ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 3 (2018). С. 60-78.

УДК 517.518.82

О РОСТЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПОЛИНОМАХ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СТАНДАРТНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М.А. ПЕТРОСОВА, И.В. ТИХОНОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Тематика работы связана с одним общим направлением теории аппроксимации, в рамках которого изучают скорость роста коэффициентов алгебраических полиномов при равномерных приближениях непрерывных функций. Важную роль здесь играют классические полиномы Бернштейна. Будет подробно исследован модельный пример полиномов Бернштейна для стандартного модуля, взятого на симметричном отрезке. Ставится вопрос о росте коэффициентов в этих полиномах при явной алгебраической записи по степеням независимой переменной. Выясняется, что в первых пятнадцати полиномах рост коэффициентов почти не наблюдается. Затем ситуация изменяется, и возникают коэффициенты экспоненциального роста. Внимание авторов уделено поведению максимального коэффициента, для которого найдена точная экспоненциальная асимптотика и установлены подходящие двусторонние оценки (см. теорему 2 ниже). Как следует из полученного результата, максимальный коэффициент растет со скоростью $2^{n/2}/\,n^2$, где n — номер полинома Бернштейна. Показано, что схожим ростом обладают коэффициенты, «равноудаленные» от максимального (см. теорему 3). Группа самых «больших» коэффициентов располагается в центральной части изучаемых полиномов Бернштейна, а на краях коэффициенты оказываются достаточно малыми. Отдельно рассмотрен вопрос о поведении суммы модулей всех коэффициентов при увеличении номера полинома Бернштейна. Данная сумма допускает явное выражение, не вычисляемое в смысле обычных комбинаторных тождеств. На основе предварительно найденного рекуррентного соотношения удается получить точную асимптотику для суммы модулей всех коэффициентов и дать сопутствующие двусторонние оценки (см. теорему 4). Скорость роста суммы соответствует $2^{n/2}/\,n^{3/2}$. В конце статьи проведено сравнение этого результата с общей оценкой Рулье и поставлены новые задачи для изучения.

Ключевые слова: стандартный модуль, полиномы Бернштейна, рост коэффициентов.

Mathematics Subject Classification: 41A10, 11B83, 05A10

1. Введение

В теории аппроксимации есть одно специальное направление [1]–[7], посвященное изучению возможной скорости роста коэффициентов в алгебраических полиномах при равномерных приближениях непрерывных функций на том или ином заданном множестве.

M.A. Petrosova, I.V. Tikhonov, V.B. Sherstyukov, On growth rate of coefficients in Bernstein polynomials for the standard modulus function on a symmetric interval.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Поступила 17 декабря 2017 г.

Некоторые результаты (см. [3]–[6]) получены путем оценок коэффициентов в соответствующих полиномах Бернштейна. Такие оценки давались, как правило, без привязки к конкретным приближаемым функциям и потому носили достаточно «грубый» характер. Выбор индивидуального примера позволяет существенно уточнить реальную скорость роста коэффициентов в полиномах Бернштейна.

Так, в работе [8] для функции $f(x) = |2x - 1|$, взятой на $[0, 1]$, была найдена явная алгебраическая запись полиномов Бернштейна по степеням переменной x и показано, что максимальный коэффициент в этой записи растет с экспоненциальной скоростью, примерно, как $2^{3n/2}$, где n — номер полинома Бернштейна. Ряд дополнительных фактов про коэффициенты полиномов Бернштейна на стандартном отрезке $[0, 1]$ отмечен в работе [9].

Любопытно, что при переносе конструкции Бернштейна на симметричный отрезок $[-1, 1]$ характер подобных результатов несколько меняется. Специфика симметричного отрезка в теории полиномов Бернштейна была выявлена сравнительно недавно (см. [10], [11]). В частности, в работе [11] установлена явная алгебраическая запись по степеням переменной x для полиномов Бернштейна от стандартного модуля $f(x) = |x|$ на симметричном отрезке $[-1, 1]$. Итоговая формула оказалась простой и изящной. Используем сейчас результаты [11] для оценки скорости роста коэффициентов в возникающих полиномах.

За общей информацией по теории полиномов Бернштейна отсылаем к руководствам [12]–[16].

2. Постановка задачи

Для функции $f \in C[-1, 1]$ на симметричном отрезке $[-1, 1]$ полиномы Бернштейна вводят по правилу

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \,(1 + x)^k \,(1 - x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты. При выборе стандартного модуля

$$f(x) = |x|, \qquad x \in [-1, 1], \tag{2}$$

формула (1) приобретает вид

$$B_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{2k}{n} - 1\right| C_n^k \,(1 + x)^k \,(1 - x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Полиномы (3) обозначаем просто — через $B_n(x)$, без указания на функцию f, поскольку никаких других порождающих функций, кроме (2), в данной работе не рассматриваем.

Среди прочего, для полиномов (3) действует специальное *правило склеивания*, означающее, что

$$B_{2m+1}(x) = B_{2m}(x), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Соотношение (4) есть проявление общего закона регулярного попарного совпадения, действующего на $[-1, 1]$ для полиномов Бернштейна от кусочно линейных функций с рациональными абсциссами точек излома (см. [10], [11]). На основании (4) рассматриваем далее лишь полиномы с четными номерами

$$B_{2m}(x) = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \left|\frac{k}{m} - 1\right| C_{2m}^k \,(1 + x)^k \,(1 - x)^{2m-k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Перейдем к алгебраической записи по степеням переменной x.

Раскрывая скобки и приводя подобные, для первых полиномов получаем

$$B_2(x) = \frac{1}{2}\,\left(1 + x^2\right),$$

$$B_4(x) = \frac{1}{8}\,\left(3 + 6x^2 - x^4\right),$$

$$B_6(x) = \frac{1}{16}\,\left(5 + 15x^2 - 5x^4 + x^6\right),$$

$$B_8(x) = \frac{1}{128}\,\left(35 + 140x^2 - 70x^4 + 28x^6 - 5x^8\right),$$

$$B_{10}(x) = \frac{1}{256}\,\left(63 + 315x^2 - 210x^4 + 126x^6 - 45x^8 + 7x^{10}\right),$$

$$B_{12}(x) = \frac{1}{1024}\,\left(231 + 1386x^2 - 1155x^4 + 924x^6 - 495x^8 + 154x^{10} - 21x^{12}\right)$$

и т. д. Вообще, все полиномы $B_{2m}(x)$ для четной функции (2) содержат в своей записи лишь четные степени x (см. [10]) и имеют структуру

$$B_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{2m,2k}\, x^{2k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Явная запись, раскрывающая точный вид формулы (6), выглядит так

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k}\right], \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Представление (7) найдено в работе [11]. Используем (7) для изучения коэффициентов полиномов $B_{2m}(x)$.

Параметр $n = 2m$ кратко называем *номером.* Сравнивая (6) и (7), получаем

$$a_{2m,0} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$$a_{2m,2k} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, (-1)^{k-1}\, \beta_m(k), \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

с положительными числами

$$\beta_m(k) = \frac{1}{2k-1}\, C_m^k, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Поведение свободных коэффициентов (8) отражает известная асимптотика

$$2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \qquad m \to \infty, \tag{11}$$

означающая «медленное» стремление к нулю при $m \to \infty$.

Сосредоточим внимание на основных коэффициентах (9). Требуется при фиксированном $n = 2m$ найти максимальный (по абсолютной величине) среди коэффициентов (9) и оценить его поведение при возрастании номера $n = 2m$.

Введем основную характеристику

$$\mu_{2m} \equiv \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |a_{2m,2k}| = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \beta_m(k), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

с числами $\beta_m(k)$ из формулы (10). Исследуем поведение величины (12).

Для первых полиномов, перечисленных выше, очевидно имеем

$$\mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_4 = \frac{3}{4}, \quad \mu_6 = \frac{15}{16}, \quad \mu_8 = \frac{35}{32}, \quad \mu_{10} = \frac{315}{256}, \quad \mu_{12} = \frac{693}{512}, \tag{13}$$

причем все эти значения достигаются на коэффициенте при x^2.

Следующий полином

$$B_{14}(x) = \frac{1}{2048}\left(429 + 3003x^2 - 3003x^4 + 3003x^6 - 2145x^8 + 1001x^{10} - 273x^{12} + 33x^{14}\right)$$

будет особым, поскольку значение

$$\mu_{14} = \frac{3003}{2048} \tag{14}$$

достигается сразу на трех коэффициентах — при x^2, x^4, x^6.

Может показаться, что величина μ_{2m} не проявляет тенденции к особому росту, ведь все значения (13), (14) укладываются в узкий диапазон от 1/2 до 3/2. Но подлинная картина оказывается более сложной: главная «стратегическая» тенденция в поведении μ_{2m} становится заметной лишь при достаточно больших номерах $n = 2m$. Обнаружить упомянутую тенденцию, основываясь на исходном определении (5) и не прибегая к явной записи (7), весьма проблематично. Этим ситуация с функцией $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$ принципиально отличается от аналогичного примера $f(x) = |2x - 1|$ на $[0, 1]$, где стремительный рост коэффициентов наглядно виден при раскрытии скобок уже на первых номерах полиномов Бернштейна (см. [8]). Перейдем к точным формулировкам.

3. Основные утверждения

Используем обозначения (9), (10), (12) для величин $a_{2m,2k}$, $\beta_m(k)$, μ_{2m} соответственно. Для того чтобы оценить значения μ_{2m}, надо при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ найти максимум среди чисел $\beta_m(k)$. Выявим закономерности, действующие в конечной последовательности $\beta_m(k)$ с фиксированным $m \geqslant 2$ при изменении $k = 1, 2, \ldots, m$. Начальный случай $m = 1$ интереса не представляет, поскольку последовательность очевидно вырождается в единственный элемент $\beta_1(1) = 1$.

Теорема 1. *Пусть величина $\beta_m(k)$ определена формулой* (10). *В зависимости от выбора $m \geqslant 2$ надо различать три случая.*

1. *При любом фиксированном $m \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ числа $\beta_m(k)$ образуют конечную строго убывающую последовательность с максимальным элементом $\beta_m(1) = m$.*

2. *При $m = 7$ числа $\beta_7(k)$ образуют особый набор*

$$7, \quad 7, \quad 7, \quad 5, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{1}{13}, \tag{15}$$

где первые три элемента совпадают, а затем элементы строго убывают.

3. *При любом фиксированном $m \geqslant 8$ конечная последовательность $\beta_m(k)$ строго возрастает до $k = [(m-1)/2]$, а затем строго убывает, т. е. максимальным элементом последовательности будет в точности $\beta_m\big([(m-1)/2]\big)$.*

Перечисленные закономерности позволяют объяснить, почему первые полиномы Бернштейна (7), отвечающие значениям m от 1 до 7, являются исключительными, и рост коэффициентов (9) в их записи почти не наблюдается. Но при $m \geqslant 8$ тенденция меняется. Основной результат состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть величина μ_{2m} определена формулой* (12) *как максимальное абсолютное значение среди коэффициентов* (9), *взятых из полиномов* (7). *Тогда верна асимптотическая формула*

$$\mu_{2m} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2}, \qquad m \to \infty, \tag{16}$$

и справедлива оценка

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < 1.2215 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2}, \tag{17}$$

действующая при всех натуральных $m \geqslant 8$.

Несколько огрубляя оценку (17), можно записать более наглядный вариант

$$0.45\,\frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < 0.55\,\frac{2^m}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 8. \tag{18}$$

Соотношения (16)–(18) показывают, что максимальный (по абсолютной величине) коэффициент в полиномах (7) растет с экспоненциальной скоростью, но эта скорость роста будет существенно меньшей, чем в аналогичном примере на стандартном отрезке $[0,1]$ (ср. с [8], [9], [15]). Приступим к доказательству сформулированных результатов.

4. Доказательство теоремы 1

При фиксированном натуральном $m \geqslant 2$ рассматриваем числа

$$\beta_m(1), \quad \beta_m(2), \quad \ldots, \quad \beta_m(m), \tag{19}$$

взятые из формулы (10). Надо охарактеризовать «возрастание-убывание» элементов конечной последовательности (19). Для этого определим отношения

$$q_m(k) = \frac{\beta_m(k+1)}{\beta_m(k)}, \qquad k = 1, \ldots, m-1. \tag{20}$$

Требуется сравнить числа (20) с единицей. Запишем в развернутом виде

$$q_m(k) = \frac{C_m^{k+1}}{2k+1} \cdot \frac{2k-1}{C_m^k} = \frac{(2k-1)(m-k)}{(2k+1)(k+1)} = \frac{-2k^2 + (2m+1)k - m}{2k^2 + 3k + 1}$$

и рассмотрим разности

$$q_m(k) - 1 = \frac{-2k^2 + (2m+1)k - m}{2k^2 + 3k + 1} - 1 = -\frac{4k^2 - 2(m-1)k + m + 1}{2k^2 + 3k + 1}.$$

Введем вспомогательную квадратичную функцию

$$h_m(t) = 4t^2 - 2(m-1)t + m + 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Из представленных формул очевидно следует такой результат.

Лемма 1. *При любом выбранном $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ соотношение $q_m(k) < 1$ эквивалентно соотношению $h_m(k) > 0$; соотношение $q_m(k) > 1$ эквивалентно соотношению $h_m(k) < 0$; и, наконец, соотношение $q_m(k) = 1$ эквивалентно равенству $h_m(k) = 0$.*

Для применения леммы 1 изучим квадратичную функцию (21), обозначив ее дискриминант через D_m. Поскольку $D_m/4 = m^2 - 6m - 3$, то $D_m < 0$ при

$$m \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \tag{22}$$

и $D_m > 0$ при прочих $m \geqslant 7$. Рассмотрим сначала m из набора (22). Поскольку при таких m значения функции (21) строго положительны, то $h_m(k) > 0$ при всех $k = 1, \ldots, m-1$. Отсюда, на основании леммы 1, заключаем, что

$$q_m(k) = \frac{\beta_m(k+1)}{\beta_m(k)} < 1, \qquad k = 1, \ldots, m-1.$$

Следовательно, при любом m, указанном в (22), последовательность чисел (19) строго убывает, и

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant m} \beta_m(k) = \beta_m(1) = C_m^1 = m, \qquad m \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Тем самым, доказан первый пункт теоремы 1.

Случай $m = 7$ является особым. Функция (21) принимает вид

$$h_7(t) = 4t^2 - 12t + 8 = 4(t-1)(t-2).$$

Ясно, что $h_7(1) = h_7(2) = 0$ и $h_7(k) > 0$ при $k = 3, 4, 5, 6$. Соответственно

$$q_7(1) = \frac{\beta_7(2)}{\beta_7(1)} = 1, \quad q_7(2) = \frac{\beta_7(3)}{\beta_7(2)} = 1, \quad \text{но затем} \quad q_7(k) = \frac{\beta_7(k+1)}{\beta_7(k)} < 1$$

при $k = 3, 4, 5, 6$. В результате получаем последовательность (19) сразу с тремя максимальными элементами:

$$\beta_7(1) = \beta_7(2) = \beta_7(3) > \beta_7(4) > \beta_7(5) > \beta_7(6) > \beta_7(7).$$

Точные значения представлены в формуле (15). Тем самым, доказан второй пункт теоремы 1.

Приступим к основному случаю $m \geqslant 8$. Здесь $D_m/4 = m^2 - 6m - 3 > 0$, и функция (21) имеет два различных корня:

$$t_1 \equiv t_{1,m} = \frac{m - 1 - \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{4}, \qquad t_2 \equiv t_{2,m} = \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{4},$$

причем $t_1 < t_2$ и $t_1 + t_2 = (m-1)/2$. Заметим, что

$$\begin{cases} h_m(1/2) = 1 - (m-1) + m + 1 = 3 > 0, \\ h_m(1) = 4 - 2(m-1) + m + 1 = 7 - m < 0. \end{cases}$$

Следовательно, для корня t_1 верны ограничения $1/2 < t_1 < 1$. Но тогда

$$\frac{m-3}{2} < t_2 = \frac{m-1}{2} - t_1 < \frac{m-2}{2}. \tag{23}$$

Определим целочисленную величину

$$j_m \equiv \left[\frac{m-1}{2}\right]. \tag{24}$$

Используя оценку (23), установим следующий факт.

Лемма 2. *При любом натуральном $m \geqslant 8$ справедливо соотношение*

$$j_m - 1 < t_2 \equiv t_{2,m} = \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{4} < j_m, \tag{25}$$

т. е. корень t_2 локализуется в интервале $(j_m - 1, j_m)$ со значением j_m из формулы (24).

Доказательство. Воспользуемся элементарным неравенством

$$\frac{m-2}{2} \leqslant j_m \equiv \left[\frac{m-1}{2}\right] \leqslant \frac{m-1}{2},$$

верным при любом натуральном (и даже целом) значении m. Отсюда

$$j_m - 1 \leqslant \frac{m-1}{2} - 1 = \frac{m-3}{2} < \frac{m-2}{2} \leqslant j_m.$$

Сравнивая с оценкой (23), верной при всех натуральных $m \geqslant 8$, получаем нужный результат (25). Лемма доказана. □

Заметим еще, что при любом $m \geqslant 8$ величина j_m попадает в промежуток

$$3 \leqslant j_m \equiv \left[\frac{m-1}{2}\right] \leqslant m - 5.$$

Учитывая локализацию (25) корня t_2 и то, что $1/2 < t_1 < 1$, получаем значения

$$\begin{gathered} h_m(1) < 0, \quad h_m(2) < 0, \quad \ldots, \quad h_m(j_m - 1) < 0, \\ h_m(j_m) > 0, \ h_m(j_m + 1) > 0, \ \ldots, \ h_m(m - 1) > 0. \end{gathered}$$

Затем, используя лемму 1, заключаем, что

$$q_m(k) = \frac{\beta_m(k+1)}{\beta_m(k)} > 1, \qquad k = 1, \ \ldots, \ j_m - 1,$$

и

$$q_m(k) = \frac{\beta_m(k+1)}{\beta_m(k)} < 1, \qquad k = j_m, \ \ldots, \ m - 1.$$

Отсюда прямо следует, что при $m \geqslant 8$ конечная последовательность (19) сначала строго возрастает до элемента $\beta_m(j_m)$, а затем строго убывает. Означенный элемент $\beta_m(j_m)$ со значением j_m из формулы (24) и будет искомым максимальным элементом последовательности (19). Тем самым, установлен последний, третий пункт теоремы 1. Доказательство теоремы завершено.

Как некий итог и одновременно задел на будущее дадим теперь явное выражение для основной характеристики (12). Принимая во внимание третий пункт теоремы 1, заключаем, что

$$\mu_{2m} = 2^{-2m}\, C_{2m}^m \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \beta_m(k) = 2^{-2m}\, C_{2m}^m\, \beta_m\bigl([(m-1)/2]\bigr), \qquad m \geqslant 8.$$

Учитывая представления (10) и (24), запишем окончательное выражение

$$\mu_{2m} = 2^{-2m}\, C_{2m}^m\, \frac{1}{2j_m - 1}\, C_m^{j_m}, \qquad j_m \equiv \left[\frac{m-1}{2}\right], \qquad m \geqslant 8. \tag{26}$$

Именно эта формула (26) играет центральную роль в последующем доказательстве теоремы 2.

5. Доказательство теоремы 2

Работаем с номерами $n = 2m \geqslant 16$, считая в данном разделе, что $m \geqslant 8$. Установим сначала асимптотическую формулу (16). Разберем отдельно два случая, подгоняя их под стандартные асимптотики типа (11).

Пусть $m = 2p$. Тогда $j_m \equiv [(m-1)/2] = p - 1$. Согласно (26) получаем

$$\begin{aligned} \mu_{4p} = {} & 2^{-4p}\, C_{4p}^{2p}\, \frac{1}{2p-3}\, C_{2p}^{p-1} = \frac{1}{2p-3}\, 2^{-4p}\, C_{4p}^{2p}\, \frac{(2p)!}{(p-1)!\,(p+1)!} = \\ & = \frac{p}{(2p-3)\,(p+1)} \cdot 2^{-4p}\, C_{4p}^{2p} \cdot C_{2p}^p, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad p \geqslant 4. \end{aligned} \tag{27}$$

Поэтому

$$\mu_{4p} \sim \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \cdot \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi}\, \frac{2^{2p}}{p^2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, \frac{2^{2p}}{(2p)^2}, \qquad p \to \infty, \tag{28}$$

что дает формулу (16) при $m = 2p$.

Пусть $m = 2p + 1$. Тогда $j_m \equiv [(m-1)/2] = p$. Согласно (26) имеем

$$\mu_{4p+2} = 2^{-4p-2}\, C_{4p+2}^{2p+1}\, \frac{1}{2p-1}\, C_{2p+1}^{p} = \frac{1}{2p-1}\, 2^{-4p-2}\, C_{4p+2}^{2p+1}\, \frac{(2p+1)!}{p!\,(p+1)!} = \tag{29}$$

$$= \frac{2p+1}{(2p-1)(p+1)} \cdot 2^{-4p-2}\, C_{4p+2}^{2p+1} \cdot C_{2p}^{p}, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad p \geqslant 4.$$

Поэтому

$$\mu_{4p+2} \sim \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\,(2p+1)}} \cdot \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, \frac{2^{2p+1}}{(2p+1)^2}, \qquad p \to \infty, \tag{30}$$

что дает формулу (16) при $m = 2p + 1$.

Итак, асимптотика (16) установлена. При выводе основной «неасимптотической» оценки (17) снова удобно разделять два случая.

Пусть $m = 2p$. Определим последовательность

$$\xi_p^{(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-2p}\, (2p)^2\, \mu_{4p}, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad p \geqslant 4. \tag{31}$$

Формула (28) гарантирует, что $\xi_p^{(1)} \to 1$ при $p \to \infty$. Покажем, что стремление к единице происходит монотонно сверху. Используя последнее выражение из (27), запишем в явном виде

$$\xi_p^{(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-2p}\, (2p)^2 \cdot \frac{p}{(2p-3)\,(p+1)}\, 2^{-4p}\, C_{4p}^{2p}\, C_{2p}^{p} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-6p+2}\, \frac{p^3}{(2p-3)\,(p+1)}\, \frac{(4p)!}{(2p)!\,(p!)^2}.$$

Составим отношение

$$\frac{\xi_{p+1}^{(1)}}{\xi_p^{(1)}} = \frac{2^{-6p-4}\,(p+1)^3\,(4p+4)!}{(2p-1)\,(p+2)\,(2p+2)!\,((p+1)!)^2} \cdot \frac{(2p-3)\,(p+1)\,(2p)!\,(p!)^2}{2^{-6p+2}\,p^3\,(4p)!} =$$

$$= \frac{(2p-3)(p+1)^2(4p+1)(4p+3)}{16p^3\,(2p-1)(p+2)} = \frac{32p^5 + 48p^4 - 42p^3 - 109p^2 - 60p - 9}{32p^5 + 48p^4 - 32p^3}.$$

При любом $p \geqslant 4$ числитель полученной дроби меньше, чем ее знаменатель. Тем самым, составленное отношение меньше единицы, и последовательность (31) строго убывает к своему пределу. Но тогда $1 < \xi_p^{(1)} \leqslant \xi_4^{(1)}$ при любом $p \geqslant 4$. Здесь

$$\xi_4^{(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-6p+2}\, \frac{p^3}{(2p-3)\,(p+1)}\, \frac{(4p)!}{(2p)!\,(p!)^2}\,\bigg|_{p=4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2^{14}} < 1.2215.$$

Как легко проверить (на калькуляторе), числовой зазор в последней оценке весьма мал и не превосходит 10^{-5}. В результате приходим к соотношению

$$1 < \xi_p^{(1)} \equiv \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-2p}\, (2p)^2\, \mu_{4p} < 1.2215, \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad p \geqslant 4. \tag{32}$$

Из формулы (32) следует нужная оценка (17) при всех четных $m = 2p \geqslant 8$.

Пусть теперь $m = 2p+1$. Действуем аналогично. Введем последовательность

$$\xi_p^{(2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-2p-1}\,(2p+1)^2\,\mu_{4p+2}, \qquad p\in\mathbb{N}, \qquad p\geqslant 4. \tag{33}$$

Формула (30) гарантирует, что $\xi_p^{(2)} \to 1$ при $p\to\infty$. Покажем, что и теперь стремление к единице происходит монотонно сверху. Используя заключительное выражение из (29), запишем в явном виде

$$\xi_p^{(2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-2p-1}\,(2p+1)^2 \cdot \frac{2p+1}{(2p-1)(p+1)}\, 2^{-4p-2}\, C_{4p+2}^{2p+1}\, C_{2p}^{p} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-6p-3}\, \frac{2p+1}{(2p-1)\,(p+1)}\, \frac{(4p+2)!}{(2p)!\,(p!)^2}.$$

Составим отношение

$$\frac{\xi_{p+1}^{(2)}}{\xi_p^{(2)}} = \frac{2^{-6p-9}\,(2p+3)\,(4p+6)!}{(2p+1)\,(p+2)\,(2p+2)!\,((p+1)!)^2} \cdot \frac{(2p-1)\,(p+1)\,(2p)!\,(p!)^2}{2^{-6p-3}\,(2p+1)\,(4p+2)!} =$$

$$= \frac{128p^5+576p^4+856p^3+348p^2-198p-135}{128p^5+576p^4+928p^3+688p^2+240p+32}.$$

При любом $p\geqslant 4$ числитель полученной дроби меньше, чем знаменатель. Это означает, что составленное отношение меньше единицы, и числовая последовательность (33) строго убывает к своему пределу. Но тогда $1<\xi_p^{(2)}\leqslant \xi_4^{(2)}$ при любом $p\geqslant 4$. Здесь

$$\xi_4^{(2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-6p-3}\, \frac{2p+1}{(2p-1)\,(p+1)}\, \frac{(4p+2)!}{(2p)!\,(p!)^2}\bigg|_{p=4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, \frac{3^5\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17}{2^{24}} < 1.18.$$

В результате приходим к соотношению

$$1 < \xi_p^{(2)} \equiv \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-2p-1}\,(2p+1)^2\,\mu_{4p+2} < 1.18, \qquad p\in\mathbb{N}, \qquad p\geqslant 4. \tag{34}$$

Поскольку $1.18 < 1.2215$, то из (34) следует нужная оценка (17) при всех нечетных $m=2p+1\geqslant 9$. Тем самым, оценка (17) установлена при всех $m\geqslant 8$.

Заметим еще, что

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.45015815\ \ldots\ , \qquad 1.2215\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.54986819\ \ldots\ .$$

Поэтому, чуть огрубляя (17), получаем близкую оценку (18). Теорема 2 полностью доказана.

Смысл оценки (17) ясен: она подтверждает, что асимптотика (16) достаточно точно отражает поведение величины μ_{2m} при всех натуральных $m\geqslant 8$. Из доказательства теоремы 2 нетрудно усмотреть, что первое такое значение μ_{16} находится очень близко к верхней границе в (17), а затем по мере возрастания номера $n=2m$ значения μ_{2m} все ближе сдвигаются к нижней границе, асимптотически сливаясь с ней при $m\to\infty$. В этом движении есть свои нюансы.

Так, при анализе доказательства теоремы 2 может возникнуть идея не разбивать вывод оценки (17) на два случая, а исходя из установленной асимптотики (16), ввести одну результирующую последовательность

$$\gamma_m = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, 2^{-m} m^2\,\mu_{2m}, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad m\geqslant 8. \tag{35}$$

Тогда

$$\gamma_{2p} = \xi_p^{(1)}, \qquad \gamma_{2p+1} = \xi_p^{(2)}, \qquad p\geqslant 4, \tag{36}$$

с подпоследовательностями $\xi_p^{(1)}$, $\xi_p^{(2)}$ из формул (31), (33) соответственно. Ясно, что $\gamma_m \to 1$ при $m \to \infty$. Но такое стремление к единице уже не будет монотонным! Действительно, непосредственно проверяется, что сначала всё вроде бы в порядке:

$$\gamma_{12} < \gamma_{11} < \gamma_{10} < \gamma_9 < \gamma_8,$$

но затем $\gamma_{13} > \gamma_{12}$, и вообще $\gamma_{2p+1} > \gamma_{2p}$ для любого $p \geqslant 6$. Оказывается даже, что $\gamma_{19} > \gamma_{16}$ и т. д. и т. п. Короче говоря, хотя каждая из двух подпоследовательностей (36) убывает строго монотонно, но $\gamma_{2p} = \xi_p^{(1)}$ стремится к пределу существенно быстрее, чем $\gamma_{2p+1} = \xi_p^{(2)}$.

Из сказанного следует, что наш метод доказательства оценки (17), если основывать его сразу на последовательности (35), потребует специальных уточнений. Вряд ли такая детализация оправдана. Ограничимся простой констатацией: основная асимптотическая формула (16) скрывает в себе некоторые тонкости, связанные с четностью или нечетностью значения $m \geqslant 8$.

Тем не менее, формулы (16)–(18) вполне описывают рост максимального коэффициента в изучаемых полиномах Бернштейна (7). Скорость такого роста оказывается экспоненциальной порядка $2^m = 2^{n/2}$. Коэффициенты, соседние с максимальным или «равноудаленные» от него, будут, конечно, меньше, но при больших номерах $n = 2m$ начнут расти с той же асимптотической скоростью, что и в формуле (16). Установим это с необходимой строгостью.

6. Поведение других коэффициентов

Работаем с коэффициентами $a_{2m,2k}$ из формулы (9), взятыми при $m \geqslant 8$. По-прежнему используем обозначение (24), полагая $j_m \equiv [(m-1)/2]$. Зафиксируем постоянное значение $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (положительное или отрицательное).

По аналогии с величиной $\mu_{2m} = |a_{2m,2j_m}|$, соответствующей максимальному (по модулю) коэффициенту $a_{2m,2j_m}$, введем характеристику

$$\mu_{2m,2r} = |a_{2m,2j_m+2r}|, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant m_0(r), \tag{37}$$

корректно определенную при достаточно больших значениях m в зависимости от выбора $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Характеристика (37) дает абсолютные значения коэффициентов, удаленных ровно на r разрядов от $a_{2m,2j_m}$ в формальной записи полиномов (6).

Учитывая структуру формулы (6), имеем ограничения

$$1 \leqslant j_m + r \leqslant m.$$

Отсюда элементарно находим значения

$$m \geqslant m_0(r) = \begin{cases} \max(\,2r-2,\,8), & r > 0, \\ \max(\,3-2r,\,8), & r < 0, \end{cases} \tag{38}$$

пригодные для задания (37).

Принимая во внимание вид коэффициентов (9) и вспоминая третий пункт теоремы 1, замечаем, что всегда

$$\begin{cases} \mu_{2m} > \mu_{2m,2} > \mu_{2m,4} > \,\dots\,, \\ \mu_{2m} > \mu_{2m,-2} > \mu_{2m,-4} > \,\dots\,. \end{cases} \tag{39}$$

Несмотря на отношение строгой подчиненности (39), асимптотическое поведение всех величин $\mu_{2m,2r}$ одинаково при $m \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть при фиксированном $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ величина $\mu_{2m,2r}$ определена формулой* (37) *с ограничением* (38). *Тогда*

$$\mu_{2m,2r} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2}, \qquad m \to \infty, \tag{40}$$

с той же асимптотикой, что и в (16).

Доказательство. Так как результат (40) совпадает с (16), то для получения нужного соотношения достаточно показать, что $\mu_{2m,2r}/\mu_{2m} \to 1$ при $m \to \infty$. Используя базовые формулы (9), (10), запишем представления

$$\mu_{2m} = |a_{2m,2j_m}| = 2^{-2m}\,C_{2m}^m \cdot \frac{1}{2j_m - 1}\,C_m^{j_m},$$

$$\mu_{2m,2r} = |a_{2m,2j_m+2r}| = 2^{-2m}\,C_{2m}^m \cdot \frac{1}{2j_m + 2r - 1}\,C_m^{j_m+r}.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_{2m,2r}}{\mu_{2m}} = \frac{2j_m - 1}{2j_m + 2r - 1} \cdot \frac{C_m^{j_m+r}}{C_m^{j_m}} = \frac{2j_m - 1}{2j_m + 2r - 1} \cdot \frac{j_m!\,(m-j_m)!}{(j_m+r)!\,(m-j_m-r)!}.$$

Если $m \to \infty$, то $j_m \equiv [(m-1)/2] \to \infty$ и $m - j_m = m - [(m-1)/2] \to \infty$. Соответственно

$$\frac{2j_m - 1}{2j_m + 2r - 1} \sim 1, \qquad \frac{j_m!}{(j_m+r)!} \sim \frac{1}{j_m^r}, \qquad \frac{(m-j_m)!}{(m-j_m-r)!} \sim (m-j_m)^r$$

при любом фиксированном $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Но тогда

$$\frac{\mu_{2m,2r}}{\mu_{2m}} \sim \left(\frac{m - j_m}{j_m}\right)^r, \qquad m \to \infty. \tag{41}$$

Заметим, что $j_m \equiv [(m-1)/2] = (m - 2 + \tau_m)/2$, где $\tau_m = 0$, если m — четное, и $\tau_m = 1$, если m — нечетное. Поэтому

$$\frac{m - j_m}{j_m} = \frac{m + 2 - \tau_m}{m - 2 + \tau_m} \to 1, \qquad m \to \infty. \tag{42}$$

Комбинируя (41) и (42), заключаем, что $\mu_{2m,2r}/\mu_{2m} \to 1$ при $m \to \infty$. Как уже отмечалось, это и дает требуемый результат (40). Теорема доказана. $\square$

Асимптотика (40) означает, что при достаточно больших номерах $n = 2m$ в алгебраической записи (6) у изучаемых полиномов Бернштейна присутствует группа коэффициентов примерно одного порядка с колоссальными абсолютными значениями. Эти коэффициенты располагаются в центральной части полиномов (6) — вблизи от $a_{2m,2j_m}$, где $j_m \equiv [(m-1)/2]$. По мере удаления от центра характер поведения коэффициентов существенно изменяется, и на краях полиномов (6) действуют совсем другие законы.

Так, поведение свободных коэффициентов (8) вида $a_{2m,0} = 2^{-2m}\,C_{2m}^m$ выражается асимптотикой (11), которую можно дополнить оценкой

$$\left(1 - \frac{1}{8m}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi m}} < 2^{-2m}\,C_{2m}^m < \left(1 - \frac{1}{8m+1}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Двусторонняя оценка (43) весьма точна и действует при всех натуральных m без исключений. Одно из возможных доказательств для (43) представлено в [17, с. 59–61]; дополнительные замечания см. в [15, с. 155–157]. Поскольку

$$1 - \frac{1}{8m+1} = 1 - \frac{1}{8m} + \frac{1}{8m\,(8m+1)}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

то из (43) сразу следует известная формула

$$2^{-2m}\, C_{2m}^{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \left(1 - \frac{1}{8m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right), \qquad m \to \infty, \tag{44}$$

очевидно уточняющая (11). Еще более точная аппроксимация имеет вид

$$2^{-2m}\, C_{2m}^{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \left(1 - \frac{1}{8m} + \frac{1}{128m^2} + \frac{5}{1024m^3} - \frac{21}{32768m^4} + O\left(\frac{1}{m^5}\right)\right). \tag{45}$$

Интересные подробности про такие разложения см. в [18]. Отметим, что универсальная «неасимптотическая» оценка (43) требует отдельного доказательства и не выводится из асимптотических формул (44), (45). Как бы то ни было, поведение свободных коэффициентов (8) выяснено с высокой точностью.

Для следующих коэффициентов $a_{2m,2}$, стоящих при степенях x^2, базовые формулы (9), (10) дают выражение

$$a_{2m,2} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \cdot m, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Учитывая оценку (43), заключаем, что

$$\left(1 - \frac{1}{8m}\right) \sqrt{\frac{m}{\pi}} \;<\; a_{2m,2} \;<\; \left(1 - \frac{1}{8m+1}\right) \sqrt{\frac{m}{\pi}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

с асимптотикой

$$a_{2m,2} \sim \sqrt{\frac{m}{\pi}}, \qquad m \to \infty.$$

Здесь наблюдается «медленный» степенной рост при $m \to \infty$.

Наконец, для старших коэффициентов в (6) согласно (9), (10) имеем представление

$$a_{2m,2m} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \cdot \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$|a_{2m,2m}| \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, m^{3/2}}, \qquad m \to \infty,$$

т. е. числа $a_{2m,2m}$ стремятся к нулю степенным образом.

Из явной записи (7) несложно понять, что старший коэффициент $a_{2m,2m}$ будет минимальным (по абсолютной величине) в полиноме $B_{2m}(x)$ при любом фиксированном $m \geqslant 2$ (при $m = 1$ полином $B_2(x)$ содержит два одинаковых коэффициента $a_{2,0} = a_{2,2} = 1/2$).

Кроме того, к нулю при $m \to \infty$ будут стремиться коэффициенты

$$a_{2m,2m-2} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \cdot (-1)^m \frac{m}{2m-3}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 2.$$

Все прочие коэффициенты (кроме $a_{2m,0}$, $a_{2m,2m-2}$, $a_{2m,2m}$) будут стремиться к бесконечности в том смысле, что

$$\eta_{2m} \equiv \min_{1 \leqslant k \leqslant m-2} |a_{2m,2k}| \to \infty, \qquad m \to \infty.$$

Конкретно $\eta_{2m} = |a_{2m,2m-4}|$ при $m \geqslant 3$, откуда

$$\eta_{2m} \sim \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m}{\pi}}, \qquad m \to \infty.$$

Отмеченное легко выводится из явных выражений (9), (10) с учетом основной асимптотики (11).

Итак, в изучаемых полиномах Бернштейна $B_{2m}(x)$ при достаточно больших номерах $n = 2m$ почти все коэффициенты, кроме трех, окажутся достаточно большими, причем центральные коэффициенты будут не просто большими, а экспоненциально большими (по модулю).

Теперь естественно поставить вопрос о поведении всей суммы

$$S_{2m} \equiv \sum_{k=0}^{m} |a_{2m,2k}|, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Эта задача интересна и с точки зрения общей теории (см. [3]).

7. Асимптотика для суммы всех коэффициентов

Используя представления (8), (9) для коэффициентов $a_{2m,2k}$, сумму (46) запишем в виде

$$S_{2m} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, C_m^k\right) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, \sigma_m, \tag{47}$$

где

$$\sigma_m \equiv 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, C_m^k, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

Характер технического множителя $2^{-2m}\, C_{2m}^{m}$ ясен из асимптотики (11) и двусторонних оценок (43). Для изучения поведения величины S_{2m} надо как можно точнее оценить рост комбинаторной суммы (48) при $m \to \infty$. Несколько первых значений равны

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = \frac{10}{3}, \quad \sigma_3 = \frac{26}{5}, \quad \sigma_4 = \frac{278}{35}, \quad \sigma_5 = \frac{766}{63}, \quad \sigma_6 = \frac{4366}{231}, \quad \sigma_7 = \frac{12890}{429}.$$

Общего компактного представления для суммы (48), по-видимому, всё же не существует. Так, в фундаментальном справочнике [19] присутствует подобная формула (4.2.3.20), но с ответом в виде некоторого «неберущегося» интеграла. Специальные компьютерные программы дают выражение для (48) через гипергеометрическую функцию Гаусса. Поэтому с практической точки зрения представляет интерес следующее утверждение.

Лемма 3. *Для величины* (48) *справедлива рекуррентная формула*

$$\sigma_{m+1} = \frac{2}{2m+1}\Big((m+1)\,\sigma_m + 2^m - 1\Big), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{49}$$

Доказательство. Согласно (48) имеем

$$\sigma_{m+1} \equiv 1 + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2k-1}\, C_{m+1}^k = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\,(C_m^k + C_m^{k-1}) + \frac{1}{2m+1} =$$

$$= \sigma_m + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1}\, C_m^k + \frac{1}{2m+1} = \sigma_m + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}\, C_m^k.$$

Используем запись

$$\sigma_{m+1} = \sigma_m + \pi_m, \qquad m \in \mathbb{N},$$

где

$$\pi_m \equiv \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}\, C_m^k = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1+2m-2k}{2k+1}\, C_m^k =$$

$$= \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k + 2\sum_{k=0}^{m} \frac{m-k}{2k+1}\, C_m^k\right) =$$

$$= \frac{1}{2m+1}\left(2^m + 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m-k}{2k+1}\, C_m^k\right).$$

Но $(m-k)\,C_m^k = (k+1)\,C_m^{k+1}$ при k от 0 до $m-1$. Поэтому

$$2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m-k}{2k+1}\,C_m^k = 2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+1}{2k+1}\,C_m^{k+1} = 2\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2k-1}\,C_m^k =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} C_m^k + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\,C_m^k = 2^m - 1 + \sigma_m - 1 =$$
$$= 2^m + \sigma_m - 2.$$

В итоге получаем

$$\sigma_{m+1} = \sigma_m + \pi_m = \sigma_m + \frac{1}{2m+1}\,(2^m + 2^m + \sigma_m - 2) =$$
$$= \frac{2}{2m+1}\Big((m+1)\,\sigma_m + 2^m - 1\Big),$$

что и требовалось показать. □

С помощью рекуррентной формулы (49) установим следующий результат.

Лемма 4. *Для величины* (48) *верна оценка*

$$\frac{2^m}{m-\alpha} < \sigma_m < \frac{2^m}{m-\beta}, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad m \geqslant 5, \tag{50}$$

при выборе значений $\alpha = 2$ *и* $\beta = 3$. *Значение* $\alpha = 2$ *является асимптотически точным: при любом выборе* $\alpha > 2$ *нижняя оценка в* (50) *будет неверна для всех номеров* $m \geqslant m_0$, *начиная с соответствующего* $m_0 = m_0(\alpha)\in\mathbb{N}$. *Напротив, численное значение* β *можно уменьшать, неограниченно приближая его к* $\alpha = 2$ *за счет выбора достаточно больших номеров* $m \geqslant m_1$ *с соответствующим* $m_1 = m_1(\beta)\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем оценку сверху. При $\beta = 3$ она имеет вид

$$\sigma_m < \frac{2^m}{m-3} \equiv \sigma_m^{(+)}, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad m \geqslant 5. \tag{51}$$

Номера $m = 5,\ 6,\ 7$ проверим отдельно. Прямые вычисления дают верные неравенства

$$\begin{aligned}
\sigma_5 &= \frac{766}{63} = 12.1587\ldots &&< \sigma_5^{(+)} = 16,\\
\sigma_6 &= \frac{4366}{231} = 18.9004\ldots &&< \sigma_6^{(+)} = \frac{64}{3} = 21.3333\ldots,\\
\sigma_7 &= \frac{12890}{429} = 30.0466\ldots &&< \sigma_7^{(+)} = 32.
\end{aligned}$$

Далее рассуждаем по индукции.

Допустим, что оценка (51) верна при каком-то $m \geqslant 7$. Тогда, согласно (49), имеем

$$\sigma_{m+1} = \frac{2}{2m+1}\Big((m+1)\,\sigma_m + 2^m - 1\Big) < \frac{2}{2m+1}\Big((m+1)\,\sigma_m + 2^m\Big) <$$
$$< \frac{2}{2m+1}\left((m+1)\,\frac{2^m}{m-3} + 2^m\right) = \frac{2^{m+1}}{2m+1}\left(\frac{m+1}{m-3} + 1\right) =$$
$$= \frac{2^{m+1}\,(2m-2)}{(2m+1)\,(m-3)} \leqslant \frac{2^{m+1}}{m-2} \equiv \sigma_{m+1}^{(+)}$$

в силу того, что

$$\frac{1}{m-2} - \frac{2m-2}{(2m+1)\,(m-3)} = \frac{m-7}{(m-2)(2m+1)(m-3)} \geqslant 0$$

при $m \geqslant 7$. Итак, оценка (51) верна при всех $m \geqslant 5$.

Строго говоря, оценка (51) верна также и при $m = 4$, но этот случай не включен в общую формулу (50), поскольку при $m = 4$ соответствующая оценка снизу еще не действует.

Докажем теперь оценку снизу. При $\alpha = 2$ она имеет вид

$$\sigma_m > \frac{2^m}{m-2} \equiv \sigma_m^{(-)}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 5. \tag{52}$$

Так как

$$\sigma_5 = \frac{766}{63} = 12.1587\ldots > \sigma_5^{(-)} = \frac{32}{3} = 10.6666\ldots,$$

то при $m = 5$ оценка (52) выполнена. Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что оценка (52) верна при некотором $m \geqslant 5$. Согласно (49) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{m+1} &= \frac{2}{2m+1}\Big((m+1)\,\sigma_m + 2^m - 1\Big) > \\
&> \frac{2}{2m+1}\left((m+1)\,\frac{2^m}{m-2} + 2^m\right) - \frac{2}{2m+1} = \\
&= \frac{2^{m+1}}{2m+1}\left(\frac{m+1}{m-2} + 1\right) - \frac{2}{2m+1} = \\
&= \frac{2^{m+1}\,(2m-1)}{(2m+1)\,(m-2)} - \frac{2}{2m+1} > \frac{2^{m+1}}{m-1} \equiv \sigma_{m+1}^{(-)}
\end{aligned}$$

в силу того, что

$$\frac{2^{m+1}\,(2m-1)}{(2m+1)\,(m-2)} - \frac{2^{m+1}}{m-1} = \frac{3\cdot 2^{m+1}}{(2m+1)\,(m-2)\,(m-1)} > \frac{2}{2m+1}$$

из-за очевидного соотношения $3\cdot 2^m > (m-2)\,(m-1)$, верного при всех $m \in \mathbb{N}$. Итак, факт (52) установлен, и оценка (50) с $\alpha = 2$ и $\beta = 3$ полностью доказана.

Займемся теперь точностью значений $\alpha = 2$ и $\beta = 3$ в оценке (50). Используя элементарное преобразование

$$\frac{1}{m-\gamma} = \frac{1}{m} + \frac{\gamma m}{m-\gamma}\,\frac{1}{m^2}, \qquad m > \gamma > 0,$$

запишем (50) в следующем эквивалентном виде

$$\frac{2^m}{m} + \frac{\alpha m}{m-\alpha}\,\frac{2^m}{m^2} < \sigma_m < \frac{2^m}{m} + \frac{\beta m}{m-\beta}\,\frac{2^m}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 5, \tag{53}$$

со значениями $\alpha = 2$ и $\beta = 3$. Временно обозначим

$$x_m = \sigma_m - \frac{2^m}{m}, \qquad y_m = \frac{2^m}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{54}$$

Тогда (53) преобразуется к виду

$$\frac{\alpha m}{m-\alpha} < \frac{x_m}{y_m} < \frac{\beta m}{m-\beta}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 5, \tag{55}$$

где $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Ясно, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha m}{m-\alpha} = \alpha, \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{\beta m}{m-\beta} = \beta.$$

Покажем существование предела

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_m}{y_m} = 2. \tag{56}$$

Отсюда сразу следует, что значение $\alpha = 2$ в формуле (55) является асимптотически точным, а значение $\beta = 3$ можно уменьшать в интервале $2 < \beta \leqslant 3$, неограниченно приближая β к $\alpha = 2$, за счет выбора достаточно больших номеров $m \geqslant m_1 = m_1(\beta)$.

Существование предела (56) для отношения последовательностей (54) докажем, применяя обычную теорему Штольца [20, с. 84]. С учетом определения (54) и рекуррентной формулы (49) имеем

$$\begin{aligned} x_{m+1} - x_m &= \sigma_{m+1} - \frac{2^{m+1}}{m+1} - \sigma_m + \frac{2^m}{m} = \\ &= \frac{2m+2}{2m+1} \cdot \sigma_m + \frac{2^{m+1}-2}{2m+1} - \frac{2^{m+1}}{m+1} - \sigma_m + \frac{2^m}{m} = \\ &= \frac{1}{2m+1} \cdot \sigma_m + \frac{3m+1}{m\,(m+1)\,(2m+1)} \cdot 2^m - \frac{2}{2m+1}. \end{aligned}$$

При этом

$$y_{m+1} - y_m = \frac{2^{m+1}}{(m+1)^2} - \frac{2^m}{m^2} = \frac{m^2-2m-1}{m^2\,(m+1)^2} \cdot 2^m.$$

Последовательность y_m строго возрастает к $+\infty$ при $m \geqslant 3$. Требования теоремы Штольца выполнены. Для отношения разностей имеем

$$\frac{x_{m+1}-x_m}{y_{m+1}-y_m} = \frac{m\,(m+1)}{m^2-2m-1} \left(\frac{m\,(m+1)}{2m+1} \cdot 2^{-m}\sigma_m + \frac{3m+1}{2m+1} - \frac{2m\,(m+1)}{2m+1} \cdot 2^{-m} \right).$$

Заметим, что $m \cdot 2^{-m}\sigma_m \to 1$ при $m \to \infty$ согласно уже доказанной оценке (50). Поэтому

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_{m+1}-x_m}{y_{m+1}-y_m} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} - 0 \right) = 2.$$

Отсюда, по теореме Штольца, получаем предел (56). Сравнивая (56) с неравенством (55), устанавливаем все требуемые утверждения про асимптотическую точность значения $\alpha = 2$ и возможность уменьшения значения $\beta = 3$. Эти утверждения автоматически переносятся на эквивалентную формулу (50). Лемма 4 полностью доказана. □

Из полученных результатов извлекаем такое следствие.

Лемма 5. *Для величины* (48) *верна асимптотика*

$$\sigma_m \sim \frac{2^m}{m}, \qquad m \to \infty, \tag{57}$$

точнее

$$\sigma_m = \frac{2^m}{m} \left(1 + \frac{2}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right) \right), \qquad m \to \infty. \tag{58}$$

Доказательство. Асимптотика (57) следует из оценки (50). Уточненная формула (58) эквивалентна найденному пределу (56) с учетом обозначений, введенных в (54). Лемма доказана. □

Теперь всё готово к тому, чтобы выяснить поведение суммы (46), составленной из коэффициентов изучаемых полиномов Бернштейна. Для удобства дадим несколько первых значений

$$S_2 = 1, \quad S_4 = \frac{5}{4}, \quad S_6 = \frac{13}{8}, \quad S_8 = \frac{139}{64}, \quad S_{10} = \frac{383}{128}, \quad S_{12} = \frac{2183}{512}, \quad S_{14} = \frac{6445}{1024}.$$

По мере возрастания номера $n = 2m$ рост последовательности S_{2m} становится более заметным, но истинная скорость роста проясняется лишь из следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть суммы* S_{2m} *составлены по формуле* (46) *из коэффициентов* (8), (9) *полиномов Бернштейна* (7). *Тогда для последовательности* S_{2m} *верна асимптотика*

$$S_{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^m}{m^{3/2}}, \qquad m \to \infty, \tag{59}$$

точнее

$$S_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^m}{m^{3/2}}\left(1 + \frac{15}{8m} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right), \qquad m \to \infty. \tag{60}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\left(1 - \frac{1}{8m}\right)\frac{2^m}{\sqrt{\pi m}\,(m-2)} < S_{2m} < \left(1 - \frac{1}{8m+1}\right)\frac{2^m}{\sqrt{\pi m}\,(m-3)}, \tag{61}$$

действующая при всех натуральных $m \geqslant 5$.

Доказательство. Согласно (47) используем представление $S_{2m} = 2^{-2m}\,C_{2m}^m\,\sigma_m$ с множителями σ_m из формулы (48). Учитывая асимптотики (11) и (57), получаем нужное соотношение (59). Более точную формулу (60) находим простым перемножением (44) и (58). Аналогично, принимая во внимание прежние оценки (43) и (50) (последнюю со значениями $\alpha = 2$ и $\beta = 3$), устанавливаем двустороннюю оценку (61) при всех натуральных $m \geqslant 5$. Отметим также, что при $m = 4$ оценка (61) нарушается, поскольку для нижней границы получаем

$$\left(1 - \frac{1}{8m}\right)\frac{2^m}{\sqrt{\pi m}\,(m-2)}\bigg|_{m=4} = \frac{31}{8\sqrt{\pi}} = 2.186234\ldots\; > \; S_8 = \frac{139}{64} = 2.171875,$$

что противоречит (61). Теорема доказана. □

Установленные факты интересно сопоставить с одним общим результатом Рулье. В его работе [3] выведена универсальная оценка для сумм коэффициентов полиномов Бернштейна на отрезке $[a,b]$ с условием $a \leqslant 0 < 1 \leqslant b$. Применительно к симметричному отрезку $[-1,1]$ результат Рулье дает следующее.

Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле (1). Запишем в алгебраической форме

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(f)\,x^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{62}$$

и обозначим

$$S_n(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}(f)|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{63}$$

Тогда, согласно теореме 1 из [3], верна оценка

$$S_n(f) \leqslant 2^n\,\|f\|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{64}$$

где $\|\cdot\|$ — обычная супремум-норма на $[-1,1]$.

Заметим, что для функции $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$ оценка (64) оказывается достаточно грубой. Действительно, в этом случае, учитывая правило склеивания (4) и переходя от «общих» формул (62), (63) к «конкретным» (6), (46), получаем

$$S_{2m+1}(f) = S_{2m}(f) = S_{2m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, при $n = 2m$ по формуле (59) имеем

$$S_n(f) = S_{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^m}{m^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^{n/2}}{n^{3/2}}, \qquad n = 2m \to \infty,$$

а при $n = 2m + 1$ имеем

$$S_n(f) = S_{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^m}{m^{3/2}} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{n/2}}{n^{3/2}}, \qquad n = 2m + 1 \to \infty.$$

Асимптотика для четных и нечетных номеров формально разная, но в любом случае

$$S_n(f) = o\left(2^{n/2}\right), \qquad n \to \infty, \tag{65}$$

с показательной функцией $2^{n/2}$, а не 2^n, как в (64). Сравнение достаточно наглядно.

В связи со сказанным возникает естественная задача: за счет выбора точки излома $p/q \in (-1, 1)$ подобрать пример простого рационального модуля

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [-1, 1],$$

у которого коэффициенты полиномов Бернштейна (1) в записи (62) имеют наибольший рост при $n \to \infty$. Возможен ли подобный пример с существенным превышением роста (65), пока остается неясным. Скорее всего, ситуация здесь будет отличаться от той, что наблюдалась на стандартном отрезке $[0, 1]$ (ср. с [9]).

Было бы весьма интересно также показать точность на $[-1, 1]$ оценки Рулье (64) или получить другую универсальную оценку для величины (63), пригодную для всех функций $f \in C[-1, 1]$, усиливающую результат (64), и экстремально точную на классе $C[-1, 1]$. (Замечание при корректуре: в самое последнее время по этой задаче удалось получить существенные продвижения, см. [23].)

8. Благодарности

Авторы признательны участникам ряда конференций за содержательное обсуждение результатов, частично отраженных в докладах [21], [22]. Особая благодарность А. Ю. Трынину, указавшему на работу [1], что позволило связать проводимое исследование с общим направлением [1]–[7]. Отметим также дружескую помощь Д. Г. Цветкович, внимательно проверившей все наши расчеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.D. Stafney *A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to* $C[0,1]$ // Duke Math. J. Vol. 34. № 3. 1967. P. 393–396.
2. Хавинсон С.Я. *Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций* // Матем. заметки. Т. 6. Вып. 5. 1969. С. 619–625.
3. J.A. Roulier *Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials* // J. Approx. Theory. Vol. 3. № 2. 1970. P. 117–122.
4. J.A. Roulier *Restrictions on the coefficients of approximating polynomials* // J. Approx. Theory. Vol. 6. № 3. 1972. P. 276–282.
5. Гурарий В.И., Мелетиди М.А. *Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции* // Функц. анализ и его прилож. Т. 5. Вып. 1. 1971. С. 73–75.
6. M. Golitschek, D. Leviatan *Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials with real or complex exponents* // J. Math. Analysis and Appl. Vol. 60. No. 1. 1977. P. 123–138.
7. Мурадян О.А., Хавинсон С.Я. *О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса* // Матем. заметки. Т. 2. № 2. 1977. С. 269–276.
8. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. *Приближение модуля полиномами Бернштейна* // Вестник Челяб. ун–та. Математика. Механика. Информатика. Т. 15. № 26. 2012. С. 6–40.
9. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. *О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке* // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научн. конф. «Герценовские Чтения – 2015». СПб. Изд-во: РГПУ им. А. И. Герцена. 2015. С. 115–121.

10. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. *Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке* // Известия Сарат. ун–та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. Т. 15. № 3. 2015. С. 288–300.
11. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. *Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке* // Известия Сарат. ун–та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. Т. 16. № 4. 2016. С. 425–435.
12. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
13. G.G. Lorentz *Bernstein Polynomials.* Toronto: University of Toronto Press, 1953.
14. Виденский В.С. *Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу.* Ленинград: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.
15. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. *Полиномы Бернштейна: старое и новое* // Математический форум. Том 8. Часть 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2014. С. 126–175.
16. J. Bustamante *Bernstein operators and their properties.* Birkhäuser, 2017.
17. Попов А.Ю. *Двусторонние оценки сумм значений функции в целых точках и их приложения.* Переславль-Залесский: Университет города Переславля, 2016.
18. D.E. Knuth, I. Vardi *The asymptotic expansion of the middle binomial coefficient* // Amer. Math. Monthly. Vol. 97. № 7. 1990. P. 629–630.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* М.: Наука, 1981.
20. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* М.: Наука, 1965.
21. Петросова М.А. *О скорости роста максимальных коэффициентов в полиномах Бернштейна, взятых от симметричного модуля на симметричном отрезке* // Совр. проблемы теории функций и их приложения. Материалы 18-й межд. Сарат. зимней школы. Саратов. ООО Изд-во «Научная книга». 2016. С. 209–211.
22. Петросова М.А. *О поведении коэффициентов в полиномах Бернштейна для симметричного модуля на симметричном отрезке* // Математика и информатика. Материалы международной конференции. Москва. МПГУ. 2016. С. 77–79.
23. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. *Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке* // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 19 Смоленск: СмолГУ. 2018. С. 336-347.

Маргарита Арсеновна Петросова,
Московский педагогический государственный университет,
Краснопрудная, 14,
107140, г. Москва, Россия
E-mail: `petrosova05@mail.ru`

Иван Владимирович Тихонов,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, ф-т ВМК,
Ленинские горы, ГСП-1, 1-52,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: `ivtikh@mail.ru`

Владимир Борисович Шерстюков,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: `shervb73@gmail.com`