_2)| \cdot |\eta_{2x}| d\tau + |\sigma_{41}^n|. \end{aligned}$$

Так как  $|\gamma_1| \leq 2C_\varphi$ ,  $|\gamma_2| \leq 2C_\varphi$ ,  $|\eta_{1x}| \leq 1$ ,  $|\eta_{2x}| \leq 1$ , то

$$\begin{aligned} \|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| &\leq (6ltC_\varphi + lt) \|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + (2ltC_\varphi + lt) \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\| + |\sigma_{31}^n|, \\ \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| &\leq (6ltC_\varphi + lt) \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\| + 2ltC_\varphi \|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + |\sigma_{41}^n|. \end{aligned}$$

Сложим последние неравенства, получим:

$$\begin{aligned} &\|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| \leq \\ &\leq (8ltC_\varphi + lt) \|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + (8ltC_\varphi + 2lt) \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\| + |\sigma_{31}^n| + |\sigma_{41}^n|. \end{aligned}$$

Для всех  $0 \leq t \leq T_2$ , где  $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ , справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| &\leq 0.42 \|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + 0.52 \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\| + |\sigma_{31}^n| + |\sigma_{41}^n|, \\ \|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| &\leq 0.52 (\|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\|) + |\sigma_{31}^n| + |\sigma_{41}^n|. \end{aligned}$$

Пользуясь равномерной сходимостью  $\gamma_1^n \Rightarrow \gamma_1$ ,  $\gamma_2^n \Rightarrow \gamma_2$ , выберем  $n = N$  так, чтобы  $|\sigma_{31}^n| + |\sigma_{41}^n| < \varepsilon$ . Тогда

$$\|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| \leq 0.52 (\|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\|) + \varepsilon. \quad (50)$$

Обозначим  $S_{1N} = \|\gamma_{1x}^N - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^N - \omega_{22}\|$ .

С помощью метода математической индукции докажем, что справедливо неравенство:

$$\left\| \gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21} \right\| + \left\| \gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22} \right\| \leq (0.52)^p S_{1N} + (1 + 0.52 + \dots + (0.52)^{p-1}) \varepsilon, \quad (51)$$

где  $p = 1, 2, \dots$

Из (50) следует, что для  $N + 1$  справедливо неравенство:

$$\left\| \gamma_{1x}^{N+1} - \omega_{21} \right\| + \left\| \gamma_{2x}^{N+1} - \omega_{22} \right\| \leq 0.52 S_{1N} + \varepsilon,$$

Из (50) следует, что справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \|\gamma_{1x}^{N+2} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+2} - \omega_{22}\| &\leq 0.52(\|\gamma_{1x}^{N+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+1} - \omega_{22}\|), \\ \|\gamma_{1x}^{N+2} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+2} - \omega_{22}\| &\leq 0.52(0.52S_{1N} + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Получаем, что для  $N + 2$  справедливо неравенство:

$$\|\gamma_{1x}^{N+2} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+2} - \omega_{22}\| \leq (0.52)^2 S_{1N} + (1 + 0.52)\varepsilon.$$

Предположим, что для  $N + p$ , ( $p = 1, 2, \dots$ ) справедливо неравенство:

$$\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| \leq (0.52)^p S_{1N} + (1 + 0.52 + \dots + (0.52)^{p-1})\varepsilon.$$

Тогда для  $N + p + 1$ , ( $p = 1, 2, \dots$ ) получаем:

$$\begin{aligned} \|\gamma_{1x}^{N+p+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p+1} - \omega_{22}\| &\leq 0.52(\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\|) + \varepsilon, \\ \|\gamma_{1x}^{N+p+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p+1} - \omega_{22}\| &\leq 0.52((0.52)^p S_{1N} + (1 + 0.52 + \dots + (0.52)^{p-1})\varepsilon) + \varepsilon, \\ \|\gamma_{1x}^{N+p+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p+1} - \omega_{22}\| &\leq (0.52)^{p+1} S_{1N} + (1 + 0.52 + \dots + (0.52)^p)\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство (51), где  $p = 1, 2, \dots$ , из которого следует, что

$$\begin{aligned} \|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| &< (0.52)^p S_{1N} + \frac{1}{1 - 0.52}\varepsilon, \\ \|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| &< (0.52)^p S_{1N} + \frac{1}{0.48}\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$ . Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{ix}^n = \omega_{2i}$ ,  $i = 1, 2$ . Получаем, что существует непрерывная производная по  $x$  у решения системы (45),  $\gamma_{ix} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} = \omega_{2i}$ . Справедливы оценки:

$$\|\gamma_{ix}\| \leq 5C_\varphi, \quad i = 1, 2.$$

Так же, как в статье [1], доказывается, что существует непрерывная производная по  $t$  у решения системы (45). Сначала продифференцируем по переменной  $t$  систему уравнений (45):

$$\begin{cases} \gamma_{1t}(s, t, x) = \varphi_1''(\eta_1)\eta_{1t} + \\ + \int_0^s [(a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1))\gamma_{1t} + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_{2x}\eta_{1t}]d\tau, \\ \gamma_{2t}(s, t, x) = \varphi_2''(\eta_2)\eta_{2t} + \\ + \int_0^s [(g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2))\gamma_{2t} - c_1(\tau)\gamma_2\gamma_{1x}\eta_{2t}]d\tau, \end{cases} \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{1t}(s, t, x) &= -a_1(t)w_1 - b_1(t)w_3 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1t} + b_1(\tau)w_{3t})d\tau, \\ \eta_{2t}(s, t, x) &= -c_1(t)w_4 - g_1(t)w_2 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4t} + g_1(\tau)w_{2t})d\tau. \end{aligned}$$

Продифференцируем по переменной  $t$  систему уравнений (44), получим:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_{1t}(s, t, x)}{ds} = (a_2 - 2a_1(s)\gamma_1 - b_1(s)\gamma_2(s, s, \eta_1))\gamma_{1t} + (b_2(s) - b_1(s)\gamma_1)\gamma_{2x}\eta_{1t}, \\ \frac{d\gamma_{2t}(s, t, x)}{ds} = (g_2 - 2g_1(s)\gamma_2 - c_1(s)\gamma_1(s, s, \eta_2))\gamma_{2t} - c_1(s)\gamma_{1x}\gamma_2\eta_{2t}. \end{cases} \quad (53)$$

с условиями:  $\gamma_{1t}(0, t, x) = \varphi_1''(\eta_1)\eta_{1t}$ ,  $\gamma_{2t}(0, t, x) = \varphi_2''(\eta_2)\eta_{2t}$ . Следовательно,

$$\gamma_{1t} = \varphi_1''(\eta_1)\eta_{1t} \exp\left(\int_0^s (a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1))d\tau\right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^s (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_{2x}\eta_{1t} \exp\left(\int_\tau^s (a_2 - 2a_1(\nu)\gamma_1 - b_1(\nu)\gamma_2(\nu, \nu, \eta_1))d\nu\right)d\tau, \\
 & \gamma_{2t} = \varphi_2''(\eta_2)\eta_{2t} \exp\left(\int_0^s (g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2))d\tau\right) - \\
 & - \int_0^s c_1(\tau)\gamma_2\gamma_{1x}\eta_{2t} \exp\left(\int_\tau^s (g_2 - 2g_1(\nu)\gamma_2 - c_1(\nu)\gamma_1(\nu, \nu, \eta_2))d\nu\right)d\tau.
 \end{aligned}$$

Следовательно, существуют функции  $\gamma_{1t}$ ,  $\gamma_{2t}$ , удовлетворяющие системе (52). Далее дифференцируем по переменной  $t$  последовательные приближения (46). Затем при выполнении условий (28) на  $\Gamma_{T_2}$  доказываем сходимость

$\gamma_{1t}^n \rightarrow \gamma_{1t}$ ,  $\gamma_{2t}^n \rightarrow \gamma_{2t}$ , тем самым установим, что

$$\gamma_{1t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \quad \gamma_{2t} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}.$$

Итак, мы доказали существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (45). Следовательно,  $\gamma_1(t, t, x) = p(t, x) = \partial_x u$ ,  $\gamma_2(t, t, x) = q(t, x) = \partial_x v$ .

Так же, как в статье [2], установлено, что справедливы оценки:

$$\|v\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T), \quad \|u\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)). \quad (54)$$

Из (44) имеем:

$$\begin{cases}
 \gamma_1(s, t, x) = \varphi_1'(\eta_1) \exp\left(-\int_0^s (a_1(\tau)\gamma_1 + b_1(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) - a_2)d\tau\right) + \\
 + \int_0^s b_2(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) \exp\left(-\int_\tau^s (a_1(\tau)\gamma_1 + b_1(\tau)\gamma_2(\nu, \nu, \eta_1) - a_2)d\nu\right)d\tau, \\
 \gamma_2(s, t, x) = \varphi_2'(\eta_2) \exp\left(-\int_0^s (g_1(\tau)\gamma_2 + c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2) - g_2)d\tau\right).
 \end{cases} \quad (55)$$

Так как  $\varphi_2'(x) \geq 0$ ,  $x \in R$ , то из (55) следует, что  $\gamma_2 \geq 0$  на  $\Gamma_T$ . Так как  $\varphi_1'(x) \geq 0$ ,  $x \in R$ ,  $b_2(t) > 0$ ,  $\gamma_2 \geq 0$  на  $\Gamma_T$ , то из (55) следует, что  $\gamma_1 \geq 0$  на  $\Gamma_T$ . Так как  $\gamma_1 \geq 0$ ,  $\gamma_2 \geq 0$  на  $\Gamma_T$ ,  $a_1(t) > 0$ ,  $b_1(t) > 0$ ,  $b_2(t) > 0$ ,  $c_1(t) > 0$ ,  $g_1(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$ , то из (55) следует, что на  $\Gamma_T$  справедливы оценки:

$\|\gamma_2\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T)$ ,  $\|\gamma_1\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T))$ , следовательно, справедливы оценки:

$$\|\partial_x v\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T), \quad \|\partial_x u\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)). \quad (56)$$

Так же, как в [1], установлено, что при всех  $t$  и  $x$  справедливы оценки:

$$|\partial_{x^2}^2 u| \leq E_{11} ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{21} \sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}} sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \quad (57)$$

$$|\partial_{x^2}^2 v| \leq E_{21} ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{11} \sqrt{\frac{C_{21}}{C_{12}}} sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \quad (58)$$

где  $E_{11}$ ,  $E_{21}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  – постоянные, определяемые через исходные данные.

Полученные глобальные оценки (54), (56)–(58) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток  $[0, T]$ . Возьмем в качестве начальных значений  $u(T_0, x)$ ,  $v(T_0, x)$ , используя теорему 1, продлим решение на некоторый промежуток  $[T_0, T_1]$ , а затем, возьмем в качестве начальных значений  $u(T_1, x)$ ,  $v(T_1, x)$ , используя теорему 1, продлим решение на промежуток  $[T_1, T_2]$ . За конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Единственность решения задачи Коши (4), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.  $\square$

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + ((t+1)u(t, x) + (2t+1)v(t, x))\partial_x u(t, x) = -3u(t, x) + (2t+3)v(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + ((t+2)u(t, x) + (2t+4)v(t, x))\partial_x v(t, x) = -2v(t, x), \end{cases} \quad (59)$$

где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции,  $(t, x) \in \Omega_T$  с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_1(x) = 1 + 5 \operatorname{arctg} x, \quad v(0, x) = \varphi_2(x) = -\frac{1}{e^x + 2}. \quad (60)$$

Так как  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ ,  $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$ ,

$$a_1(t) = t + 1 > 0, \quad b_1(t) = 2t + 1 > 0, \quad b_2(t) = 2t + 3 > 0, \quad c_1(t) = t + 2 > 0,$$

$$g_1(t) = 2t + 4 > 0, \quad t \in [0, T], \quad \varphi_1'(x) = \frac{5}{1+x^2} > 0, \quad \varphi_2'(x) = \frac{e^x}{(e^x+2)^2} > 0, \quad x \in R,$$

то по теореме 2 задача Коши (59), (60) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. *Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. Вып. 3 (177). 2013. С. 190–201.
2. Донцова М.В. *Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида* // Уфимский математический журнал. Т.6, №4. 2014. С. 71–82.
3. Рождественский Б.Л., Яненко Н.И. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*. М. Наука. 1978. 592 с.
4. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. *К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // Доклады РАН. Т.379. №1. 2001. С. 16–21.
5. Иманалиев М.И., Панков П.С., Алексеенко С.Н. *Метод дополнительного аргумента* // Вестник КазНУ. Серия «Математика, механика, информатика». Спец. выпуск Алматы. №1. 2006. С. 60–64.
6. Донцова М.В. *Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами* // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. 2014. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).
7. Шемякина Т.А. *Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки. Вып. 2 (146). 2012. С. 130–131.
8. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. *Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси* // Журнал Средневолжского математического общества. Т.18. № 2. 2016. С. 115–124.
9. Донцова М.В. *Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. №3. 2014. С. 21–36.

Марина Владимировна Донцова,  
 ННГУ имени Н.И. Лобачевского,  
 пр. Гагарина, 23,  
 603950, г. Нижний Новгород, Россия  
 E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru