ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 1 (2018). С. 83-95.

УДК 517.54

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА ВБЛИЗИ ТОЧКИ СЛАБОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЛОТНОСТИ

Р.Б. САЛИМОВ

Аннотация. Рассматривается сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$I(\gamma_0)=\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma,$$

плотность которого $\varphi(\gamma)$ есть непрерывная функция, заданная в интервале $[0,2\pi]$, $\gamma_0 \in [0,2\pi]$, $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, и интеграл понимается в смысле главного значения. Принимается, что в окрестности фиксированной точки $\gamma=c$, $c\in(c^-,c^+)\subset[0,2\pi]$, $c^+-c^-<1$, для плотности интеграла $\varphi(\gamma)$ справедливо представление $\varphi(\gamma)=\frac{\Phi(\gamma)}{\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^\beta}$, $\gamma\in(c^-,c^+)$, где $\Phi(\gamma)$ – заданная функция, непрерывная в каждом из интервалов $[c^-,c]$, $[c,c^+]$, с неравными, в общем случае, односторонними пределами $\Phi(c-0)$, $\Phi(c+0)$, β – заданное число и $\beta>1$. Предполагается, что имеют место представления $\Phi(\gamma)-\Phi(c\pm0)=\frac{\chi(\gamma)}{\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^\delta}$, $\chi'(\gamma)=\frac{\nu(\gamma)}{\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}$, где $\delta>0$ – заданное число, $\chi(\gamma)$, $\nu(\gamma)$ – заданные функции непрерывные в каждом из интервалов $[c^-,c]$, $[c,c^+]$, $\nu(c\pm0)=0$, $\Phi(c+0)$ берется при $\gamma>c$, $\Phi(c-0)$ – при $\gamma<c$.

Доказано, что при выполнении вышеуказанных условий, справедливо представление

$$\begin{aligned}I(\gamma_0)-I(c)=&\frac{\Phi(c-0)-\Phi(c+0)}{(\beta-1)\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}}\\&-\frac{U(c+0)-U(c-0)}{\tilde\beta(\tilde\beta-1)\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}+\ldots,\quad \gamma_0\to c,\end{aligned}$$

$\tilde\beta=\beta+\delta$, $\beta>1$, $\delta>0$, $U(c+0)-U(c-0)=\tilde\beta\left(\chi(c+0)-\chi(c-0)\right)$. Рассмотрен также случай $\beta=1$. Отличительной особенностью статьи является то, что в ней при установлении поведения рассматриваемого сингулярного интеграла вблизи точки слабой непрерывности его плотности не используется предположение о выполнении условия Гельдера в окрестности указанной точки для плотности интеграла или ее составляющей. Эта особенность позволит расширить круг возможных применений результатов статьи.

Ключевые слова: асимптотическое представление, сингулярный интеграл, ядро Гильберта, условие Гёльдера, слабая непрерывность.

Mathematics Subject Classification: 30G12

R.B. Salimov, Behavior of singular integral with Hilbert kernel at weak continuity point of density.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00636-а).
Поступила 8 февраля 2017 г.

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$I(\gamma_0) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} \, d\gamma, \tag{1}$$

считая, что плотность интеграла $\varphi(\gamma)$ есть непрерывная функция, заданная в интервале $[0, 2\pi]$, $\gamma_0 \in [0, 2\pi]$, $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, и интеграл понимается в смысле главного значения.

Пусть в окрестности фиксированной точки $\gamma = c$, $c \in (c^-, c^+) \subset [0, 2\pi]$, $c^+ - c^- < 1$, для плотности интеграла $\varphi(\gamma)$ справедливо представление

$$\varphi(\gamma) = \frac{\Phi(\gamma)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right)^\beta}, \ \gamma \in (c^-, c^+), \tag{2}$$

где $\Phi(\gamma)$ – заданная функция, непрерывная в каждом из интервалов $[c^-, c]$, $[c, c^+]$, с неравными, в общем случае, односторонними пределами $\Phi(c-0)$, $\Phi(c+0)$, β – заданное число, и $\beta > 1$.

В отличии от условий, принятых в работах [1], [2], здесь будем считать, что имеют место представления

$$\Phi(\gamma) - \Phi(c \pm 0) = \frac{\chi(\gamma)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right)^\delta}, \tag{3}$$

$$\chi'(\gamma) = \frac{\nu(\gamma)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\gamma - c}{2}}, \tag{4}$$

где $\delta > 0$ – заданное число, $\chi(\gamma)$, $\nu(\gamma)$ – заданные функции, непрерывные в каждом из интервалов $[c^-, c]$, $[c, c^+]$, $\nu(c \pm 0) = 0$, причём в формуле (3) и в дальнейшем верхний знак берётся при $\gamma > c$, нижний – при $\gamma < c$.

С учётом (3) формулу (2) запишем так

$$\varphi(\gamma) = \frac{\chi(\gamma)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right)^{\beta + \delta}} + \frac{\Phi(c \pm 0)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right)^\beta}, \ \gamma \in (c^-, c^+). \tag{5}$$

2. Основные результаты. I.

Считая для простоты $c^- > 0$, $c^+ < 2\pi$, интеграл (1) представим так

$$\begin{gathered} I(\gamma_0) = \left(\int\limits_0^{c^-} + \int\limits_{c^+}^{2\pi}\right) \varphi(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} \, d\gamma + \int\limits_{c^-}^{c^+} \frac{\chi(\gamma)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right)^{\beta + \delta}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} \, d\gamma + \\ + \int\limits_{c^-}^{c^+} \frac{\Phi(c \pm 0)}{\left(-\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right)^\beta} \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} \, d\gamma = J_1(\gamma_0) + J_2(\gamma_0) + J_3(\gamma_0) + J_4(\gamma_0), \ \gamma_0 \neq c. \end{gathered} \tag{6}$$

Интегралы $J_1(\gamma_0)$, $J_2(\gamma_0)$ дифференцируемы в каждой внутренней точке γ_0 интервала (c^-, c^+). Плотности интегралов $J_3(\gamma_0)$, $J_4(\gamma_0)$ дифференцируемы в интервале $[c^-, c^+]$, исключая точку c. Поэтому интегралы $J_3(\gamma_0)$, $J_4(\gamma_0)$ удовлетворяют условию Гёльдера – условию H в любом замкнутом интервале, лежащем внутри $[c^-, c]$ или $[c, c^+]$, (см. [3], с. 59, 61).

В дальнейшем для сокращения записей будем пользоваться обозначением

$$\operatorname{ls} \gamma = -\ln \sin^2 \gamma.$$

В формуле

$$\left(\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta}}\right)'_{\gamma}=\frac{\beta}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}} \tag{7}$$

правая часть есть функция, убывающая в интервале $(c-2e^{-\beta-1}, c+2e^{-\beta-1})$, поскольку

$$\left[\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}\right]'_{\gamma}>0 \tag{8}$$

в каждом из интервалов $c<\gamma<c+2e^{-\beta-1}$, $c-2e^{-\beta-1}<\gamma<c$. В самом деле, при $0<\gamma-c<1$, замечая, что $\sin x<x$ при $x>0$, получаем

$$\left[\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}\right]'_{\gamma}>\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta}\left(-\beta-1+\ln\frac{2}{\gamma-c}\right)>0.$$

Здесь в правой части сумма в скобках обращается в нуль при $\gamma=c+2e^{-\beta-1}$, оставаясь положительной для $c<\gamma<c+2e^{-\beta-1}$, следовательно, при $c<\gamma<c+2e^{-\beta-1}$ имеет место (8). Легко проверить, что последнее неравенство выполняется и для $\gamma\in(c-2e^{-\beta-1}, c)$.

В дальнейшем будем считать, что в формуле (6)

$$c^-=c-2e^{-\beta-1},\ c^+=c+2e^{-\beta-1}. \tag{9}$$

Интегрируя по частям, слагаемое $J_4(\gamma_0)$ формулы (6) представим так

$$J_4(\gamma_0)=-\frac{\Phi(c+0)}{\left(\operatorname{ls}\frac{c^+-c}{2}\right)^{\beta}}\operatorname{ls}\frac{c^+-\gamma_0}{2}+\frac{\Phi(c-0)}{\left(\operatorname{ls}\frac{c^--c}{2}\right)^{\beta}}\operatorname{ls}\frac{c^--\gamma_0}{2}+\beta K(\gamma_0), \tag{10}$$

где

$$K(\gamma_0)=\int\limits_{c^-}^{c^+}\frac{\Phi(c\pm0)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)d\gamma. \tag{11}$$

Первые два слагаемых правой части формулы (10) дифференцируемы в любой внутренней точке интервала (c^-, c^+). Следовательно, нужно исследовать поведение функции $K(\gamma_0)$ при $\gamma_0\to c$.

Рассмотрим пока случай, когда $\gamma_0>c$. Будем считать, что $\gamma_0<c+e^{-\beta-1}$, учитывая, что в дальнейшем разность γ_0-c предполагается бесконечно малой. Тогда согласно (9) имеем

$$c<\gamma_0<2\gamma_0-c<c+2e^{-\beta-1}=c^+.$$

Обозначая

$$c^-_{\gamma_0}=\gamma_0-2e^{-\beta-1}, \tag{12}$$

для $c<\gamma_0<c+e^{-\beta-1}$ будем иметь $c^-<c^-_{\gamma_0}=\gamma_0-2e^{-\beta-1}<2c-\gamma_0<c$.

Формулу (11) запишем так

$$K(\gamma_0)=\left(\int\limits_{c^-}^{c^-_{\gamma_0}}+\int\limits_{c^-_{\gamma_0}}^{2c-\gamma_0}+\int\limits_{2c-\gamma_0}^{c}+\int\limits_{c}^{\frac{c+\gamma_0}{2}}+\int\limits_{\frac{c+\gamma_0}{2}}^{2\gamma_0-c}+\int\limits_{2\gamma_0-c}^{c^+}\right)\frac{\Phi(c\pm0)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}d\gamma=$$
$$=\Phi(c-0)\left[K_1(\gamma_0)+K_2(\gamma_0)+K_3(\gamma_0)\right]+\Phi(c+0)\left[K_4(\gamma_0)+K_5(\gamma_0)+K_6(\gamma_0)\right]. \tag{13}$$

Подынтегральное выражение для $K_4(\gamma_0)$ является величиной, положительной при $\gamma\in(c,\frac{c+\gamma_0}{2})$, его множитель $\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$ есть непрерывная возрастающая положительная функция в интервале интегрирования.

Поэтому, заменяя в формуле для $K_4(\gamma_0)$ множитель $\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$ на его наименьшее, а затем на наибольшее значения соответственно $\operatorname{ls}\frac{c-\gamma_0}{2}$, $\operatorname{ls}\frac{c-\gamma_0}{4}$, получим два интеграла, которые вычисляются в силу (7) и ограничивают интеграл $K_4(\gamma_0)$ соответственно снизу и сверху, т.е. для значений указанных интегралов получаем соотношение

$$\frac{\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta}}<K_4(\gamma_0)<\frac{\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta}},$$

и равносильное последнему соотношение

$$\frac{\ln\left(4\cos^2\frac{\gamma_0-c}{4}\right)}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta}}>-K_4(\gamma_0)+\frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta-1}}>0.$$

Следовательно, для значений γ_0, близких к числу c, имеем

$$-K_4(\gamma_0)+\frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta-1}}=O\left(1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta}\right).$$

Здесь и в дальнейшем, как обычно, под $O(\eta)$ будем понимать величину, для которой отношение $O(\eta)\big/\eta$ остаётся ограниченным по модулю при всех достаточно малых (достаточно больших) по модулю значениях η.

В первой части последней формулы вместо $O\left(1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta}\right)$ можно взять $O\left(1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right)$, так как $-\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\sim-\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}$ при $\gamma_0\to c$, кроме того,

$$1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta-1}=1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}+O\left(1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c. \tag{14}$$

В самом деле,

$$\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta-1}}-\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}}=$$
$$=\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}}\left[\left(1+\frac{\ln\left(2\cos\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^2}{\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}}\right)^{1-\beta}-1\right]=O\left(1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c.$$

Таким образом приходим к формуле

$$K_4(\gamma_0)=\frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}}+O\left(1\Big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c. \tag{15}$$

Так как согласно (8) множитель $1\Big/\left[\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}\right]$ убывает в интервале интегрирования для $K_5(\gamma_0)$, то

$$0<K_5(\gamma_0)<\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{4}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma_0-c}{4}}\int\limits_{\frac{c+\gamma_0}{2}}^{2\gamma_0-c}\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma. \tag{16}$$

Интеграл этой формулы представим в виде

$$\int\limits_{\frac{c+\gamma_0}{2}}^{2\gamma_0-c}\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma=(\gamma-\gamma_0)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\Bigg|_{\frac{c+\gamma_0}{2}}^{2\gamma_0-c}+\int\limits_{\frac{c+\gamma_0}{2}}^{2\gamma_0-c}(\gamma-\gamma_0)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (16) и учитывая при этом, что

$$0<\int\limits_{\frac{c+\gamma_0}{2}}^{2\gamma_0-c}(\gamma-\gamma_0)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma<d(\gamma_0-c),\ d=const,$$

получим

$$K_5(\gamma_0) = O\left(1\big/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{17}$$

Интеграл $K_6(\gamma_0)$ формулы (13) представим так

$$K_6(\gamma_0) = \frac{1/(\beta-1)}{\left(\operatorname{ls}\frac{c^+-\gamma_0}{2}\right)^{\beta-1}} - \frac{1/(\beta-1)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}} - E_6(\gamma_0), \tag{18}$$

где

$$E_6(\gamma_0) = \int\limits_{2\gamma_0-c}^{c^+} A(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma, \tag{19}$$

$$A(\gamma,\gamma_0,c) = 1\big/\left[\operatorname{ls}\tfrac{c-\gamma}{2}\right]^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{c-\gamma}{2} - 1\big/\left[\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-\gamma}{2}\right]^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma_0-\gamma}{2}. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что для любого $\gamma_0 \in (2\gamma_0 - c, c^+)$ выполняется неравенство

$$A(\gamma,\gamma_0,c) > 0. \tag{21}$$

В самом деле, в силу (8) имеем

$$\left[\left(\operatorname{ls}\frac{\xi-\gamma}{2}\right)^{\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\xi-\gamma}{2}\right]'_{\xi} > 0 \tag{22}$$

в интервале $\gamma - 2e^{-\beta-1} < \xi < \gamma$.

Рассмотрим множество последних интервалов для $\gamma \in (2\gamma_0 - c, c^+)$. В этом случае имеем $\gamma - 2e^{-\beta-1} < c$, так как $\gamma < c + 2e^{-\beta-1} = c^+$, и $\gamma > \gamma_0$, так как $\gamma > 2\gamma_0 - c > \gamma_0$. Следовательно, при $\gamma \in (2\gamma_0 - c, c^+)$ интервал $\gamma - 2e^{-\beta-1} < \xi < \gamma$ содержит интервал (c, γ_0). Поэтому для любого $\gamma \in (2\gamma_0 - c, c^+)$ будет выполняться условие (22) в интервале $c < \xi < \gamma_0$. Это означает, что в последнем интервале функция $1\big/\left[\operatorname{ls}\frac{\xi-\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\xi-\gamma}{2}\right]$ убывает. Поэтому согласно (20) будет иметь место (21).

Замечая, что в интервале $2\gamma_0 - c < \gamma < c^+$ функция $\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$ убывает и положительна, в силу (19) будем иметь

$$0 < E_6(\gamma_0) < \operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\cdot\int\limits_{2\gamma_0-c}^{c^+} A(\gamma,\gamma_0,c)\,d\gamma.$$

Отсюда после вычисления интеграла правой части с учётом (7) и (20) придем к соотношению

$$\begin{gathered} 0 < E_6(\gamma_0) < \frac{1}{\beta}\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)\left[\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\left(\frac{c-\gamma_0}{2}+e^{-\beta-1}\right)\right)^{\beta}} - \frac{1}{\left(\operatorname{ls}e^{-\beta-1}\right)^{\beta}}\right] + \\ + \frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}}\left[\frac{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}}{\left(\operatorname{ls}\left(\gamma_0-c\right)\right)^{\beta}} - 1\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

Первая разность в квадратных скобках правой части последней формулы является бесконечно малой одного порядка с величиной $(\gamma_0 - c)$ при $\gamma_0 \to c$, как приращение дифференцируемой функции. Вторая разность рассматриваемой формулы, равная

$$\left(1 + \frac{-\ln\left(2\cos\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^2}{\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}}\right)^{-\beta} - 1,$$

является бесконечно малой того же порядка, что и $1\big/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)$, при $\gamma_0 \to c$.

Поэтому получаем

$$E_6(\gamma_0) = O\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{24}$$

Принимая во внимание последнее соотношение, формулу (18) представим так

$$K_6(\gamma_0) = \frac{1/(\beta-1)}{\left(\operatorname{ls}\frac{c^+-c}{2}\right)^{\beta-1}} - \frac{1/(\beta-1)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}} + O\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{25}$$

Здесь учтено, что разность между первыми слагаемыми правых частей формул (18), (25) есть малая величина того же порядка, что и $(\gamma_0 - c)$, при $\gamma_0 \to c$.

Будем считать, что $-K_3(\gamma_0)$ есть интеграл от положительной функции, содержащей множитель $\operatorname{tg}\frac{c-\gamma}{2}$ в знаменателе. Так как множитель $\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$ подынтегральной функции для $-K_3(\gamma_0)$ есть возрастающая функция в интервале интегрирования с наименьшим и наибольшим значениями соответственно $\operatorname{ls}(\gamma_0 - c)$ и $\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}$, поступая как и при исследовании поведения интеграла $K_4(\gamma_0)$, придем к соотношению $\frac{\operatorname{ls}(\gamma_0-c)}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}} < -K_3(\gamma_0) < \frac{\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}}$, равносильному следующему $\frac{\ln\left(4\cos^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}} > K_3(\gamma_0) + \frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}} > 0$.

Отсюда видно, что

$$K_3(\gamma_0) + \frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}} = O\left(\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{26}$$

По аналогии с формулой (18) имеем

$$K_2(\gamma_0) = \frac{1/(\beta-1)}{\left(\operatorname{ls}(c-\gamma_0)\right)^{\beta-1}} - \frac{1/(\beta-1)}{\left(\operatorname{ls}e^{-\beta-1}\right)^{\beta-1}} - E_2(\gamma_0), \tag{27}$$

где

$$E_2(\gamma_0) = \int\limits_{c^-_{\gamma_0}}^{2c-\gamma_0} A(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma, \tag{28}$$

$A(\gamma,\gamma_0,c)$ – функция, определяемая формулой (20).

При $\gamma \in (c^-_{\gamma_0}, 2c-\gamma_0)$ интервал $\gamma < \xi < \gamma + 2e^{-\beta-1}$ будет содержать интервал (c,γ_0), так как здесь имеем $\gamma < 2c - \gamma_0 < c$, $\gamma + 2e^{-\beta-1} > \gamma_0$, поскольку $\gamma > c^-_{\gamma_0} = \gamma_0 - 2e^{-\beta-1}$.

Следовательно, для каждого $\gamma \in (c^-_{\gamma_0}, 2c-\gamma_0)$ будет выполняться условие (22) в интервале $c < \xi < \gamma_0$, поэтому будет иметь место неравенство $A(\gamma,\gamma_0,c) > 0$. Учитывая последнее и замечая, что $\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$ – возрастающая (положительная) функция в интервале $c^-_{\gamma_0} < \gamma < 2c - \gamma_0$, согласно (28) имеем $0 < E_2(\gamma_0) < \operatorname{ls}(\gamma_0 - c)\cdot\int\limits_{c^-_{\gamma_0}}^{2c-\gamma_0} A(\gamma,\gamma_0,c)\,d\gamma$.

Отсюда, вычисляя интеграл этой формулы, получим

$$0 < E_2(\gamma_0) < \frac{1}{\beta}\operatorname{ls}(\gamma_0-c)\cdot\left[\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\left(-\frac{\gamma_0-c}{2}+e^{-\beta-1}\right)\right)^{\beta}} - \frac{1}{\left(\operatorname{ls}\left(e^{-\beta-1}\right)\right)^{\beta}}\right] +$$
$$+\frac{1}{\beta\left(\operatorname{ls}(\gamma_0-c)\right)^{\beta-1}}\cdot\left[1 - \frac{\left(\operatorname{ls}(\gamma_0-c)\right)^{\beta}}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}}\right].$$

Первая разность в квадратных скобках правой части этой формулы такая же, что и в неравенстве (23), а второе слагаемое (произведение) правой части последней формулы отличается от соответствующего слагаемого (произведения) правой части (25) только множителем $-\,\mathrm{ls}\,(\gamma_0-c)\big/\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}$, ограниченным при $\gamma_0\to c$. Следовательно,

$$E_2(\gamma_0)=O\left(1\big/\big(\,\mathrm{ls}\,\tfrac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c. \tag{29}$$

Замечая, что при малых γ_0-c по аналогии с формулой (14) имеем

$$\frac{1}{\big(\,\mathrm{ls}\,(\gamma_0-c)\big)^{\beta-1}}-\frac{1}{\big(\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta-1}}=O\left(1\big/\big(\,\mathrm{ls}\,\tfrac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta}\right). \tag{30}$$

Представление (27) запишем так

$$K_2(\gamma_0)=\frac{1\big/(\beta-1)}{\big(\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta-1}}-\frac{1\big/(\beta-1)}{\big(\,\mathrm{ls}\,e^{-\beta-1}\big)^{\beta-1}}+O\left(1\big/\big(\,\mathrm{ls}\,\tfrac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c.$$

Учитывая, что в интервале $c^-<\gamma<c^-_{\gamma_0}$ функция $\mathrm{ls}\,\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$ возрастает и положительна, будем иметь

$$0<-K_1(\gamma_0)<\,\mathrm{ls}\,(e^{-\beta-1})\cdot\int\limits_{c^-}^{c^-_{\gamma_0}}\frac{d\gamma}{\big(\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma-c}{2}\big)^{\beta+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{c-\gamma}{2}}=\,\mathrm{ls}\,(e^{-\beta-1})\frac{-1}{\beta\,\big(\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma-c}{2}\big)^{\beta}}\Bigg|_{c^-}^{c^-_{\gamma_0}}.$$

Отсюда получаем

$$K_1(\gamma_0)=O(\gamma_0-c),\ \gamma_0\to c. \tag{31}$$

Полученные для $K_j(\gamma_0)$, $j=\overline{1,6}$, выражения подставим в формулу (13) и придём к следующему представлению

$$\begin{aligned}K(\gamma_0)=\frac{\Phi(c+0)-\Phi(c-0)}{(\beta-1)\,\big(\,\mathrm{ls}\,(e^{-\beta-1})\big)^{\beta-1}}+\frac{\Phi(c-0)-\Phi(c+0)}{\beta(\beta-1)\,\big(\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta-1}}+\\+O\left(1\big/\big(\,\mathrm{ls}\,\tfrac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c.\end{aligned} \tag{32}$$

Формулы (10), (11), (32) остаются в силе и в случае $\gamma_0=c$. В частности, первое слагаемое правой части формулы (32) равно $K(c)$.

Пользуясь формулой (10), запишем выражение для $J_4(\gamma_0)-J_4(c)$ и учтём, что

$$-\,\mathrm{ls}\,\frac{c^+-\gamma_0}{2}+\,\mathrm{ls}\,\frac{c^+-c}{2}=O(\gamma_0-c), \tag{33}$$

так как разность этой формулы есть бесконечно малая одного порядка с величиной (γ_0-c) при $\gamma_0\to c$ в силу дифференцируемости функции $-\,\mathrm{ls}\,\frac{c^+-\gamma_0}{2}$ в точке c, и справедливо аналогичное соотношение, получаемое заменой c^+ на c^-.

Тогда, принимая во внимание (32), получим

$$J_4(\gamma_0)-J_4(c)=\frac{\Phi(c-0)-\Phi(c+0)}{(\beta-1)\,\big(\,\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta-1}}+O\left(1\big/\big(\,\mathrm{ls}\,\tfrac{\gamma_0-c}{2}\big)^{\beta}\right),\ \gamma_0\to c. \tag{34}$$

Отметим также, что по аналогии с (33) для интегралов $J_1(\gamma_0)$, $J_2(\gamma_0)$ формулы (6) имеем

$$J_1(\gamma_0)-J_1(c)=O(\gamma_0-c),\ J_2(\gamma_0)-J_2(c)=O(\gamma_0-c). \tag{35}$$

3. Основные результаты. II

В выражении для интеграла $J_3(\gamma_0)$ формулы (6) обозначим $\tilde\beta=\beta+\delta$, и по формулам, аналогичным (9), (12) определим $\tilde c^-=c-2e^{-\tilde\beta-1}$, $\tilde c^+=c+2e^{-\tilde\beta-1}$, $\tilde c^-_{\gamma_0}=\gamma_0-2e^{-\tilde\beta-1}$, при этом будем иметь $\tilde c^->c^-$, $\tilde c^+<c^+$, $\tilde c^-_{\gamma_0}>c^-_{\gamma_0}$; кроме того, будем считать, что $c<\gamma_0<c+e^{-\tilde\beta-1}$.

Интеграл $J_3(\gamma_0)$ представим так

$$J_3(\gamma_0) = \left(\int\limits_{c^-}^{\tilde c^-} + \int\limits_{\tilde c^-}^{\tilde c^+} + \int\limits_{\tilde c^+}^{c^+}\right) \frac{\chi(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}} \operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma = J_{31}(\gamma_0) + J_{32}(\gamma_0) + J_{33}(\gamma_0). \qquad (36)$$

Интегралы $J_{31}(\gamma_0)$, $J_{33}(\gamma_0)$ дифференцируемы в каждой внутренней точке γ_0 интервала $(\tilde c^-, \tilde c^+)$.

Интегрируя по частям, интеграл $J_{32}(\gamma_0)$ запишем в виде

$$J_{32}(\gamma_0) = -\frac{\chi(\tilde c^+)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\tilde c^+-c}{2}\right)^{\tilde\beta}} \operatorname{ls}\frac{\tilde c^+-\gamma_0}{2} + \frac{\chi(\tilde c^-)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\tilde c^--c}{2}\right)^{\tilde\beta}} \operatorname{ls}\frac{\tilde c^--\gamma_0}{2} + L(\gamma_0), \qquad (37)$$

где

$$L(\gamma_0) = \int\limits_{\tilde c^-}^{\tilde c^+} \frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}} \cdot \operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma. \qquad (38)$$

$U(\gamma) = \nu(\gamma)+\tilde\beta\chi(\gamma)$ – функция, непрерывная в каждом из интервалов $[c^-, c]$, $[c, c^+]$ согласно формулам (3), (4).

Пусть $\tilde K_j(\gamma_0)$ есть интеграл, получаемый по формуле для $K_j(\gamma_0)$ из представления (13) при $j = \overline{1,6}$ заменой K, c^-, $c^-_{\gamma_0}$, c^+, β соответственно на $\tilde K$, $\tilde c^-$, $\tilde c^-_{\gamma_0}$, $\tilde c^+$, $\tilde\beta$.

Интеграл (38) запишем в виде

$$L(\gamma_0) = L_1(\gamma_0) + L_2(\gamma_0) + \cdots + L_6(\gamma_0), \qquad (39)$$

где слагаемые в правой части есть интегралы, взятые по интервалам соответственно $(\tilde c^-, \tilde c^-_{\gamma_0})$, $(\tilde c^-_{\gamma_0}, 2c-\gamma_0)$, $(2c-\gamma_0, c)$, $(c, \frac{c+\gamma_0}{2})$, $(\frac{c+\gamma_0}{2}, 2\gamma_0-c)$, $(2\gamma_0-c, \tilde c^+)$.

В каждом из этих интервалов умножаемая на $U(\gamma)$ дробь подынтегральной функции интеграла (38) является знакопостоянной, а функция $U(\gamma)$ – непрерывной. Поэтому по теореме о среднем значении [4] (с. 131, 611) будем иметь

$$L_j(\gamma_0) = U(\xi_j)\tilde K_j(\gamma_0),\ j = 1, 3, 4, 5, \qquad (40)$$

здесь ξ_j – точка интервала интегрирования $L_j(\gamma_0)$.

Для $\tilde K_1(\gamma_0)$, $\tilde K_5(\gamma_0)$ справедливы формулы, получаемые соответственно из (31), (17) заменой K и β соответственно на $\tilde K$ и $\tilde\beta$, поэтому в силу (40) получим $L_1(\gamma_0) = O(\gamma_0 - c)$, $L_5(\gamma_0) = O\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right)$, $\gamma_0 \to c$.

Для интегралов $\tilde K_3(\gamma_0)$, $\tilde K_4(\gamma_0)$ справедливы представления, получаемые соответственно из (26), (15) вышеуказанной заменой. Поэтому, учитывая, что в формуле (40) множитель $U(\xi_j) \to U(c-0)$ для $j = 3$ и $U(\xi_j) \to U(c+0)$ для $j = 4$ при $\gamma_0 \to c$, будем иметь

$$L_3(\gamma_0) = \frac{-U(c-0)}{\tilde\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}} + o\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right) + O\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\ \gamma_0 \to c,$$

$$L_4(\gamma_0) = \frac{U(c+0)}{\tilde\beta\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}} + o\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right) + O\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\ \gamma_0 \to c,$$

здесь, как обычно, $o(\alpha)$ означает бесконечно малую высшего порядка, чем бесконечно малая α.

Обозначая

$$L_6^{\gamma_0}(c) = \int\limits_{2\gamma_0-c}^{\tilde c^+} \frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\,d\gamma,$$

рассмотрим разность

$$L_6(\gamma_0) - L_6^{\gamma_0}(c) = \int\limits_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+} \frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}} \left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2} - \operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right) d\gamma.$$

Так как $\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2} - \operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2} > 0$, по теореме о среднем значении будем иметь

$$L_6(\gamma_0) - L_6^{\gamma_0}(c) =$$
$$= U(\xi_6) \int\limits_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+} \frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}-1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}} \left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2} - \operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right) d\gamma,\ 2\gamma_0 - c \leqslant \xi_6 \leqslant \tilde{c}^+$$

или

$$L_6(\gamma_0) - L_6^{\gamma_0}(c) =$$
$$= U(\xi_6) \int\limits_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+} \left[-\tilde{A}(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2} + \frac{\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)^{\tilde{\beta}+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}} - \frac{\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\right] d\gamma, \tag{41}$$

где $\tilde{A}(\gamma,\gamma_0,c)$ определяется формулой, получаемой из (20) заменой A и β соответственно на $\tilde{A}$ и $\tilde{\beta}$.

Вычислив интегралы от двух последних слагаемых подынтегральной функции, получим

$$\begin{gathered} L_6(\gamma_0) - L_6^{\gamma_0}(c) = U(\xi_6)\left\{\int\limits_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+} -\tilde{A}(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\tilde{\beta}-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)^{\tilde{\beta}-1}}\Bigg|_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+} - \frac{1}{(\tilde{\beta}-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}-1}}\Bigg|_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+}\right\}. \end{gathered} \tag{42}$$

Заменяя в формуле (19), (20), (24) A, c^+, β на соответственно $\tilde{A}$, $\tilde{c}^+$, $\tilde{\beta}$ будем иметь

$$\int\limits_{2\gamma_0-c}^{\tilde{c}^+} -\tilde{A}(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma = O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{43}$$

Разность последних двух дробей правой части формулы (42) при $\gamma = \tilde{c}^+$ является бесконечно малой одного порядка с величиной $(\gamma_0 - c)$ при $\gamma_0 \to c$, а при $\gamma = 2\gamma_0 - c$ представляет собой величину $O\left(1/\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}}\right)$ в силу формулы (30), в которой $\beta = \tilde{\beta}$.

Таким образом формула (42), показывает, что

$$L_6(\gamma_0) - L_6^{\gamma_0}(c) = O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{44}$$

Поскольку $\tilde{\beta} > 1$, то интеграл

$$L_6(c) = \int\limits_{c}^{\tilde{c}^+} \frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde{\beta}}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\,d\gamma \tag{45}$$

существует [4] (с. 576, 611), так как $U(\gamma)$ – непрерывная в интервале $[c,\tilde{c}^+]$ функция, а второй множитель подынтегральной функции есть положительная интегрируемая функция.

Разность $L_6(c)-L_6^{\gamma_0}(c)$, представляющую собой интеграл по интервалу $(c,2\gamma_0-c)$, запишем, используя теорему о среднем значении

$$L_6(c)-L_6^{\gamma_0}(c)=$$
$$=U(\xi_6^*)\left.\frac{1}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}\right|_c^{2\gamma_0-c}=\frac{U(\xi_6^*)}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}(\gamma_0-c)\right)^{\tilde\beta-1}},\ c\leqslant\xi_6^*\leqslant 2\gamma_0-c.$$

Отсюда с учётом (30) будем иметь

$$L_6(c)-L_6^{\gamma_0}(c)=\frac{U(c+0)}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}+o\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right)+O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\gamma_0\to c.\quad(46)$$

Теперь на основании (44), (46) запишем

$$L_6(\gamma_0)-L_6(c)=\frac{-U(c+0)}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}-o\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right)+O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\ \gamma_0\to c.$$

Введем обозначение

$$L_2^{\gamma_0}(c)=\int\limits_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}\frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\,d\gamma\qquad(47)$$

и рассмотрим разность

$$L_2(\gamma_0)-L_2^{\gamma_0}(c)=\int\limits_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}\frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}-\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)d\gamma.$$

Принимая во внимание, что здесь

$$\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}-\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}<0,$$

по теореме о среднем значении получим

$$L_2(\gamma_0)-L_2^{\gamma_0}(c)=U(\xi_2)\int\limits_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}\frac{\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}-\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\,d\gamma,\ \tilde c_{\gamma_0}^-\leqslant\xi_2\leqslant 2c-\gamma_0.\qquad(48)$$

Поступая как и выше, эту формулу запишем так

$$L_2(\gamma_0)-L_2^{\gamma_0}(c)=$$
$$=U(\xi_2)\cdot\int\limits_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}\left[-\tilde A(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma+\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\operatorname{tg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}-\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\right]d\gamma,$$

где $\tilde A(\gamma,\gamma_0,c)$ обозначает то же, что и в формуле (41), отсюда по аналогии с формулой (42) будем иметь

$$L_2(\gamma_0)-L_2^{\gamma_0}(c)=U(\xi_2)\cdot\left\{\int\limits_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}-\tilde A(\gamma,\gamma_0,c)\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\,d\gamma+\left.\frac{1}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}\right|_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}-\right.$$
$$\left.-\left.\frac{1}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}\right|_{\tilde c_{\gamma_0}^-}^{2c-\gamma_0}\right\}.\qquad(49)$$

На основании формул, получаемых из (20), (28), (29) вышеуказанной заменой, для интеграла правой части формулы (49) получим соотношение, аналогичное (43); последняя разность в правой части формулы (49) оценивается так же, как и соответствующая разность в формуле (42). Таким образом, приходим к соотношению

$$L_2(\gamma_0) - L_2^{\gamma_0}(c) = O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\ \gamma_0 \to c. \tag{50}$$

Поскольку $\tilde\beta > 1$, то интеграл

$$L_2(c) = \int\limits_{\tilde c^-}^{c} \frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\,d\gamma, \tag{51}$$

аналогичный интегралу $L_6(c)$ формулы (45), существует, и согласно (38) существует

$$L(c) = L_2(c) + L_6(c).$$

В силу (47), (51) имеем

$$L_2(c) - L_2^{\gamma_0}(c) = \left(\int\limits_{\tilde c^-}^{\tilde c^-_{\gamma_0}} + \int\limits_{2c-\gamma_0}^{c}\right) \frac{U(\gamma)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}}\,d\gamma.$$

Здесь в правой части интегралы запишем, применяя теорему о среднем значении, по аналогии с формулой (48).

После вычисления оставшихся интегралов будем иметь

$$L_2(c) - L_2^{\gamma_0}(c) = U(\xi_{11})\left.\frac{1}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}\right|_{\tilde c^-}^{\tilde c^-_{\gamma_0}} - U(\xi_{31})\frac{1}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}},$$
$$\tilde c^- \leqslant \xi_{11} \leqslant \tilde c^-_{\gamma_0},\ 2c-\gamma_0 \leqslant \xi_{31} \leqslant c.$$

Первое слагаемое правой части последней формулы есть малая одного порядка с бесконечно малой $(\gamma_0 - c)$ при $\gamma_0 \to c$. Во втором слагаемом множитель $U(\xi_{31}) \to U(c-0)$ при $\gamma_0 \to c$.

Поэтому

$$L_2(c) - L_2^{\gamma_0}(c) = \frac{-U(c-0)}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}} + o\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right),\ \gamma_0 \to c.$$

Отсюда с учётом формулы (50) получаем

$$L_2(\gamma_0) - L_2^{\gamma_0}(c) = \frac{U(c-0)}{(\tilde\beta-1)\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}} - o\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right) + O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\ \gamma_0 \to c.$$

На основании формулы (39) и последующих соотношений будем иметь

$$\begin{gathered}L(\gamma_0) = L(c) - \frac{1}{\tilde\beta(\tilde\beta-1)}\cdot(U(c+0)-U(c-0))\cdot\frac{1}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}} + \\ +o\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right) + O\left(1/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta}\right),\ \gamma_0 \to c.\end{gathered} \tag{52}$$

В формулу (36) подставим выражение (37), тогда в правой части полученного соотношения каждое слагаемое, кроме $L(\gamma_0)$, в силу дифференцируемости можно представить как сумму его значения в точке c и бесконечно малой функции одного порядка с величиной $(\gamma_0 - c)$ при $\gamma_0 \to c$. Замечая, что полученное соотношение выполняется и при $\gamma_0 = c$, придём к равенству

$$J_3(\gamma_0) - J_3(c) = L(\gamma_0) - L(c) + O(\gamma_0 - c),\ \gamma_0 \to c. \tag{53}$$

Формулы (52), (53) дают представление для $J_3(\gamma_0)$.

На основании соотношений (34), (35), (52), (53) с учётом формулы (6), согласно которой $I(c)=\sum\limits_{j=1}^{4} J_j(c)$, приходим к следующему представлению

$$\begin{aligned}&I(\gamma_0)-I(c)=\frac{\Phi(c-0)-\Phi(c+0)}{(\beta-1)\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta-1}}-\\&-\frac{U(c+0)-U(c-0)}{\tilde\beta(\tilde\beta-1)\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}+o\left(1/\left(-\ln\sin^2\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right)+O\left(1/\left(-\ln\sin^2\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\beta}\right),\\&\gamma_0\to c,\ \tilde\beta=\beta+\delta,\ \beta>1,\ \delta>0.\end{aligned}\tag{54}$$

Отсюда, в частности, видно, что интеграл $I(\gamma_0)$ является функцией, непрерывной в точке c.

Внося соответствующие изменения в вышеприведённые формулы и выкладки, нетрудно проверить, что это представление справедливо и для близких к числу c значений $\gamma_0<c$.

Уместно отметить, что в формуле (54) $U(c+0)-U(c-0)=\tilde\beta\left(\chi(c+0)-\chi(c-0)\right)$, так как $U(\gamma)=\nu(\gamma)+\tilde\beta\chi(\gamma)$, $\nu(c\pm0)=0$.

При $\beta=1$ имеем $\tilde\beta=\beta+\delta>1$ и представления (52), (53) сохраняют силу вместе с соотношениями (35). Внося очевидные изменения в полученные выше формулы для $J_4(\gamma_0)$, придём к представлению

$$\begin{aligned}&I(\gamma_0)=J_1(c)+J_2(c)+[\Phi(c+0)-\Phi(c-0)]\ln\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)+N-\\&-\frac{U(c+0)-U(c-0)}{\tilde\beta(\tilde\beta-1)}\cdot\frac{1}{\left(-\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}}+\\&+o\left(1/\left(-\ln\sin^2\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right)+O\left(1/\left(-\ln\sin^2\tfrac{\gamma_0-c}{2}\right)\right),\ \gamma_0\to c,\end{aligned}\tag{55}$$

где $N=[\Phi(c-0)-\Phi(c+0)]\ln\left(-\ln\sin^2 e^{-2}\right)$.

4. Заключение

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Если для плотности интеграла* (1) *имеет место формула* (5), *в которой* $\chi(\gamma)$ *– функция, имеющая производную вида* (4), *то для интеграла* (1) *справедливо представление* (54) *при* $\beta>1$ *и представление* (55) *при* $\beta=1$.

Замечание 1. *Если для функции* $\nu(\gamma)$ *формулы* (4) *справедливо представление*

$$\nu(\gamma)=\frac{\nu_1(\gamma)}{\left(\mathrm{ls}\,\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\varkappa}},\ \varkappa=const>0,\ \gamma\in[\tilde c^-,\tilde c^+],$$

где $\nu_1(\gamma)$ *– функция, непрерывная в каждом из интервалов* $[\tilde c^-,c]$, $[c,\tilde c^+]$ *и* $\nu_1(c)=0$, *то утверждение теоремы можно уточнить, заменяя слагаемое* $o\left(1/\left(\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1}\right)$ *на* $O\left(1/\left(\mathrm{ls}\,\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^{\tilde\beta-1+\varkappa}\right)$.

В самом деле, в этом случае в силу (4) будем иметь $\chi'(\gamma)=\nu_1(\gamma)/\left(\left(\mathrm{ls}\,\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\varkappa+1}\mathrm{tg}\,\frac{\gamma-c}{2}\right)$. Применяя теорему о среднем значении, для $\gamma>c$ получим

$$\chi(\gamma)-\chi(c+0)=\int\limits_c^{\gamma}\chi'(\gamma)\,d\gamma=\frac{1}{\varkappa}\frac{\nu_1(\eta)}{\left(\mathrm{ls}\,\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\varkappa}},\ \eta\in[c,\gamma],$$

при этом функцию $U(\gamma)=\nu(\gamma)+\tilde{\beta}\chi(\gamma)$ формулы (38) для $\gamma>c$ представим так
$$U(\gamma)=U(c+0)+\frac{\nu_1(\gamma)+\frac{\tilde{\beta}}{\varkappa}\nu_1(\eta)}{\left(\operatorname{ls}\frac{\gamma-c}{2}\right)^{\varkappa}}.$$
Отсюда, обозначая $M_1=\max\limits_{c\leqslant\gamma\leqslant\tilde{c}^+}|\nu_1(\gamma)|$, будем иметь
$$|U(\gamma)-U(c+0)|\leqslant M_1(1+\tfrac{\tilde{\beta}}{\varkappa})/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma-c}{2}\right)^{\varkappa},$$
и для $\xi\in(c,\gamma)$ получим
$$|U(\xi)-U(c+0)|\leqslant M_1(1+\tfrac{\tilde{\beta}}{\varkappa})/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\xi-c}{2}\right)^{\varkappa}\leqslant M_1(1+\tfrac{\tilde{\beta}}{\varkappa})/\left(\operatorname{ls}\tfrac{\gamma-c}{2}\right)^{\varkappa}.$$

К аналогичному неравенству приходим и в случае $\gamma<c$, $\gamma\leqslant\xi\leqslant c$.

Эти неравенства дают обоснование вышеуказанной замены в формулах для $L_j(\gamma_0)$, $j=2,3,4,6$ и в представлениях (52), (54).

Результаты данной статьи определяют поведение интеграла (1) вблизи точки слабой непрерывности его плотности. Они по назначению аналогичны известным результатам Н.И. Мусхелишвили, относящимся к поведению интеграла типа Коши (и сингулярного интеграла) вблизи точки разрыва плотности степенного порядка [3] (с. 73-96), и могут быть использованы при исследовании свойств решений различных краевых задач для аналитических функций.

Достаточно слабые ограничения, наложенные на плотность интеграла (1) в данной статье, делают возможным применение её результатов, в частности, для исследования поведения конформно отображающей функции вблизи угловой точки границы области, соответствующей канонической области с гладкой границей.

Интерес читателя могут вызвать также статьи [5], [6], упомянутые выше [1], [2], объединенные вместе с настоящей статьей общей тематикой исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салимов Р.Б. *К поведению сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи точки слабой непрерывности плотности* // Изв. вузов. Матем. 2013. № 6. С. 37–44.
2. Салимов Р.Б., Шмагин Ю.А. *Об исследовании поведения сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи точки слабой непрерывности плотности* // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. 2013. Т. 46. С. 399–402.
3. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука. 1968.
4. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* М.: Наука. Т. 2. 1970.
5. Салимов Р.Б. *О поведении сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи точки слабой непрерывности плотности* // Изв. вузов. Матем. 2012. № 6. С. 61–66.
6. Салимов Р.Б. *Новое асимптотическое представление сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи точки слабой непрерывности плотности* // Изв. вузов. Матем. 2016. № 4. С. 73–78.

Расих Бахтигареевич Салимов,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: `salimov.rsb@gmail.com`