ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 22-35.

УДК 517.53

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ПАВЛОВА-КОРЕВАРА-ДИКСОНА С МАЖОРАНТОЙ ИЗ КЛАССА СХОДИМОСТИ

Р.А. ГАЙСИН

Посвящается столетию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Алексея Федоровича Леонтьева

Аннотация. Изучается интерполяционная задача в классе целых функций экспоненциального типа, определяемом некоторой мажорантой из класса сходимости (неквазианалитической мажорантой). В более узком классе, когда мажоранта обладала свойством вогнутости, аналогичная задача ранее рассматривалась Б. Берндсоном, но с узлами в точках некоторой подпоследовательности натуральных чисел. Им был получен критерий разрешимости данной интерполяционной задачи. При этом он впервые применил метод Хёрмандера решения $\overline{\partial}$-задачи. В работах А.И. Павлова, Я. Коревара и М. Диксона интерполяционные последовательности в смысле Б. Берндсона успешно применялись в ряде задач комплексного анализа. При этом была обнаружена некоторая связь с аппроксимативными свойствами систем степеней $\{z^{p_n}\}$ и с известными задачами Полиа и Макинтайра.

В статье установлен критерий интерполяционности в более общем смысле для произвольной последовательности действительных чисел. При доказательстве основной теоремы применяется модифицированный метод Б. Берндсона.

Ключевые слова: интерполяционная последовательность, целая функция, класс сходимости.

Mathematics Subject Classification: 30E05

1. Введение

Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$, таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \qquad \Omega = \left\{ \omega \in W : \frac{\omega(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \to \infty \right\}.$$

Множество W принято называть классом сходимости, а функции w из W — весами (неквазианалитическими весами).

R.A. Gaisin, Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation problem with majorant in convergence class.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-01-01661).

Поступила 14 сентября 2017 г.

Определение 1 ([1]). *Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{p_n\}$ называется интерполяционной в смысле Павлова-Коревара-Диксона, если найдется функция $\omega \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leqslant 1$, существует целая функция f, обладающая свойствами:*

$$1)\ f(p_n) = b_n \quad (n \geq 1), \qquad 2)\ M_f(r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant e^{\omega(r)}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Последовательность Λ будем называть *интерполяционной*, если найдется функция $w \in W$, зависящая только от этой последовательности, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leqslant 1$, существует целая функция f, обладающая свойствами 1) и 2), но с функцией w.

Условия, необходимые и достаточные для интерполяционности последовательности $\{p_n\}$ ($p_n \in \mathbb{N}$) в классе Ω были получены в работе [1]. Цель статьи — доказать критерий интерполяционности последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ в классе функций W.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$$

— считающая функция последовательности Λ, а

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_1 = 1$. Это несколько упростит выкладки в дальнейшем.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $\tau_n = \min\limits_{\substack{k\neq n\\ k\geq 1}} |\lambda_n - \lambda_k|$, $h_n = \min(\tau_n, 1)$,*

$$K_n = \left\{\xi : \frac{h_n}{4} \leqslant |\xi - \lambda_n| \leqslant \frac{h_n}{2}\right\} \quad (n \geq 1).$$

Тогда в кольцах K_n верны оценки:

$$1)\ \sup_{k\neq n} \left|\ln\left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n}\right|\right| \leqslant \ln 2; \qquad 2)\ \sup_{k} \left|\ln\left|\frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n}\right|\right| \leqslant \ln\frac{4}{3}.$$

Доказательство. Пусть $z \in K_n$. Имеем

$$\left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n}\right| = \left|1 + \frac{\lambda_n - z}{\lambda_k - \lambda_n}\right| \quad (k \neq n).$$

Так как $|\lambda_n - z| \leqslant \frac{h_n}{2}$ для $z \in K_n$, $|\lambda_k - \lambda_n| \geq h_n$ $(k \neq n)$, то

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n}\right| \leqslant \frac{3}{2}.$$

Значит,

$$-\ln 2 \leqslant \ln\left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n}\right| \leqslant \ln\frac{3}{2}$$

и

$$\sup_{k\neq n}\left|\ln\left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k-\lambda_n}\right|\right| \leqslant \ln 2.$$

Аналогично проверим 2). Имеем

$$\left|\frac{\lambda_k+z}{\lambda_k+\lambda_n}\right| = \left|1+\frac{z-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n}\right|.$$

Поскольку

$$\left|\frac{z-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n}\right| \leqslant \frac{h_n}{2(\lambda_k+\lambda_n)} \leqslant \frac{1}{4},$$

то

$$\frac{3}{4} \leqslant \left|\frac{\lambda_k+z}{\lambda_k+\lambda_n}\right| \leqslant \frac{5}{4}.$$

Значит,

$$\sup_{k}\left|\ln\left|\frac{\lambda_k+z}{\lambda_k+\lambda_n}\right|\right| \leqslant \ln\frac{4}{3}.$$

Лемма доказана. □

Имеет место

Лемма 2. *Для всех* z *из* K_n $(n \geq 1)$

$$\left|\ln\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|\right| \leqslant \ln 10 + |\ln h_n| + \ln\lambda_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\ln\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| = \ln\left|1+\frac{z}{\lambda_n}\right| + \ln\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n}\right|.$$

Так как $\operatorname{Re} z > 0$ для всех $z \in K_n$ $(n \geq 1)$, а $\lambda_1 = 1$, то

$$0 < \ln\left|1+\frac{z}{\lambda_n}\right| \leqslant \ln\left(1+\frac{\lambda_n+\frac{h_n}{2}}{\lambda_n}\right) \leqslant \ln\frac{5}{2}.$$

Далее,

$$\ln\frac{h_n}{4\lambda_n} \leqslant \ln\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n}\right| \leqslant \ln\frac{h_n}{2\lambda_n} < 0.$$

Следовательно,

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n}\right|\right| \leqslant \left|\ln\frac{h_n}{4\lambda_n}\right| \leqslant |\ln h_n| + \ln 4\lambda_n \quad (n \geq 1).$$

Таким образом, для всех $z \in K_n$ $(n \geq 1)$

$$\left|\ln\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|\right| \leqslant \ln 10 + |\ln h_n| + \ln\lambda_n.$$

Требуемая оценка получена. □

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty.$$

Тогда

$$q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

— целая функция экспоненциального типа.

Оценим функцию $\ln|q(z)|$ в кольцах K_n. Для любого фиксированного $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ln|q(z)| = &\ln\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| + \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\left|1-\frac{z}{\lambda_k}\right| + \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\left|1+\frac{z}{\lambda_k}\right| + \\ &+ \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|>\lambda_n} \ln\left|1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right| = \ln\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| + \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3 \end{aligned} \tag{1}$$

(в суммах Σ_i $(i=1,2,3)$ считаем, что $\lambda_k \neq \lambda_n$).

Оценим сумму Σ_1. Для $\lambda_k \neq \lambda_n$ имеем:

$$\begin{aligned} \ln\left|1-\frac{z}{\lambda_k}\right| &= \ln\left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k}\right| = \ln\frac{1}{\lambda_k} + \ln|\lambda_k - z| = \\ &= \ln\frac{1}{\lambda_k} + \ln\left|\frac{\lambda_k-z}{\lambda_k-\lambda_n}\right| + \ln|\lambda_k-\lambda_n|. \end{aligned} \tag{2}$$

Далее,

$$\sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\frac{1}{\lambda_k} = \int_0^{2\lambda_n} \ln\frac{1}{t}dn_1(t) \quad (k\neq n), \tag{3}$$

где $n_1(t)$ — считающая функция последовательности $\Lambda_1 = \Lambda\setminus\{\lambda_n\}$. Интегрируя по частям, из (3) получаем

$$\sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\frac{1}{\lambda_k} = N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n)\ln 2\lambda_n, \tag{4}$$

где

$$N_1(t) = \int_0^t \frac{n_1(x)}{x}dx.$$

Выясним теперь, чему равна сумма $\sum\limits_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln|\lambda_k-\lambda_n|$ $(k\neq n)$. Для этого заметим, что

$$\sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln|\lambda_k-\lambda_n| = \int_0^{\lambda_n} \ln t\, d\nu(\lambda_n;\ t) \quad (k\neq n), \tag{5}$$

где $\nu(\lambda_n;\ t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h-\lambda_n| \leqslant t\}$. Интегрируя по частям интеграл Стилтьеса (5), последнее равенство запишем в виде

$$\sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln|\lambda_k-\lambda_n| = \nu(\lambda_n;\ \lambda_n)\ln\lambda_n - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t}dt. \tag{6}$$

Учитывая соотношения (2), (4), (6), получаем, что

$$\Sigma_1 = N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n)\ln 2 - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t}dt + M_n^-, \tag{7}$$

где

$$M_n^- = \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\left|\frac{\lambda_k-z}{\lambda_k-\lambda_n}\right| \quad (k\neq n).$$

Приступим к оценке Σ_2. Поскольку

$$\ln\left|1+\frac{z}{\lambda_k}\right| = \ln\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) + \ln\left|\frac{\lambda_k+z}{\lambda_k+\lambda_n}\right|,$$

то
$$\Sigma_2 = \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) + M_n^+, \tag{8}$$
где
$$M_n^+ = \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\left|\frac{\lambda_k+z}{\lambda_k+\lambda_n}\right|.$$
Но
$$\begin{gathered}0 < \sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n} \ln\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) = \int\limits_0^{2\lambda_n} \ln\left(1+\frac{\lambda_n}{t}\right) dn_1(t) = n_1(2\lambda_n)\ln\frac{3}{2}+ \\ + \lambda_n \int\limits_0^{2\lambda_n} \frac{n_1(t)}{t(t+\lambda_n)}dt \leqslant n_1(2\lambda_n)\ln\frac{3}{2} + N_1(2\lambda_n).\end{gathered} \tag{9}$$
Следовательно, из (8), (9) получаем, что
$$|\Sigma_2| \leqslant n_1(2\lambda_n)\ln\frac{3}{2} + N_1(2\lambda_n) + |M_n^+|.$$
Тогда, учитывая лемму 1, имеем:
$$|\Sigma_2| \leqslant n_1(2\lambda_n)\ln\frac{3}{2} + N_1(2\lambda_n) + n_1(2\lambda_n)\ln\frac{4}{3},$$
то есть
$$|\Sigma_2| \leqslant n_1(2\lambda_n)\ln 2 + N_1(2\lambda_n). \tag{10}$$

Осталось оценить Σ_3. Поскольку в этой сумме при $z \in K_n$
$$\frac{|z|}{t} \leqslant \frac{\lambda_n + \frac{h_n}{2}}{2\lambda_n} = \frac{1}{2} + \frac{h_n}{4\lambda_n} \leqslant \frac{3}{4},$$
то $1-\frac{r^2}{t^2} > 0$, и
$$\Sigma_3 = \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \ln\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| dn(t) \geq \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \ln\left(1-\frac{r^2}{t^2}\right) dn(t),$$
где $r = |z|$, $n(t) = \sum\limits_{\lambda_k\leqslant t} 1$. Отсюда получаем, что
$$\Sigma_3 \geq -n(2\lambda_n)\ln\left(1-\frac{r^2}{4\lambda_n^2}\right) - 2r^2\int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2-r^2)}dt.$$
Отбрасывая первое выражение (в силу сказанного, оно положительно), имеем:
$$\Sigma_3 \geq -2r^2\int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2-r^2)}dt.$$
С другой стороны,
$$\Sigma_3 \leqslant \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \ln\left(1+\frac{r^2}{t^2}\right) dn(t).$$

Отсюда аналогично получаем (подстановка отрицательна)

$$\Sigma_3 \leqslant 2r^2 \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2+r^2)} dt.$$

Поэтому в итоге

$$|\Sigma_3| \leqslant 2r^2 \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2-r^2)} dt. \tag{11}$$

Так как $r \leqslant \lambda_n + \frac{1}{2} \leqslant 2\lambda_n$, то

$$\frac{2r^2}{t^2-r^2} \leqslant 4 \frac{2\lambda_n^2}{t^2+\lambda_n^2} \frac{t^2+\lambda_n^2}{t^2-r^2}.$$

Поскольку $r \leqslant \lambda_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{t+1}{2}$, то $t^2 - r^2 \geq t(t-r) \geq \frac{t(t-1)}{2}$. Следовательно, учитывая неравенство $\lambda_n \leqslant \frac{t}{2}$, получаем

$$\frac{t^2+\lambda_n^2}{t^2-r^2} \leqslant \frac{5}{2}\frac{t}{t-1} \leqslant \frac{5}{2}\frac{2\lambda_n}{2\lambda_n-1} \leqslant 5.$$

Таким образом, из (11) окончательно имеем:

$$|\Sigma_3| \leqslant 40\lambda_n^2 \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2+\lambda_n^2)} dt \leqslant 20 \ln M_q(\lambda_n), \tag{12}$$

где $M_q(r) = \max\limits_{|z|=r} |q(z)|$.

Учитывая (1), (7) запишем

$$\ln|q(z)| = \ln\left|1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| - \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t} dt + N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n)\ln 2 + M_n^- + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad z \in K_n.$$

Следовательно, для $z \in K_n$

$$\left|\ln\frac{1}{|q(z)|} - \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t} dt\right| \leqslant \left|\ln\left|1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|\right| + N_1(2\lambda_n) + n_1(2\lambda_n)\ln 2 + |M_n^-| + |\Sigma_2| + |\Sigma_3|.$$

Отсюда, учитывая леммы 1, 2, оценки (10), (12), окончательно получаем, что

$$\left|\ln\frac{1}{|q(z)|} - \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t} dt\right| \leqslant \ln 10 + |\ln h_n| + \ln\lambda_n + 2N_1(2\lambda_n) + n_1(2\lambda_n)\ln 8 + 20\ln M_q(\lambda_n).$$

Полученное сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(1 = \lambda_1 < \lambda_n \uparrow \infty)$ *имеет конечную верхнюю плотность,* $h_n = \min(\min\limits_{k \neq n} |\lambda_k - \lambda_n|, 1)$,

$$q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Тогда в кольцах

$$K_n = \left\{\xi : \frac{h_n}{4} \leqslant |\xi - \lambda_n| \leqslant \frac{h_n}{2}\right\}$$

верна оценка

$$\left|\ln\frac{1}{|q(z)|}-\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t}dt\right|\leqslant m(\lambda_n),$$

где $\nu(\lambda_n;\ t)$ *— число точек* $\lambda_k\neq\lambda_n$ *из отрезка* $\{h:|h-\lambda_n|\leqslant t\}$, $m(\lambda_n)=\ln 10+\ln\lambda_n+|\ln h_n|+n(2\lambda_n)\ln 8+2N(2\lambda_n)+20\ln M_q(\lambda_n)$.

Следствие 1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$, *и для некоторой функции* $w_1\in W$

$$|\ln h_n|\leqslant w_1(\lambda_n)\quad (n\geq 1),$$

то для $z\in K_n$

$$\left|\ln\frac{1}{|q(z)|}-\int\limits_0^{r}\frac{\nu(z;\ t)}{t}dt\right|\leqslant w_2(r),$$

где w_2 *— какая-то функция из* W.

Мы воспользовались хорошо известным фактом, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$ равносильна сходимости интегралов [2], [3]:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{n(r)}{r^2}dr,\qquad \int\limits_1^{\infty}\frac{N(r)}{r^2}dr,\qquad \int\limits_1^{\infty}\frac{\ln M_q(r)}{r^2}dr.$$

Сделаем одно замечание. Так как

$$-\ln\prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2}\leqslant\lambda_k\leqslant 2\lambda_n,\\ k\neq n}}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|=-\sum_{|\lambda_k-\lambda_n|\leqslant\lambda_n}\ln\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|+\sum_{\lambda_k\leqslant\frac{\lambda_n}{2}}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|=-\Sigma_1(\lambda_n)+A,$$

то для $\Sigma_1(\lambda_n)$ и A верны соотношения:

$$0\leqslant A=\sum_{\lambda_k\leqslant\frac{\lambda_n}{2}}\ln\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}-1\right)\leqslant\sum_{\lambda_k\leqslant\frac{\lambda_n}{2}}\ln\left(1+\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right)\leqslant\ln M_q(\lambda_n),$$

$$\Sigma_1(\lambda_n)=-\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t}dt+N_1(2\lambda_n)-n_1(2\lambda_n)\ln 2.$$

Так что имеет место

Лемма 3. *Верна оценка*

$$\left|-\ln\prod_{\substack{k\neq n\\ \frac{\lambda_n}{2}\leqslant\lambda_k\leqslant 2\lambda_n}}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|-\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\nu(\lambda_n;\ t)}{t}dt\right|\leqslant n(2\lambda_n)+N(2\lambda_n)+\ln M_q(\lambda_n),$$

где $\nu(\lambda_n;\ t)$ *— число точек* $\lambda_k\neq\lambda_n$ *из отрезка* $\{h:|h-\lambda_n|\leqslant t\}$.

В дальнейшем нам понадобится и следующая

Лемма 4. *Пусть* $w\in W$. *Тогда функция* $v(z)=w^*(|z|)$, *где*

$$w^*(r)=\int\limits_1^{\infty}\ln\left(1+\frac{r^2}{t^2}\right)dw(t),\quad r=|z|,$$

субгармоническая в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Заметим, что

$$v(z) \geq u(z) \equiv \int\limits_1^\infty \ln\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| dw(t),$$

причем u — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция (см., например, в [4]). Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и выберем w_0 на мнимой оси так, что $|w_0| = |z_0|$. Так как $z_0 = w_0 e^{-\alpha i}$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\alpha^{2\pi+\alpha} v\left[e^{-\alpha i}(w_0 + \rho e^{i\psi})\right] d\psi,$$

$\psi = \varphi + \alpha$. Поскольку функция $f(\psi) = v\left[e^{-\alpha i}(w_0 + \rho e^{i\psi})\right]$ 2π-периодична, а $v(z) = v(|z|)$, то имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(w_0 + \rho e^{i\psi})d\psi.$$

Далее, для любого $\rho > 0$ (u субгармонична в $\mathbb{C}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(w_0 + \rho e^{i\psi})d\psi \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(w_0 + \rho e^{i\psi})d\psi \geq u(w_0) = v(z_0).$$

Отсюда и следует субгармоничность функции v. □

3. Критерий интерполяционности последовательности Λ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность Λ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in W$, такая, что*

$$а)\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \qquad б)\ -\ln \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \neq n}} \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \leqslant w(\lambda_n) \quad (n \geq 1).$$

Отметим, что из леммы 3 и условий а), б) следует, что

$$\ln\frac{1}{h_n} \leqslant w_0(\lambda_n) \quad (n \geq 1),$$

где $h_n = \min\left(\min\limits_{\substack{k\neq n\\ k\geq 1}} |\lambda_n - \lambda_k|, 1\right)$, w_0 — некоторая функция из класса W.

Доказательство достаточной части теоремы 2 основано на одной теореме существования Хёрмандера для $\overline{\partial}$-уравнений. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\varphi = \varphi(z)$ — функция, субгармоническая в $\mathbb{C}$, $g \in C^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует решение $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ уравнения $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = g$, удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |u|^2 e^{-\varphi}(1 + |z|^2)^{-2} d\lambda \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda, \tag{13}$$

при условии, что правая часть конечна (λ — мера Лебега).

Доказательство. Докажем сначала достаточность теоремы 2. Для этого возьмем функцию $\psi \in C^\infty$, такую, что $\psi(z) = 1$ при $|z| < \frac{1}{4}$ и $\psi(z) = 0$ при $|z| > \frac{1}{2}$. Положим

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(z - \lambda_n), \quad \Psi_n(z) = \psi\left(\frac{z}{h_n}\right)$$

($\{b_n\}$ — любая заданная последовательность комплексных чисел, $|b_n| \leqslant 1$). Поскольку $A(z) = b_k\Psi_k(z - \lambda_k)$ для $z \in B_k = \{z : |z - \lambda_k| < \frac{h_k}{2}\}$, и $A(z) = 0$ для z из внешности объединения кружков B_n ($n \geq 1$), то, очевидно, $A \in C^\infty$. Далее, так как $|\lambda_k - \lambda_n| \geq h_n$ при $k \neq n$, то $A(\lambda_k) = b_k\psi(0) = b_k$ ($k \geq 1$).

Пусть

$$\varphi(z) = 2\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left|1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| + v(z),$$

где v — субгармоническая функция, которая будет выбрана позже. Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $\prod\limits_n \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$ — целая функция экспоненциального типа, и φ является субгармонической функцией.

Имеем:

$$M_\varphi(r) = \max_{|z|=r}|\varphi(z)| \leqslant 2\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) + M_v(r).$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) = \int_0^{\infty}\ln\left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right)dn(t). \tag{14}$$

Интегрируя по частям интеграл Стилтьеса (14) и учитывая, что $\frac{n(t)}{t} \to 0$ при $t \to \infty$, получаем:

$$\int_0^{\infty}\ln\left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right)dn(t) = 2r^2\int_1^{\infty}\frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)}dt \equiv w_1(r).$$

Проверим, что $w_1 \in W$. Действительно, полагая $t = sr$, имеем:

$$w_1(r) = 2\int_{1/r}^{\infty}\frac{n(sr)}{s(s^2+1)}ds,$$

откуда видно, что w_1 — возрастающая функция. Так как

$$\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{w_1(r)}{r^2}dr = \int_1^{\infty}\frac{n(t)}{t}\left(\int_1^{\infty}\frac{dr}{t^2+r^2}\right)dt \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^{\infty}\frac{n(t)}{t^2}dt < \infty,$$

то $w_1 \in W$.

Построим субгармоническую функцию v так, чтобы величина $M_v(r)$ (максимум модуля функции v) допускала оценку сверху через некоторую функцию из класса W, и при этом правая часть в (13) для $g = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$ была конечной.

Пусть

$$K_n = \left\{\xi : \frac{h_n}{4} < |\xi - \lambda_n| < \frac{h_n}{2}\right\} \quad (n \geq 1).$$

Заметим, что кольца K_n ($n \geq 1$) попарно не пересекаются. Это следует из того, что

$$\frac{h_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{2} \leqslant \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (n \geq 1).$$

Имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|\frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda = \int\limits_{\cap_n \{\xi : |\xi-\lambda_n| > \frac{h_n}{2}\}} \left|\frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{K_n} \left|\frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{\xi : |\xi-\lambda_n| < \frac{h_n}{4}\}} \left|\frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda. \tag{15}$$

Первый и последний из интегралов справа в равенстве (15), очевидно, равны нулю. Далее, $A(\xi) = b_n \psi\left(\frac{\xi-\lambda_n}{h_n}\right)$ для $\xi \in K_n$. Считая, что $\psi = \psi(w, \overline{w})$, где $w = x + iy = \frac{\xi-\lambda_n}{h_n}$, получаем: $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial \psi}{\partial \overline{w}} \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)} = \frac{\partial \psi}{\partial \overline{w}} \frac{1}{h_n}$. Отсюда имеем:

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}}\right| = \frac{1}{2h_n} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{h_n} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|, \quad \xi \in K_n.$$

Поскольку $|b_n| \leqslant 1$, то

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|\frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}}\right|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} T_n,$$

где

$$T_n = \frac{1}{h_n^2} \int\limits_{K_n} e^{-v(\xi)} \prod_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right|^{-2} d\lambda(\xi),$$

а $C_1 = \max\limits_{|x| \leqslant \frac{1}{2}} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2$.

Для каждого фиксированного n и $\xi \in K_n$

$$p(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| = \prod_{\lambda_k \leqslant \frac{\lambda_n}{2}} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \neq n}} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right|.$$

Так как $\mathrm{Re}\, \xi > 0$ для $\xi \in K_n$ $(n \geq 1)$, то

$$\left|1 + \frac{\xi}{\lambda_k}\right| \geq 1. \tag{16}$$

Далее, для $\lambda_k \leqslant \frac{\lambda_n}{2}$

$$\left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \geq \frac{|\xi|^2}{\lambda_k^2} - 1 \geq 4\left[1 - \frac{1}{2\lambda_n}\right]^2 - 1 \geq 1 \tag{17}$$

для $\lambda_n \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть при $n \geq n_0$. Учитывая оценки (16), (17), получаем, что для $\xi \in K_n$, $n \geq n_0$,

$$p(\xi) \geq \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \neq n}} \left|1 - \frac{\xi}{\lambda_k}\right| \prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right|. \tag{18}$$

Применяя лемму 1, для $\xi \in K_n$ $(n \geq 1)$ имеем:

$$\left|1 - \frac{\xi}{\lambda_k}\right| = \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \frac{|\xi - \lambda_k|}{|\lambda_n - \lambda_k|} \geq \frac{1}{2} \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \quad (k \neq n). \tag{19}$$

Оценим теперь величину $\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right|$ для $\xi \in K_n$:

$$\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \geq \frac{h_n}{4}\frac{|\xi+\lambda_n|}{\lambda_n^2} \geq \frac{h_n}{4\lambda_n}.$$

Но из условий а) и б) следует, что (см. выше)

$$\frac{1}{h_n} \leqslant e^{w_0(\lambda_n)} \quad (n \geq 1),$$

где w_0 — некоторая функция из класса W. Значит, для $\xi \in K_n$ $(n \geq 1)$

$$\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \geq e^{-w_2(\lambda_n)}, \quad w_2 \in W. \tag{20}$$

Требуемая оценка через функцию из W для первого произведения в (18) легко следует из условий а) и б), если учесть (19). Осталось оценить произведение $\prod\limits_{\lambda_k \geq 2\lambda_n}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right|$. Имеем[1]:

$$\begin{aligned}\ln \prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n}\left|1-\frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| &= \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \ln\left|1-\frac{\xi^2}{t^2}\right| dn(t) \geq \\ &\geq -C_2 \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{t^2} dn(t) \geq -2C_2\lambda_n^2 \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t^3}dt.\end{aligned} \tag{21}$$

Пусть

$$w_3(r) \equiv r^2 \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{n(t)}{t^3}dt = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{n(sr)}{s^3}ds.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^{\infty} \frac{w_3(r)}{r^2}dr &= \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{r^2}\left(\int\limits_2^{\infty} \frac{n(sr)}{s^3}ds\right)dr = \int\limits_2^{\infty} \frac{1}{s^3}\left(\int\limits_1^{\infty} \frac{n(sr)}{r^2}dr\right)ds = \\ &= \int\limits_2^{\infty} \frac{1}{s^2}\left(\int\limits_s^{\infty} \frac{n(x)}{x^2}dx\right)ds \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} \frac{n(x)}{x^2}dx < \infty.\end{aligned}$$

Так как $p(\xi) \geq \beta > 0$ на $\cup_{n \leqslant n_0} K_n$, то отсюда и оценок (18)–(21), условий а), б) теоремы окончательно получаем, что существует функция $w_4 \in W$, такая, что для всех $n \geq 1$

$$p(\xi) \geq e^{-w_4(\lambda_n)}, \quad \xi \in K_n. \tag{22}$$

Положим

$$w^*(r) = \int\limits_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{r^2}{t^2}\right) dw_4^*(t) + (w_4^*(1)+1)\ln(1+r^2),$$

---

[1] Поскольку $\frac{|\xi|^2}{t^2} \leqslant \left(\frac{\lambda_n+\frac{1}{2}}{2\lambda_n}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\lambda_1}\right)^2 < \frac{2}{3}$, то

$$\ln\left|1-\frac{\xi^2}{t^2}\right| \geq \ln\left(1-\frac{|\xi|^2}{t^2}\right) \geq -3\frac{|\xi|^2}{t^2},$$

так как функция $\varphi(\alpha) = \ln(1-\alpha)+3\alpha$ возрастает при $\alpha < \frac{2}{3}$. Но $\frac{|\xi|}{\lambda_n} \leqslant \frac{3}{2}$ при $\xi \in K_n$ $(n \geq 1)$, поэтому

$$\ln\left|1-\frac{\xi^2}{t^2}\right| \geq -C_2\frac{\lambda_n^2}{t^2}, \quad C_2 = \frac{27}{4}.$$

где $w_4^* = w_4 + w_0$. Тогда при некотором $C > 0$ $v(z) = Cw^*(|z|)$ — искомая функция. Действительно, по лемме 4, v является субгармонической в $\mathbb{C}$ функцией, а величина $M_v(r) = Cw^*(r)$, как мы видели выше с функцией w_1, представляет собой функцию из класса W.

Остается показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n < \infty$. Учитывая оценку (22) и определение функции v, имеем:

$$T_n \leqslant \frac{1}{h_n^2} \int\limits_{K_n} e^{-Cw^*(|\xi|)+2w_4(\lambda_n)} d\lambda(\xi) \leqslant C_3 \exp\left[2w_0(\lambda_n) + 2w_4(\lambda_n) - Cw^*(\lambda_n - \frac{1}{2})\right],$$

$C_3 = \frac{3}{16}\pi$. Заметим, что

$$w^*(r) = 2r^2 \int\limits_1^{\infty} \frac{w_4^*(t)}{t(t^2+r^2)} dt + \ln(1+r^2) \geq 2r^2 w_4^*(r) \int\limits_r^{\infty} \frac{dt}{t(t^2+r^2)} \geq \frac{1}{2} w_4^*(r),$$

а также

$$\frac{w^*(\lambda_n)}{w^*(\lambda_n - \frac{1}{2})} \leqslant M \quad (n \geq 1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{C}{M} w^*(\lambda_n) + 2w_4^*(\lambda_n)} \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(-\frac{C}{M}+4\right) w^*(\lambda_n)}.$$

Из определения функции $w^*(r)$ следует, что $w^*(r) \geq (w_4^*(1)+1)\ln(1+r^2)$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n^2)^{C_4}},$$

где $C_4 = \left(\frac{C}{M} - 4\right)(w_4^*(1)+1)$, C — постоянная из определения функции v. Так как последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, то последний ряд сходится, если $2C_4 > 1$. Для этого достаточно взять $C > 5M$.

Как уже говорилось выше, $M_v(r) = Cw^*(r)$, $w^* \in W$. Значит,

$$M_\varphi(r) \leqslant w_5(r), \tag{23}$$

где $w_5 = 2w_1 + Cw^*$ — функция из класса W.

Мы собираемся применить теорему 3 для $g = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$. Поскольку функция φ выбрана так, что $e^{-\varphi}$ имеет неинтегрируемую особенность в каждой точке λ_n, должно быть $u(\lambda_n) = 0$ $(n \geq 1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}, \quad u(\lambda_n) = 0 \ \ (n \geq 1). \tag{24}$$

Положим $f = A - u$, где u — решение уравнения (24) (оно существует по теореме Хёрмандера). Ясно, что f — целая функция и $f(\lambda_n) = b_n$ $(n \geq 1)$.

Так как $|f|^2$ — субгармоническая во всей плоскости, то для любого $\rho > 0$, в частности, при $1 \leqslant \rho \leqslant r$ [5, гл.I, п.6]

$$|f(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2} \int\limits_{|\xi - z| \leqslant \rho} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi) < \int\limits_{|\xi| \leqslant 2r} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi), \quad r = |z|.$$

Поскольку $|f|^2 \leqslant 2(|A|^2 + |u|^2)$, имеем:

$$\int\limits_{|z|\leqslant 2r} |f|^2 d\lambda \leqslant 2 \int\limits_{|z|\leqslant 2r} |A|^2 d\lambda + 2 \int\limits_{|z|\leqslant 2r} |u|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 8\pi r^2 + 2 \int\limits_{|z|\leqslant 2r} |u|^2 \frac{e^{-\varphi}}{(1+|z|^2)^2}(1+|z|^2)^2 e^{\varphi} d\lambda.$$

Применив к последнему интегралу оценку (13) из теоремы Хёрмандера, получим:

$$\int\limits_{|z|\leqslant 2r} |f|^2 d\lambda \leqslant 8\pi r^2 + 2\exp\left\{2\ln(1+4r^2) + M_{\varphi}(2r)\right\} \int\limits_{\mathbb{C}} |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Учитывая сходимость последнего интеграла и оценку (23), заключаем, что

$$|f(z)| \leqslant C_5 e^{w_6(|z|)},$$

где $w_6 \in W$. Последнее означает, что функция $f = A - u$ решает интерполяционную задачу.

Достаточность теоремы доказана.

Докажем н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — интерполяционная последовательность и $\tilde{w}$ — функция из класса W, существование которой утверждается в определении 1. Сначала выберем целую функцию f, которая решает интерполяционную задачу для $b_1 = 1$ и $b_n = 0$ $(n > 1)$. Из неравенства Йенсена, используя свойство 2) интерполяционной последовательности, получаем

$$n(r) \leqslant \ln M_f(er) \leqslant \tilde{w}(er).$$

Как уже говорилось в §1, сходимость интеграла

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{n(r)}{r^2} dr$$

равносильна условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

Для того чтобы доказать условие б), зафиксируем n и выберем такую целую функцию f, которая решает интерполяционную задачу для $b_n = 1$ и $b_k = 0$ $(k \neq n)$.

Справедливо представление

$$f(z) = \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n, \\ k \neq n}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) G(z), \tag{25}$$

где G — целая функция (если ни одно из λ_k $(k \neq n)$ не попало в интервал $\left(\frac{\lambda_n}{2}, 2\lambda_n\right)$, то считаем, что $G = f$). Для $\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n$ имеем:

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geq \left|1 - \frac{4\lambda_n}{\lambda_k}\right| \geq 1, \quad |z| = 4\lambda_n.$$

Отсюда следует, что $|G(z)| \leqslant |f(z)|$, $|z| = 4\lambda_n$. По принципу максимума модуля,

$$|G(\lambda_n)| \leqslant M_G(4\lambda_n) \leqslant M_f(4\lambda_n) \leqslant e^{\tilde{w}(4\lambda_n)}. \tag{26}$$

С другой стороны, из (25) следует, что

$$G(\lambda_n) = \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2}<\lambda_k<2\lambda_n,\\ n\neq k}} \left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1}, \tag{27}$$

поскольку $f(\lambda_n)=1$. Из соотношений (26), (27) окончательно получаем:

$$-\ln \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2}<\lambda_k<2\lambda_n,\\ k\neq n}} \left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \leqslant \tilde{w}(4\lambda_n),$$

где $\tilde{w}$ — функция из класса W.

Теорема доказана полностью. □

Автор выражает благодарность профессору А.М. Гайсину за указание на работу Б. Берндсона, а участникам семинара по теории функций — за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berndtsson B. *A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation* // Indag. Math. 1978. V. 40. № 4. P. 409–414.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976. 536 с.
3. Гайсин А.М. *Целые функции: основы классической теории с приложениями к исследованиям по комплексному анализу.* Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. 160 с.
4. Кацнельсон В.Э. *Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением* // Функциональный анализ и его приложения. 1976. Т. 10. № 4. С. 35–44.
5. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир, 1984. 472 с.

Рашит Ахтярович Гайсин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru