УДК 517.957

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ГРАНИЦЕ

Е.И. ГАЛАХОВ, О.А. САЛИЕВА

Аннотация. Рассматривается проблема отсутствия положительных решений для некоторых нелинейных эллиптических неравенств в ограниченной области. При этом главные части исследуемых неравенств представляют собой операторы $p(x)$-Лапласа с переменными показателями степени. Младшие члены рассматриваемых неравенств могут зависеть как от значений искомой функции, так и от ее градиента. Предполагается, что коэффициенты младших членов обладают сингулярностями на границе. Насколько известно авторам, ранее условия отсутствия решений для неравенств с переменными показателями степени не рассматривались.

Получены достаточные условия отсутствия положительных решений в терминах показателя степени $p(x)$, порядка сингулярности и других параметров задачи. Для доказательства полученных условий используется авторская модификация метода нелинейной емкости, предложенного С.И. Похожаевым. Метод основан на специальном выборе пробных функций в слабой постановке задачи и на алгебраических преобразованиях полученных выражений. Это позволяет получить асимптотически оптимальные априорные оценки решений, приводящие к противоречию при определенном выборе параметров, из чего и делается вывод об отсутствии решений в этой ситуации. Приведено обобщение полученных результатов на случай нелинейных систем с аналогичными условиями на операторы и коэффициенты.

Ключевые слова: эллиптические неравенства, переменные показатели степени, отсутствие решений, сингулярные коэффициенты.

Mathematics Subject Classification: 35J60, 35K55, 35R55

1. Введение

Проблема достаточных условий отсутствия решений нелинейных эллиптических уравнений, неравенств и их систем рассматривалась многими авторами.

Для оператора Лапласа с точечной сингулярностью внутри области первые результаты в этой области были получены Х. Брезисом и Х. Кабре [1] с помощью принципа сравнения.

Для операторов высоких порядков, не удовлетворяющих принципу сравнения, С.И. Похожаевым [9] был предложен метод нелинейной емкости. Позднее он был развит в совместных работах с Э. Митидиери и другими авторами (см. монографию [8] и ссылки в ней). Этот метод позволил получить ряд новых точных достаточных условий неразрешимости нелинейных неравенств в частных производных в различных функциональных классах. Метод основан на получении асимптотически оптимальных априорных оценок

E.I. Galakhov, O.A. Salieva, Unsolvability conditions for some inequalities and systems with functional parameters and singular coefficients on boundary.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Соглашение 05.Y09.21.0013 от 19 мая 2017).

Поступила 28 декабря 2016 г.

путем алгебраического анализа интегральной формы рассматриваемого неравенства при специальном выборе пробных функций. Приложения этого метода к различным типам эллиптических неравенств и систем можно найти, например, в [2, 3, 4, 7].

В настоящей работе используется модификация метода нелинейной емкости для получения достаточных условий отсутствия решений для некоторых нелинейных эллиптических неравенств в ограниченной области с переменными показателями степени и коэффициентами, обладающими сингулярностью на границе. Насколько нам известно, ранее условия отсутствия решений для неравенств с переменными показателями степени не рассматривались.

Для доказательства результатов об отсутствии решений методом нелинейной емкости строятся пробные функции с различной геометрической структурой, учитывающей специфический характер рассматриваемой задачи. Наши первые результаты в этом направлении были опубликованы в [5, 6].

Оставшаяся часть статьи состоит из двух параграфов. В §2 мы получаем результаты об отсутствии решений для скалярных нелинейных эллиптических неравенств, а в §3 – для систем таких неравенств.

Замечание об обозначениях. Здесь и далее буква c обозначает различные положительные константы, которые могут зависеть от параметров рассматриваемых задач.

2. Скалярные неравенства

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p(x)-2}Du) \geq \rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)}|Du|^{s(x)}, & x \in \Omega, \\ u(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω – ограниченная область с гладкой границей, $p(x), q(x), s(x) \in C(\Omega)$ – функции с положительной точной нижней гранью, $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решения задачи (1) будут пониматься в слабом смысле (распределений) в соответствии со следующим определением.

Определение 2.1. *Неотрицательная функция $u \in W^{1,p(x)}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется слабым решением (в смысле распределений) задачи (1), если $\rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)}|Du|^{s(x)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и для любой неотрицательной пробной функции $\psi \in C^1_0(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |Du|^{p(x)-2}(Du, D\psi)\,dx \geq \int\limits_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)}|Du|^{s(x)}\psi\,dx. \tag{2}$$

Замечание 2.1. *Аналогично* [8] *можно показать, что если такое решение существует и строго положительно в Ω, то (2) выполняется и для пробных функций вида $\psi = u^{\gamma}\varphi$ с $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C^1_0(\Omega)$. Если u обращается в ноль где-либо в Ω и $\gamma < 0$, можно использовать пробные функции $\psi = (u+\delta)^{\gamma}\varphi$ и устремить $\delta \to 0_+$, что приводит к таким же результатам, как и в предыдущем случае. Поэтому далее мы будем предполагать, что $u > 0$, если оно существует.*

Введем обозначение

$$\Omega_{k\eta} = \{x \in \Omega :\ \rho(x) \geq k\eta\} \quad (\eta > 0, k = 1, 2).$$

Предположим, что

$$\inf_{x\in\Omega} p(x) > 1,$$
$$\inf_{x\in\Omega} (q(x) - p(x)) > 1.$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
b_\gamma(x) &= \frac{p(x)(q(x)+\gamma)-s(x)(\gamma-1)}{q(x)+s(x)-p(x)+1},\\
c_\gamma(x) &= \frac{p(x)+\gamma-1}{q(x)+s(x)-p(x)+1},\\
D(\gamma,\eta) &= \int\limits_{\Omega_\eta\setminus\Omega_{2\eta}} \eta^{b_\gamma(x)}\rho^{-\alpha c_\gamma(x)}\,dx.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Тогда имеет место

Теорема 2.1. *Пусть существует $\gamma_0 < 0$ такое, что для $\gamma \in (\gamma_0, 0)$*

$$
\lim_{\eta\to 0_+} D(\gamma,\eta) = 0. \tag{4}
$$

Тогда неравенство (1) *не имеет нетривиальных решений.*

Пример 2.1. *Пусть $\Omega = B_1(0)$, $p(x) \equiv p = \mathrm{const}$, $q(x) \equiv q = \mathrm{const}$, $s(x) \equiv 0$. Тогда $\rho(x) = 1 - |x|$, и неравенство (1) принимает вид*

$$
-\Delta_p u \geq u^q(1-|x|)^{-\alpha} \quad (x \in B_1(0)), \tag{5}
$$

а условие (4) выполняется в точности при $\alpha \geq q+1$. Легко видеть, что при нарушении этого условия (т.е. при $\alpha < q+1$) неравенство (5) имеет решение вида $C(1-|x|)^{\frac{\alpha-p}{q-p+1}}$ с соответствующей константой $C = C(p,q,\alpha) > 0$, т.е. полученное условие отсутствия решений неравенства (5) является оптимальным.

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальное решение u неравенства (1). Введем семейство функций $\varphi_\eta \in C_0^1(\Omega;[0,1])$ вида $\varphi_\eta(x) = \xi_\eta^\lambda(x)$ с

$$
\xi_\eta(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega_{2\eta}),\\ 0 & (x \notin \Omega_\eta), \end{cases} \tag{6}
$$

$$
|D\xi_\eta(x)| \leq c\eta^{-1} \quad (x \in \Omega) \tag{7}
$$

и достаточно большим $\lambda > 0$. Тогда получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)+\gamma}|Du|^{s(x)}\varphi_\eta\,dx \leq \int\limits_\Omega (|Du|^{p(x)-2}Du, D(u^\gamma\varphi_\eta))\,dx =\\
&= \gamma\int\limits_\Omega u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx + \int\limits_\Omega u^\gamma|Du|^{p(x)-2}(Du, D\varphi_\eta)\,dx \leq\\
&\leq \gamma\int\limits_\Omega u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx + \int\limits_\Omega u^\gamma|Du|^{p(x)-1}|D\varphi_\eta|\,dx,
\end{aligned}
$$

откуда следует

$$
\int\limits_\Omega \rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)+\gamma}|Du|^{s(x)}\varphi_\eta\,dx + |\gamma|\int\limits_\Omega u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx \leq \int\limits_\Omega u^\gamma|Du|^{p(x)-1}|D\varphi_\eta|\,dx.
$$

Представляя подынтегральную функцию в правой части этого неравенства в виде

$$
2^{-\frac{y(x)}{s(x)}}u^{\frac{(q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)}}|Du|^{y(x)}\rho^{-\frac{\alpha y(x)}{s(x)}}\varphi_\eta^{\frac{y(x)}{s(x)}}\cdot 2^{\frac{y(x)}{s(x)}}u^{\frac{\gamma s(x)-(q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)}}|Du|^{p(x)-1-y(x)}|D\varphi_\eta|\cdot\rho^{\frac{\alpha y(x)}{s(x)}}\varphi_\eta^{-\frac{y(x)}{s(x)}},
$$

где $y(x)$ будет выбрано ниже, и применяя параметрическое неравенство Юнга с показателем $s(x)/y(x)$ (далее будет показано, что $s(x)/y(x) > 1$ при соответствующем выборе

$y(x))$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)+\gamma}|Du|^{s(x)}\varphi_\eta\,dx+|\gamma|\int\limits_{\Omega}u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx\le$$
$$\le c\int\limits_{\Omega}u^{\frac{\gamma s(x)-(q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)-y(x)}}|Du|^{\frac{(p(x)-1-y(x))s(x)}{s(x)-y(x)}}|D\varphi_\eta|^{\frac{s(x)}{s(x)-y(x)}}\cdot\rho^{\frac{\alpha y(x)}{s(x)-y(x)}}\varphi_\eta^{-\frac{y(x)}{s(x)-y(x)}}\,dx.$$

Применим неравенство Юнга с показателем $z(x)$ еще раз:

$$c\int\limits_{\Omega}u^{\frac{\gamma s(x)-(q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)-y(x)}}|Du|^{\frac{(p(x)-1-y(x))s(x)}{s(x)-y(x)}}|D\varphi_\eta|^{\frac{s(x)}{s(x)-y(x)}}\cdot\rho^{\frac{\alpha y(x)}{s(x)-y(x)}}\varphi_\eta^{-\frac{y(x)}{s(x)-y(x)}}\,dx\le$$
$$\le\frac{|\gamma|}{2}\int\limits_{\Omega}u^{\frac{(\gamma s(x)-(q(x)+\gamma)y(x))z(x)}{s(x)-y(x)}}|Du|^{\frac{(p(x)-1-y(x))s(x)z(x)}{s(x)-y(x)}}\varphi_\eta\,dx+ \tag{8}$$
$$+c\int\limits_{\Omega}|D\varphi_\eta|^{\frac{s(x)z'(x)}{s(x)-y(x)}}\cdot\rho^{\frac{\alpha y(x)z'(x)}{s(x)-y(x)}}\varphi_\eta^{1-\frac{s(x)z'(x)}{s(x)-y(x)}}\,dx,$$

где $\frac{1}{z(x)}+\frac{1}{z'(x)}=1$.

Выберем $y(x)$ и $z(x)$ так, что

$$\begin{cases}(p(x)-1-y(x))s(x)z(x)=p(x)(s(x)-y(x)),\\[2mm] \dfrac{\gamma s(x)-(q(x)+\gamma)y(x)}{s(x)-y(x)}\cdot z(x)=\gamma-1,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases}y(x)=y_\gamma(x)=\dfrac{s(x)(p(x)+\gamma-1)}{p(x)(q(x)+\gamma)-s(x)(\gamma-1)},\\[3mm] z(x)=z_\gamma(x)=\dfrac{p(x)[p(x)(q(x)+\gamma)-s(x)(\gamma-1)-(p(x)+\gamma-1)]}{(p(x)-1)(p(x)(q(x)+\gamma)-s(x)(\gamma-1))-s(x)(p(x)+\gamma-1)}.\end{cases}$$

Отметим, что при $\gamma=0$ в силу наших предположений об $q(x)$, $p(x)$ и $s(x)$ для любого $x\in\Omega$ имеем

$$\frac{s(x)}{y_0(x)}=\frac{p(x)q(x)+s(x)}{p(x)-1}>\frac{p(x)q(x)+s(x)}{q(x)}=p(x)+\frac{s(x)}{q(x)}>p(x)>1$$

и

$$z_0(x)=\frac{p(x)(q(x)-1)+s(x)+1}{p(x)(q(x)-1)}=1+\frac{s(x)+1}{p(x)(q(x)-1)}>1.$$

Отсюда по непрерывности при достаточно малых $|\gamma|$ будем иметь $\frac{s(x)}{y_\gamma(x)}>1$ и $z_\gamma(x)>1$ для всех $x\in\Omega$, что и требуется для применения неравенства Юнга.

Для таких $y(x)$ и $z(x)$, при φ_η со свойствами (6), (7) и достаточно большим $\lambda>0$ из (8) следует

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho^{-\alpha}(x)u^{q(x)+\gamma}|Du|^{s(x)}\varphi_\eta\,dx+\frac{|\gamma|}{2}\int\limits_{\Omega}u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx\le cD(\gamma,\eta).$$

Устремляя $\eta\to+0$, в силу (4) для $\gamma\in(\gamma_0,0)$ получим противоречие с предполагаемой нетривиальностью u, что доказывает теорему. □

3. Системы неравенств

Далее рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p(x)-2}Du) \geq \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}, & x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(|Dv|^{q(x)-2}Dv) \geq \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}, & x \in \Omega, \\ u,\, v \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

где Ω – ограниченная область с гладкой границей.

Будем предполагать, что p, q, p_1, q_1, p_2, $q_2 \in C(\Omega)$ – функции с положительной точной нижней гранью, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Решения системы (9) будут пониматься в слабом смысле (распределений) в соответствии со следующим определением.

Определение 3.1. *Пара неотрицательных функций $(u, v) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется слабым решением (в смысле распределений) системы (9), если $\rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Dv|^{p_2(x)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и для любых неотрицательных пробных функций $\psi_1, \psi_2(x) \in C^1_0(\Omega)$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} |Du|^{p(x)-2}(Du, D\psi_1)\, dx &\geq \int\limits_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}\psi_1\, dx, \\ \int\limits_{\Omega} |Dv|^{q(x)-2}(Dv, D\psi_2(x))\, dx &\geq \int\limits_{\Omega} \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}\psi_2(x)\, dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Замечание 3.1. *Аналогично замечанию 2.1, мы можем предполагать, что $u > 0$ и $v > 0$, если они существуют, и использовать пробные функции вида $\psi_1 = u^{\gamma}\varphi$ и $\psi_2(x) = v^{\gamma}\varphi$ с $\varphi \in C^1_0(\Omega)$.*

Обозначим

$$c_{1,\gamma}(x) = -\frac{q(x)+\gamma-1}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}, \quad c_{2,\gamma}(x) = -\frac{(p(x)-1)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)},$$

$$c_{3,\gamma}(x) = -\frac{q(x)+\gamma-1}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}, \quad c_{4,\gamma}(x) = -\frac{(q(x)-1)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)},$$

$$d_{1,\gamma}(x) = \frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}, \quad d_{2,\gamma}(x) = \frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)},$$

$$d_{3,\gamma}(x) = \frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}, \quad d_{4,\gamma}(x) = \frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)},$$

$$D_{j,\gamma}(\eta) = \int\limits_{\Omega_\eta \setminus \Omega_{2\eta}} b^{c_{j,\gamma}(x)}(x) \cdot \eta^{d_{j,\gamma}(x)}\, dx, \ j = 1, 2,$$

$$D_{j,\gamma}(\eta) = \int\limits_{\Omega_\eta \setminus \Omega_{2\eta}} a^{c_{j,\gamma}(x)}(x) \cdot \eta^{d_{j,\gamma}(x)}\, dx, \ j = 3, 4.$$

Тогда справедлива

Теорема 3.1. *Пусть $\inf\limits_{x\in\Omega} p(x) > 1$, $\inf\limits_{x\in\Omega} q(x) > 1$, $\inf\limits_{x\in\Omega}(p_1(x) + p_2(x) - p(x)) > 1$, $\inf\limits_{x\in\Omega}(q_1(x) + q_2(x) - q(x)) > 1$ и существует $\gamma_0 < 0$ такое, что для $\gamma \in (\gamma_0, 0)$*

$$\lim_{\eta\to 0_+} D_{j,\gamma}(\eta) = 0, \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{11}$$

Тогда система (9) не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. Пусть (u, v) – нетривиальное решение системы (9), а $\varphi_\eta \in C_0^\infty(\Omega; [0,1])$ – пробные функции того же вида, что и в доказательстве теоремы 2.1, удовлетворяющие (6) и (7).

Используя пробную функцию $\psi_1(x) = u^\gamma(x)\varphi_\eta(x)$ в первом неравенстве (10) и $\psi_2(x) = v^\gamma\varphi_\eta$ во втором, где число γ таково, что $\max(\inf\limits_{x\in\Omega}(1-p(x)), \inf\limits_{x\in\Omega}(1-q(x)), \gamma_0) < \gamma < 0$, получим

$$\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}u^\gamma\varphi_\eta\,dx \le \gamma\int u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx + \int u^\gamma|Du|^{p(x)-1}|D\varphi_\eta|\,dx, \tag{12}$$

$$\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}v^\gamma\varphi_\eta\,dx \le \gamma\int v^{\gamma-1}|Dv|^{q(x)}\varphi_\eta\,dx + \int v^\gamma|Dv|^{q(x)-1}|D\varphi_\eta|\,dx. \tag{13}$$

Воспользуемся представлением

$$u^\gamma|Du|^{p(x)-1} = u^{a_1(x)}|Du|^{b_1(x)}\varphi_\eta^{\frac{1}{c_1(x)}}u^{\gamma-a_1(x)}|Du|^{p(x)-1-b_1(x)}\varphi_\eta^{-\frac{1}{c_1(x)}}, \tag{14}$$

$$v^\gamma|Dv|^{q(x)-1} = v^{a_2(x)}|Du|^{b_2(x)}\varphi_\eta^{\frac{1}{c_2(x)}}v^{\gamma-a_2(x)}|Dv|^{q(x)-1-b_2(x)}\varphi_\eta^{-\frac{1}{c_2(x)}}, \tag{15}$$

чтобы применить к правым частям (12) и (13) параметрическое неравенство Юнга с показателями, обозначаемыми $c_1(x)$ и $c_2(x)$ соответственно. Выберем параметры так, что

$$\begin{cases} a_1(x)c_1(x) = \gamma - 1, \\ b_1(x)c_1(x) = p(x), \\ \dfrac{\gamma - a_1(x)}{p(x) - 1 - b_1(x)} = \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a_2(x)c_2(x) = \gamma - 1, \\ b_2(x)c_2(x) = q(x), \\ \dfrac{\gamma - a_2(x)}{q(x) - 1 - b_2(x)} = \dfrac{q_1(x)}{q_2(x)}. \end{cases} \tag{17}$$

Замечание 3.2. *Смысл этого выбора заключается в подготовке к последующему применению неравенства Гельдера, чтобы получить в правых частях неравенств при соответствующем выборе параметров* $\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}\varphi_\eta\,dx$ *и* $\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}\varphi_\eta\,dx$.

Решая системы уравнений (16) и (17), получим

$$\begin{cases} a_1(x) = \dfrac{(\gamma-1)((p(x)-1)p_1(x) - \gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}, \\[2ex] b_1(x) = \dfrac{p(x)((p(x)-1)p_1(x) - \gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}, \\[2ex] c_1(x) = \dfrac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}{(p(x)-1)p_1(x) - \gamma p_2(x)}, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_2(x) = \dfrac{(\gamma-1)((q(x)-1)q_1(x) - \gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1-\gamma)}, \\[2ex] b_2(x) = \dfrac{q(x)((q(x)-1)q_1(x) - \gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1-\gamma)}, \\[2ex] c_2(x) = \dfrac{q(x)q_1(x) + q_2(x)(1-\gamma)}{(q(x)-1)q_1(x) - \gamma q_2(x)}. \end{cases} \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (14) и (15), будем иметь представления

$$\begin{aligned} u^{\gamma}|Du|^{p(x)-1} &= u^{\frac{(\gamma-1)((p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}|Du|^{\frac{p(x)((p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x))}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}\varphi_\eta^{\frac{(p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}\cdot \\ &\cdot u^{\frac{p_1(x)(p(x)+\gamma-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}|Du|^{\frac{p_2(x)(p(x)+\gamma-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}\varphi_\eta^{-\frac{(p(x)-1)p_1(x)-\gamma p_2(x)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{\gamma}|Dv|^{q(x)-1} &= v^{\frac{(\gamma-1)((q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}|Dv|^{\frac{q(x)((q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x))}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}\varphi_\eta^{\frac{(q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}\cdot \\ &\cdot v^{\frac{q_1(x)(q(x)+\gamma-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}|Dv|^{\frac{q_2(x)(q(x)+\gamma-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}\varphi_\eta^{-\frac{(q(x)-1)q_1(x)-\gamma q_2(x)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\gamma = 0$

$$c_1(x) = \frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)}{(q(x)-1)q_1(x)} > \frac{(q(x)-1)q_1(x)+q_2(x)}{(q(x)-1)q_1(x)} = 1 + \frac{q_2(x)}{(q(x)-1)q_1(x)} \geq c_{1,0} > 1$$

и аналогично $c_2(x) \geq c_{2,0} > 1$. Поэтому те же неравенства $c_1(x) > 1$ и $c_2(x) > 1$ выполняются в силу непрерывности при достаточно малых $|\gamma|$. Таким образом, применяя к правым частям (12) и (13) параметрическое неравенство Юнга с показателями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ из (18) и (19) соответственно, приходим к

$$\begin{aligned} &\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}u^{\gamma}\varphi_\eta\,dx + \frac{|\gamma|}{2}\int u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx \leq \\ &\leq c_\gamma \int u^{\frac{p_1(x)(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)}}|Du|^{\frac{p_2(x)(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)}}\frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)}-1}}\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}v^{\gamma}\varphi_\eta\,dx + \frac{|\gamma|}{2}\int v^{\gamma-1}|Dv|^{q(x)}\varphi_\eta\,dx \leq \\ &\leq d_\gamma \int v^{\frac{q_1(x)(q+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)}}|Dv|^{\frac{q_2(x)(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)}}\frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)}-1}}\,dx, \end{aligned}$$

где константы c_γ и d_γ зависят только от $p(x)$, $q(x)$, $p_1(x)$, $q_1(x)$, $p_2(x)$, $q_2(x)$ и γ. Применяя неравенство Юнга с показателями

$$d_1(x) = \frac{p_1(x)+p_2(x)}{p(x)+\gamma-1},\ d_1'(x) = \frac{p_1(x)+p_2(x)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}$$

и

$$d_2(x) = \frac{q_1(x)+q_2(x)}{q(x)+\gamma-1},\ d_2'(x) = \frac{q_1(x)+q_2(x)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}$$

соответственно (отметим, что при наших предположениях для $\gamma = 0$ имеем

$$d_1(x) = \frac{p_1(x)+p_2(x)}{p(x)-1} \geq d_{1,0} > 1,\ d_2(x) = \frac{q_1(x)+q_2(x)}{q(x)-1} \geq d_{2,0} > 1$$

и поэтому в силу непрерывности $d_1(x) > 1$ и $d_2(x) > 1$ для любых достаточно малых $|\gamma|$), получим

$$\begin{aligned} &\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}u^{\gamma}\varphi_\eta\,dx + \frac{|\gamma|}{2}\int u^{\gamma-1}|Du|^{p(x)}\varphi_\eta\,dx \leq \\ &\leq e_\gamma \int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}\varphi_\eta\,dx + f_\gamma \int \rho^{\frac{\beta(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}(x)\frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}-1}}\,dx, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}v^{\gamma}\varphi_\eta\,dx + \frac{|\gamma|}{2}\int v^{\gamma-1}|Dv|^{q(x)}\varphi_\eta\,dx \le$$
$$\le g_\gamma \int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}\varphi_\eta\,dx + h_\gamma \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}(x)\frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}-1}}\,dx. \tag{21}$$

Далее, используя пробные функции $\psi_1(x) = \psi_2(x) = \varphi_\eta$ в (10), будем иметь

$$\int \rho^{-\alpha}(x)v^{q_1(x)}|Dv|^{q_2(x)}\varphi_\eta\,dx \le \int |Du|^{p(x)-1}|D\varphi_\eta|\,dx\,, \tag{22}$$

$$\int \rho^{-\beta}(x)u^{p_1(x)}|Du|^{p_2(x)}\varphi_\eta\,dx \le \int |Dv|^{q(x)-1}|D\varphi_\eta|\,dx\,. \tag{23}$$

Воспользуемся представлением

$$|Du|^{p(x)-1} = u^{a_3(x)}|Du|^{b_3(x)}\varphi_\eta^{\frac{1}{c_3(x)}}u^{-a_3(x)}|Du|^{p(x)-1-b_3(x)}(\rho^{-\beta}\varphi_\eta)^{\frac{1}{d_3(x)}}\rho^{\frac{\beta}{d_3(x)}}\varphi_\eta^{-\frac{1}{c_3(x)}-\frac{1}{d_3(x)}}, \tag{24}$$

$$|Dv|^{q(x)-1} = v^{a_4(x)}|Dv|^{b_4(x)}\varphi_\eta^{\frac{1}{c_4(x)}}v^{-a_4(x)}|Dv|^{q(x)-1-b_4(x)}(\rho^{-\alpha}\varphi_\eta)^{\frac{1}{d_4(x)}}\rho^{\frac{\alpha}{d_4(x)}}\varphi_\eta^{-\frac{1}{c_4(x)}-\frac{1}{d_4(x)}}, \tag{25}$$

чтобы применить к правым частям (22) и (23) тройное неравенство Юнга с показателями, обозначаемыми $c_3(x)$, $d_3(x)$, $e_3(x)$ и $c_4(x)$, $d_4(x)$, $e_4(x)$ соответственно. Здесь мы выбираем параметры так, что

$$\begin{cases} a_3(x)c_3(x) = \gamma - 1, \\ b_3(x)c_3(x) = p(x), \\ a_3(x)d_3(x) = -p_1(x), \\ (p(x) - 1 - b_3(x))d_3(x) = p_2(x), \\ \\ \dfrac{1}{c_3(x)} + \dfrac{1}{d_3(x)} + \dfrac{1}{e_3(x)} = 1, \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} a_4(x)c_4(x) = \gamma - 1, \\ b_4(x)c_4(x) = q(x), \\ a_4(x)d_4(x) = -q_1(x), \\ (q(x) - 1 - b_4(x))d_4(x) = q_2(x), \\ \\ \dfrac{1}{c_4(x)} + \dfrac{1}{d_4(x)} + \dfrac{1}{e_4(x)} = 1. \end{cases} \tag{27}$$

Решая системы уравнений (26) и (27), получим

$$\begin{cases} a_3(x) = \dfrac{(\gamma-1)p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}, \\ \\ b_3(x) = \dfrac{p(x)p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}, \\ \\ c_3(x) = \dfrac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)(p(x)-1)}, \\ \\ d_3(x) = \dfrac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}{(p(x)-1)(1-\gamma)}, \\ \\ e_3(x) = \dfrac{p(x)p_1(x) + p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x) + (p_2(x) - p + 1)(1-\gamma)}, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} a_4(x) = \dfrac{(\gamma-1)q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}, \\[2ex] b_4(x) = \dfrac{q(x)q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}, \\[2ex] c_4(x) = \dfrac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)(q(x)-1)}, \\[2ex] d_4(x) = \dfrac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{(q(x)-1)(1-\gamma)}, \\[2ex] e_4(x) = \dfrac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}. \end{cases} \tag{29}$$

Отметим, что при $\gamma = 0$

$$c_3(x) = \frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)}{p_1(x)(p(x)-1)} = 1 + \frac{p_1(x)+p_2(x)}{p_1(x)(p(x)-1)} \geq c_{3,0} > 1,$$

$$d_3(x) = \frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)}{p(x)-1} = p_1(x) + \frac{p_1(x)+p_2(x)}{p(x)-1} > p_1(x) \geq d_{3,0} > 1,$$

$$e_3(x) = \frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)+1} > \frac{p_1(x)+p_2(x)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)+1} \geq e_{3,0} > 1$$

и аналогичные оценки имеют место для $c_4(x), d_4(x), e_4(x)$. Поэтому из непрерывности следует, что для достаточно малых $|\gamma|$ все эти показатели также превосходят 1, аналогично предыдущим рассуждениям.

Подставляя (28) и (29) в (24) и (25), получим представления

$$\begin{aligned} |Du|^{p(x)-1} \quad &= u^{\frac{(\gamma-1)p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} |Du|^{\frac{p(x)p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{p_1(x)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \cdot \\ &\cdot u^{\frac{p_1(x)(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} |Du|^{\frac{p_2(x)(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \left(\rho^{-\beta}\varphi_\eta\right)^{\frac{(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \cdot \\ &\cdot \rho^{\frac{\beta(p(x)-1)(1-\gamma)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{(\gamma-p_1(x)-1)(p(x)-1)}{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Dv|^{q(x)-1} \quad &= v^{\frac{(\gamma-1)q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} |Dv|^{\frac{q(x)q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{q_1(x)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \cdot \\ &\cdot v^{\frac{q_1(x)(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} |Dv|^{\frac{q_2(x)(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \left(\rho^{-\alpha}\varphi_\eta\right)^{\frac{(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \cdot \\ &\cdot \rho^{\frac{\alpha(q(x)-1)(1-\gamma)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}} \varphi_\eta^{\frac{(\gamma-q_1(x)-1)(q(x)-1)}{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}}, \end{aligned}$$

и, применяя к правым частям (22) и (23) тройное неравенство Юнга с показателями $c_3(x)$, $d_3(x)$, $e_3(x)$, $c_4(x)$, $d_4(x)$, $e_4(x)$ из (28), (29) соответственно, придем к

$$\begin{aligned} &\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta \, dx \leq \\ &\leq C_1 \int u^{\gamma-1} |Du|^{p(x)} \varphi_\eta \, dx + C_2 \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta \, dx + \\ &+ C_3 \int \rho^{\frac{\beta(p(x)-1)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p+1)(1-\gamma)}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p+1)(1-\gamma)}-1}} \, dx \, , \end{aligned} \tag{30}$$

$$
\begin{gathered}
\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta \, dx \le \\
\le C_4 \int v^{\gamma-1} |Dv|^{q(x)} \varphi_\eta \, dx + C_5 \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta \, dx + \\
+ C_6 \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)-1)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}} \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q+1)(1-\gamma)}-1}} \, dx .
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Используя (20) и (21), из предыдущих оценок получим

$$
\begin{gathered}
\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta \, dx \le C_7 \int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta \, dx + \\
+ C_8 \int \frac{\rho^{\frac{\beta(p(x)+\gamma-1)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}(x) |D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+p_2(x)-p(x)-\gamma+1}-1}} \, dx + \\
+ C_9 \int \rho^{\frac{\beta(p(x)-1)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{p(x)p_1(x)+p_2(x)(1-\gamma)}{p_1(x)+(p_2(x)-p(x)+1)(1-\gamma)}-1}} \, dx ,
\end{gathered}
\tag{32}
$$

$$
\begin{gathered}
\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta \, dx \le C_{10} \int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta \, dx + \\
+ C_{11} \int \frac{\rho^{\frac{\alpha(q(x)+\gamma-1)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}(x) |D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+q_2(x)-q(x)-\gamma+1}-1}} \, dx + \\
+ C_{12} \int \rho^{\frac{\alpha(q(x)-1)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)}}(x) \frac{|D\varphi_\eta|^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)}}}{\varphi_\eta^{\frac{q(x)q_1(x)+q_2(x)(1-\gamma)}{q_1(x)+(q_2(x)-q(x)+1)(1-\gamma)}-1}} \, dx ,
\end{gathered}
\tag{33}
$$

где константы зависят только от $p(x)$, $q(x)$, $p_1(x)$, $q_1(x)$, $p_2(x)$, $q_2(x)$, γ и от выбора параметров в неравенствах Юнга.

Поэтому в силу (6) и (7), подставляя (34) в (35) и наоборот, а затем, перенося все слагаемые вида $c\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta \, dx$ и $c\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta \, dx$ в левую часть, при $C_7 C_{10} < 1$ (что можно обеспечить за счет выбора параметров в неравенствах Юнга), имеем:

$$
\int \rho^{-\alpha}(x) v^{q_1(x)} |Dv|^{q_2(x)} \varphi_\eta \, dx \le c \sum_{j=1}^{4} D_{j,\gamma}(\eta),
\tag{34}
$$

$$
\int \rho^{-\beta}(x) u^{p_1(x)} |Du|^{p_2(x)} \varphi_\eta \, dx \le c \sum_{j=1}^{4} D_{j,\gamma}(\eta).
\tag{35}
$$

Переходя к пределу при $\eta \to 0_+$, в силу (11) придем к противоречию, что доказывает утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Brezis, X. Cabré *Some simple nonlinear PDE's without solutions.* Boll. Un. Mat. Ital. B: Artic. Ric. Mat. 1998. V. 1, Ser. 8. P. 223–262.
2. A. Farina, J. Serrin *Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations* // J. Diff. Eq. 2011. V. 250. P. 4367—4408.
3. A. Farina, J. Serrin *Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations II* // J. Diff. Eq. 2011. V. 250. P. 4409—4436.
4. R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli *Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms* // Commun. Contemp. Math. 2010. V. 12. P. 501-–535.
5. E. Galakhov, O. Salieva *On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets* // JMAA. 2013. V. 408. P. 102–113.
6. Галахов Е.И., Салиева О.А. *Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах* // Матем. заметки. 2015. Т. 98. С. 187–195.
7. X. Li, F. Li *Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity* // Nonl. Anal. TMA. 2012. V. 75. P. 2812–2822.
8. Митидиери Э., Похожаев С.И. *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных.* М.: Наука, 2001 (Труды МИАН им. В.А. Стеклова. Т. 234).
9. Похожаев С.И. *Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами* // Докл. РАН. 1997. Т. 357. С. 592—594.

Евгений Игоревич Галахов,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: galakhov@rambler.ru

Салиева Ольга Алексеевна,
Московский государственный технологический университет «Станкин»,
Вадковский переулок, д. 3а,
127055, Москва, Россия
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com