ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 89-101.

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛЕОНТЬЕВА-ЛЕВИНА

А.С. КРИВОШЕЕВ, А.Ф. КУЖАЕВ

Аннотация. В работе исследуются взаимосвязи между различными плотностями положительной последовательности и связанными с ними величинами. Более точно, в работе рассматриваются верхняя плотность, максимальная плотность (введённая Дж. Полиа (G. Polya)), логарифмическая блок-плотность (впервые рассмотренная, по-видимому, Л.А. Рубелем (L.A. Rubel)). В частности, были получены соотношения, дающие связь между максимальной плотностью и величиной, имеющей непосредственное отношение к логарифмической блок-плотности. Результаты этих исследований применяются для обобщения классического утверждения, полученного независимо друг от друга А.Ф. Леонтьевым и Б.Я. Левиным, о полноте в выпуклой области систем экспоненциальных мономов с положительными показателями на случай показателей, не имеющих плотность. Выяснено, что ослаблением условия измеримости последовательности (то есть существования плотности) в контексте упомянутого выше результата о полноте, является равенство верхней и максимальной плотностей. А именно, получено условие, при котором имеет место критерий полноты системы экспоненциальных мономов в выпуклых областях. Следует отметить, что критерий справедлив в достаточно широком классе выпуклых областей, например, имеющих вертикальные или горизонтальные оси симметрии. Решающую роль в решении этого вопроса сыграли результаты исследований Л.А. Рубеля и П. Мальявена (P. Malliavin) о связи роста целой функции экспоненциального типа вдоль мнимой оси и логарифмической блок-плотности последовательности её положительных нулей. Эти результаты были применены ими для выяснения условия полноты системы экспонент в горизонтальной полосе.

Ключевые слова: плотность последовательности, целая функция, полнота, выпуклая область.

Mathematics Subject Classification: 30D10

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n, m_n\}_{n=1}^{\infty}$ — кратная последовательность положительных чисел. Здесь $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность, и m_n — натуральное число, называемое кратностью элемента $\lambda_n, n \geqslant 1$. Напомним, что *верхней плотностью* и *нижней плотностью* последовательности Λ называются соответственно величины

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t}, \quad \underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t},$$

где

$$n(t,\Lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} m_n$$

— считающая функция последовательности Λ, т.е. число её элементов (с учетом их кратностей), лежащих на полуинтервале $(0;t]$. Если $\bar{n}(\Lambda) = \underline{n}(\Lambda)$, то последовательность Λ называется *измеримой*, и тогда величина

$$n(\Lambda) = \lim_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t}$$

A.S. Krivosheyev, A.F. Kuzhaev, On a Leontiev-Levin theorem.

Поступила 30 марта 2017 г.

существует и называется *плотностью* последовательности Λ.

Положим $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^k e^{\lambda_n z}\}_{n=1,k=0}^{\infty,m_n-1}$. Будем говорить, что система функций $\mathcal{E}(\Lambda)$ *полна в выпуклой области* $D \subseteq \mathbb{C}$, если она полна в пространстве $H(D)$ функций, аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D.

Проблема полноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в выпуклой области D изучалась во многих работах (см., например, [1–3] и др.). А.Ф. Леонтьевым ([4]) и Б.Я. Левиным ([5], гл. IV, теорема 21) независимо друг от друга получен следующий классический результат. Мы сформулируем его для случая выпуклых областей.

Пусть D — выпуклая область. *Вертикальным диаметром* области D называется величина

$$d(D) = \sup_x \sup_{(y_1,y_2)} \Big\{ |y_1 - y_2| : z_1 = x + iy_1, z_2 = x + iy_2, \quad z_1, z_2 \in D, \quad x, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Если Λ — измеримая последовательность с плотностью $n(\Lambda) = \tau > 0$, то система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в любой выпуклой области с вертикальным диаметром $d(D) \leqslant 2\pi\tau$ и не полна в любой выпуклой области с вертикальным диаметром $d(D) > 2\pi\tau$.

Цель данной работы – обобщение этого результата для последовательностей, не имеющих плотность, в широком классе выпуклых областей (в частности, в классах областей, имеющих вертикальные или горизонтальные оси симметрии).

Указанное обобщение опирается на исследования взаимосвязи между различными плотностями положительной последовательности. Напомним определение этих плотностей.

Прежде всего, нам понадобится характеристика, введённая Дж. Полиа (см. [6]) — *максимальная плотность* последовательности Λ:

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta \to +0} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{n(t, \Lambda) - n(t(1-\delta), \Lambda)}{\delta t}, \quad \delta \in (0;1).$$

Согласно лемме параграфа E3 главы IV книги [7] предел по $\delta \to +0$ всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Логарифмической блок-плотностью (или просто логарифмической плотностью) $\bar{L}(\Lambda)$ положительной последовательности Λ называется величина, определяемая равенством

$$\bar{L}(\Lambda) = \inf_{a>1} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\lambda(at) - \lambda(t)}{\ln a}, \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n}. \tag{1}$$

Согласно лемме 3.2 работы [1] величину $\bar{L}(\Lambda)$ можно вычислить следующим образом:

$$\bar{L}(\Lambda) = \lim_{a \to +\infty} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\lambda(at) - \lambda(t)}{\ln a},$$

то есть предел по $a \to +\infty$ существует. В дальнейшем именно этим соотношением мы и будем пользоваться при работе с логарифмической плотностью. Сделав в последнем равенстве замену переменных, можем написать

$$\bar{L}(\Lambda) = \lim_{\delta \to 1-0} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\lambda(t) - \lambda(t(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)}, \tag{2}$$

где $\delta \in (0;1)$. Для дальнейшего нам понадобятся также следующие величины:

$$\bar{L}(\Lambda, \delta) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\lambda(t) - \lambda(t(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)}, \quad \delta \in (0;1), \tag{3}$$

$$\bar{n}_0(\Lambda, \delta) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{n(t) - n(t(1-\delta))}{\delta t}, \quad \delta \in (0;1). \tag{4}$$

Используя эти обозначения, получаем:

$$\bar{L}(\Lambda) = \lim_{\delta \to 1-0} \bar{L}(\Lambda, \delta), \quad \bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta \to +0} \bar{n}_0(\Lambda, \delta).$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть последовательность Λ имеет конечную максимальную плотность. Тогда верна цепочка неравенств:*

$$\underline{n}(\Lambda) \leqslant \bar{L}(\Lambda) \leqslant \bar{n}(\Lambda) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda, \delta) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda), \quad \delta \in (0;1). \tag{5}$$

Доказательство. Неравенства $\bar{n}(\Lambda) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda, \delta) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda), \delta \in (0;1)$ были доказаны в лемме 2.1 работы [8]. Докажем неравенства $\underline{n}(\Lambda) \leqslant \bar{L}(\Lambda) \leqslant \bar{n}(\Lambda)$.

Так как $\bar{n}_0(\Lambda) < +\infty$, то и $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся r_ε такое, что для каждого $r \geqslant r_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$n(r, \Lambda) < (\bar{n}(\Lambda) + \varepsilon) r.$$

Пусть $\delta \in (0;1)$ и $t(1-\delta) \geqslant r_\varepsilon$. Тогда с учетом предыдущего неравенства получаем:

$$\begin{gathered}
\sum_{t(1-\delta)<\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n} = \int\limits_{t(1-\delta)}^{t} \frac{dn(r,\Lambda)}{r} = \frac{n(t,\Lambda)}{t} - \frac{n(t(1-\delta),\Lambda)}{t(1-\delta)} + \\
+ \int\limits_{t(1-\delta)}^{t} \frac{n(r,\Lambda)dr}{r^2} < \frac{n(t,\Lambda)}{t} - \frac{n(t(1-\delta),\Lambda)}{t(1-\delta)} + (\bar{n}(\Lambda)+\varepsilon) \int\limits_{t(1-\delta)}^{t} \frac{dr}{r} \leqslant \\
\leqslant \frac{n(t,\Lambda)}{t} + (\bar{n}(\Lambda)+\varepsilon) \int\limits_{t(1-\delta)}^{t} \frac{dr}{r} < \bar{n}(\Lambda) + \varepsilon + (\bar{n}(\Lambda)+\varepsilon) \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right) = \\
= (\bar{n}(\Lambda)+\varepsilon)(1 - \ln(1-\delta)).
\end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, учитывая произвольность числа $\varepsilon > 0$, с учетом (3) имеем:

$$\bar{L}(\Lambda, \delta) \leqslant \bar{n}(\Lambda) \frac{1 - \ln(1-\delta)}{-\ln(1-\delta)}.$$

Отсюда в силу (2) следует неравенство $\bar{L}(\Lambda) \leqslant \bar{n}(\Lambda)$.

Используя теперь определение нижней плотности, как и в (6) получаем:

$$\begin{gathered}
\sum_{t(1-\delta)<\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n} > -\frac{n(t(1-\delta),\Lambda)}{t(1-\delta)} + (\underline{n}(\Lambda)-\varepsilon) \int\limits_{t(1-\delta)}^{t} \frac{dr}{r} > \\
> -\bar{n}(\Lambda) - \varepsilon + (\underline{n}(\Lambda)-\varepsilon) \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right), \quad \delta \in (0;1), \quad t(1-\delta) \geqslant r_\varepsilon.
\end{gathered}$$

Отсюда в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ и равенства (1) следует, что $\underline{n}(\Lambda) \leqslant \bar{L}(\Lambda)$. Лемма доказана.

Замечания. 1. Согласно (5) и лемме 2.1 из работы [8] в случае, когда последовательность Λ измерима, имеют место равенства

$$\underline{n}(\Lambda) = \bar{L}(\Lambda) = \bar{n}(\Lambda) = \bar{n}_0(\Lambda, \delta) = \bar{n}_0(\Lambda), \quad \delta \in (0;1). \tag{7}$$

2. Согласно (1) и (3) верно неравенство

$$\bar{L}(\Lambda) \leqslant \bar{L}(\Lambda, \delta), \quad \delta \in (0;1). \tag{8}$$

В связи с этим и цепочкой неравенств (5) возникает естественный вопрос: справедливо ли неравенство $\bar{L}(\Lambda, \delta) \leqslant \bar{n}(\Lambda)$, $\delta \in (0;1)$. Положительный ответ на этот вопрос расширил бы цепочку (5). Однако указанное неравенство неверно. Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $\delta \in (0;1)$, $0 < R_k \to \infty$, $k \to \infty$, и $R_{k+1}/R_k \to \infty$, $k \to \infty$. Положим $\Lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Lambda_k$, где Λ_k — множество, состоящее из всех натуральных чисел, принадлежащих интервалу $\big((1-\delta)R_k, R_k\big)$, $k\in\mathbb{N}$, кратность каждого из которых равна единице. В силу выбора чисел R_k имеем:

$$\bar{n}(\Lambda)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{n(t,\Lambda)}{t}=\lim_{k\to\infty}\frac{n(R_k,\Lambda)}{R_k}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{R_{k-1}+\delta R_k}{R_k}=\delta.$$

С другой стороны,

$$\bar{n}(\Lambda)=\lim_{k\to\infty}\frac{n(R_k,\Lambda)}{R_k}\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\delta R_k}{R_k}=\delta.$$

Таким образом, $\bar{n}(\Lambda)=\delta$. Кроме того,

$$\underline{n}(\Lambda)=\lim_{k\to\infty}\frac{n(R_k(1-\delta),\Lambda)}{R_k(1-\delta)}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{R_{k-1}}{R_k(1-\delta)}=0.$$

Следовательно, $\underline{n}(\Lambda)=0$. Пусть $\alpha\in(0;\delta]$. Тогда

$$\bar{n}_0(\Lambda,\alpha)=\lim_{k\to\infty}\frac{n(R_k,\Lambda)-n(R_k(1-\alpha),\Lambda)}{\alpha R_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha R_k}{\alpha R_k}=1,$$
$$\bar{n}_0(\Lambda)=\lim_{\alpha\to 0}\bar{n}_0(\Lambda,\alpha)=1.$$

Кроме того,

$$\bar{L}(\Lambda,\alpha)=\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda(R_k)-\lambda(R_k(1-\alpha))}{-\ln(1-\alpha)}.\tag{9}$$

По формуле Эйлера имеем:

$$\lambda(R_k)-\lambda(R_k(1-\alpha))=\sum_{R_k(1-\alpha)<n\leqslant R_k}\frac{1}{n}=\ln\frac{[R_k]}{[R_k(1-\alpha)+1]}+r_k,$$

где $[a]$ — целая часть числа a и $r_k\to 0$, $k\to\infty$. Из последнего равенства и (9) получаем: $\bar{L}(\Lambda,\alpha)=1$, $\alpha\in(0;\delta]$. Пусть теперь $\alpha\in(\delta;1)$. Тогда верно равенство (9), но при этом

$$\lambda(R_k)-\lambda(R_k(1-\alpha))=\sum_{R_k(1-\delta)<n\leqslant R_k}\frac{1}{n}=\ln\frac{[R_k]}{[R_k(1-\delta)+1]}+\tilde{r}_k,$$

где $\tilde{r}_k\to 0$, $k\to\infty$. Следовательно,

$$\bar{L}(\Lambda)=\lim_{\alpha\to 1-0}\bar{L}(\Lambda,\alpha)=\lim_{\alpha\to 1-0}\frac{-\ln(1-\delta)}{-\ln(1-\alpha)}=0.$$

Таким образом, в рассмотренном примере имеют место соотношения

$$\underline{n}(\Lambda)=0=\bar{L}(\Lambda)<\delta=\bar{n}(\Lambda)<1=\bar{L}(\Lambda,\alpha)=\bar{n}_0(\Lambda,\alpha)=\bar{n}_0(\Lambda),\quad \alpha\in(0;\delta].$$

3. Пусть последовательность Λ такова, что для неё верхняя и максимальная плотности конечны и равны друг другу: $\bar{n}(\Lambda)=\bar{n}_0(\Lambda)=\tau<+\infty$. Тогда из (5) следует, равенство $\bar{n}_0(\Lambda,\delta)=\tau$, $\delta\in(0;1)$. Оказывается, что верно и обратное. Чтобы показать это, докажем вначале одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\bar{n}(\Lambda)<+\infty$. Справедливы равенства*

$$\bar{n}(\Lambda)=\bar{n}(\Lambda,1)=\lim_{\delta\to 1-0}\bar{n}_0(\Lambda,\delta).$$

Доказательство. Равенство $\bar{n}(\Lambda)=\bar{n}(\Lambda,1)$ немедленно следует из (4).

Пусть $\delta_k\in(0;1)$, $k\in\mathbb{N}$ — последовательность, такая, что $\delta_k\to 1$, $k\to\infty$. Имеем:

$$0\leqslant\bar{n}_0(\Lambda,\delta_k)-\bar{n}_0(\Lambda,1)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{n(t)-n(t(1-\delta_k))}{\delta_k t}-\bar{n}_0(\Lambda,1)\leqslant$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{n(t)}{\delta_k t}-\bar{n}_0(\Lambda,1)=\frac{1}{\delta_k}\bar{n}(\Lambda)-\bar{n}_0(\Lambda,1)=\bar{n}(\Lambda)\frac{1-\delta_k}{\delta_k}\to 0,\ k\to\infty.$$

Следовательно, $\bar{n}_0(\Lambda,\delta_k)\to\bar{n}(\Lambda)$, если $\delta_k\to 1$, $k\to\infty$. Лемма доказана.

Из леммы 2, замечания 3 к лемме 1 и определения максимальной плотности получаем

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) $\bar{n}(\Lambda) = \bar{n}_0(\Lambda) = \tau < +\infty$;
2) $\bar{n}_0(\Lambda, \delta) = \tau < +\infty, \ \delta \in (0; 1)$.

В примере из замечания 2 к лемме 1 было получено равенство $\bar{L}(\Lambda, \alpha) = \bar{n}_0(\Lambda)$, если $\alpha \in (0; \delta]$. Это наталкивает на другое эквивалентное определение максимальной плотности посредством величины $\bar{L}(\Lambda, \alpha)$. Прежде докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\delta \in (0; 1)$. *Имеют место неравенства*

$$\frac{-\delta}{\ln(1-\delta)}\bar{n}_0(\Lambda, \delta) \leqslant \bar{L}(\Lambda, \delta) \leqslant \frac{\delta}{(\delta-1)\ln(1-\delta)}\bar{n}_0(\Lambda, \delta). \tag{10}$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{n(t, \Lambda) - n(t(1-\delta), \Lambda)}{\delta t} \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n}.$$

Отсюда получаем

$$\bar{n}_0(\Lambda, \delta) \leqslant \frac{-\ln(1-\delta)}{\delta}\bar{L}(\Lambda, \delta).$$

Это дает нам первое неравенство в (10). Докажем второе. Имеем:

$$\frac{1}{-\ln(1-\delta)} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{-\ln(1-\delta)} \frac{n(t, \Lambda) - n(t(1-\delta), \Lambda)}{(1-\delta)t}.$$

Следовательно,

$$\bar{L}(\Lambda, \delta) \leqslant \frac{\delta}{(\delta-1)\ln(1-\delta)}\bar{n}_0(\Lambda, \delta).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta \to +0} \bar{L}(\Lambda, \delta). \tag{11}$$

Доказательство. Следует непосредственно из определения величины $\bar{n}_0(\Lambda)$ и неравенств (10). Теорема доказана.

Приведем еще одно эквивалентное определение максимальной плотности. Для этого нам необходимо получить дополнительную информацию о взаимосвязях величин $\bar{L}(\Lambda, \delta)$ и $\bar{n}_0(\Lambda)$.

Пусть $\delta \in (0; 1)$ и $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность, такая, что $0 < t_k \to \infty$. Выберем натуральное число p из условий $\delta/((1-\delta)p) < 1, \ p > 1$. Следуя [8], положим

$$\alpha_l := 1 - \frac{(l-1)\delta}{p}, \quad t_{k,l} := \alpha_l t_k, \quad \delta_l := \frac{\delta}{\alpha_l p}, \quad l = \overline{1, p}. \tag{12}$$

В силу выбора числа p имеем: $\delta_l \in (0; 1) < 1, \ l = \overline{1, p}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ полуинтервал $(t_k(1-\delta); t_k]$ разбивается на p полуинтервалов вида $(t_{k,l}(1-\delta_l); t_{k,l}]$. Длина любого из них в p раз меньше длины исходного полуинтервала $(t_k(1-\delta); t_k]$.

Лемма 4. *Верно неравенство*

$$\bar{L}(\Lambda, \delta) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda), \quad \delta \in (0; 1). \tag{13}$$

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < +\infty$. Пусть $\delta \in (0;1)$ и натуральное число p удовлетворяет условию $\delta/((1-\delta)p) < 1,\ p > 1$. Выберем возрастающую последовательность $0 < t_k \to \infty$ такую, что

$$\bar{L}(\Lambda,\delta) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\lambda(t_k) - \lambda(t_k(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)}. \tag{14}$$

Пусть верно (12). Имеем:

$$\lambda(t_k) - \lambda(t_k(1-\delta)) = \sum_{l=1}^{p} \big(\lambda(t_{k,l}) - \lambda(t_{k,l}(1-\delta_l))\big),\ k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

По лемме 1 справедливо неравенство

$$\bar{n}_0(\Lambda,\delta_l) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda) = \tau, \quad l = \overline{1,p}.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда согласно определению величин $\bar{n}_0(\Lambda,\delta_l)$ найдется номер $k(\varepsilon)$ такой, что

$$\frac{n\big(t_{k,l},\Lambda\big) - n\big(t_{k,l}(1-\delta_l),\Lambda\big)}{\delta_l t_{k,l}} \leqslant \tau + \varepsilon, \quad l = \overline{1,p},\ k \geqslant k(\varepsilon). \tag{16}$$

Пусть $k \geqslant k(\varepsilon)$ и $l = \overline{1,p}$. Если $t_{k,l}(1-\delta_l) < \lambda_n \leqslant t_{k,l}$, то

$$\frac{1}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{t_{k,l}(1-\delta_l) - m\beta}, \quad m = \overline{1,s_k},$$

где $\beta = 1/(\tau+\varepsilon)$ и $s_k = \big[(\tau+\varepsilon)t_{k,l}\delta_l\big] = \big[(\tau+\varepsilon)\delta t_k/p\big]$. Следовательно, с учетом (16) получаем:

$$\lambda\big(t_{k,l}\big) - \lambda\big(t_{k,l}(1-\delta_l)\big) = \sum_{t_{k,l}(1-\delta_l)<\lambda_n\leqslant t_{k,l}} \frac{m_n}{\lambda_n} \leqslant \sum_{m=1}^{s_k} \frac{1}{t_{k,l}(1-\delta_l) - m\beta} =$$

$$= \sum_{m=1}^{s_k} \frac{\tau+\varepsilon}{t_{k,l}(1-\delta_l)(\tau+\varepsilon) - m} \leqslant \sum_{m=1}^{s_k} \frac{\tau+\varepsilon}{s_{k,l} - m} = \sum_{s=s_{k,l}-s_k}^{s_{k,l}-1} \frac{\tau+\varepsilon}{s}, \tag{17}$$

где $s_{k,l} = \big[t_{k,l}(1-\delta_l)(\tau+\varepsilon)\big]$. Отметим, что в силу (12) при $l = \overline{1,p-1}$

$$s_{k,l} - s_k > t_{k,l}(1-\delta_l)(\tau+\varepsilon) - (\tau+\varepsilon)t_{k,l}\delta_l - 1 = (\tau+\varepsilon)(t_{k,l} - 2t_{k,l}\delta_l) - 1 =$$

$$= (\tau+\varepsilon)\left(\left(1 - \frac{(l-1)\delta}{p}\right)t_k - 2\frac{\delta t_k}{p}\right) - 1 =$$

$$= (\tau+\varepsilon)\left(\left(1 - \frac{((l+1)-1)\delta}{p}\right)t_k - \frac{\delta t_k}{p}\right) - 1 = (\tau+\varepsilon)\left(\alpha_{l+1}t_k - \frac{\alpha_{l+1}\delta t_k}{\alpha_{l+1}p}\right) - 1 =$$

$$= (\tau+\varepsilon)(t_{k,l+1} - t_{k,l+1}\delta_{l+1}) - 1 = t_{k,l+1}(1-\delta_{l+1})(\tau+\varepsilon) - 1 \geqslant s_{k,l+1} - 1.$$

Отметим еще, что в силу выбора числа p верно неравенство $s_{k,p} - s_k \geqslant 0$. При этом $s_{k,p} - s_k > 0$ для всех достаточно больших номеров k.

Таким образом, с учетом (15) и (17) получаем:

$$\lambda(t_k) - \lambda(t_k(1-\delta)) \leqslant \sum_{l=1}^{p} \sum_{s=s_{k,l}-s_k}^{s_{k,l}-1} \frac{\tau+\varepsilon}{s} \leqslant \sum_{s=s_{k,p}-s_k}^{s_{k,1}-1} \frac{\tau+\varepsilon}{s}, \quad k \geqslant k(\varepsilon).$$

Поскольку для любого натурального $l \geqslant 1$ справедливо равенство (формула Эйлера)

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{1}{s} = \ln l + \gamma + \alpha(l),$$

где γ — постоянная Эйлера и $\alpha(l) \to 0$ при $l \to \infty$, то из предыдущего получаем:

$$\lambda(t_k) - \lambda(t_k(1-\delta)) \leqslant (\tau+\varepsilon) \ln \frac{s_{k,1}-1}{s_{k,p}-s_k} + \tilde{\alpha}(k), \quad k \geqslant k(\varepsilon), \tag{18}$$

где $\tilde{\alpha}(k) \to 0, k \to \infty$. Найдем оценку сверху для выражения, стоящего под знаком логарифма:

$$\frac{s_{k,1}-1}{s_{k,p}-s_k} \leqslant \frac{t_{k,1}(1-\delta_1)(\tau+\varepsilon)-1}{t_{k,p}(1-\delta_p)(\tau+\varepsilon)-(\tau+\varepsilon)t_{k,p}\delta_p-2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{t_k(1-\delta/p)(\tau+\varepsilon)}{t_{k,p}(1-2\delta_p)(\tau+\varepsilon)-2} \leqslant \frac{t_k(\tau+\varepsilon)}{t_{k,p}(\tau+\varepsilon)-2(1+t_k\delta/p)} =$$
$$= \frac{t_k(\tau+\varepsilon)}{(1-\delta)t_k(\tau+\varepsilon)+t_k\delta/p-2(1+t_k\delta/p)} \leqslant \frac{t_k(\tau+\varepsilon)}{(1-\delta)t_k(\tau+\varepsilon)-2(1+t_k\delta/p)} =$$
$$= \frac{1}{1-\delta}\left(1-\frac{2(1+t_k\delta/p)}{(1-\delta)t_k(\tau+\varepsilon)}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\delta}(1-c_k(p))^{-1}.$$

Отсюда с учетом (14) и (18) получаем

$$\bar{L}(\Lambda,\delta) \leqslant (\tau+\varepsilon) \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1-\delta)+\ln(1-c_k(p))}{\ln(1-\delta)} = \tau+\varepsilon+\frac{\ln(1-c(p))}{\ln(1-\delta)},$$

где

$$c(p) = \lim_{k\to\infty} c_k(p) = \frac{\delta/p}{(1-\delta)(\tau+\varepsilon)} \to 0, \quad p \to \infty.$$

Поскольку натуральное число p можно выбрать сколь угодно большим, а $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, то в силу предыдущего имеем: $\bar{L}(\Lambda,\delta) \leqslant \tau$. Лемма доказана.

Непосредственно из теоремы 1 и леммы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \sup_{\delta\in(0;1)} \bar{L}(\Lambda,\delta). \tag{19}$$

Выясним теперь условия, при которых справедливо равенство $\bar{n}_0(\Lambda) = \bar{L}(\Lambda)$. Пусть $\delta \in (0;1)$ и $\bar{n}_0(\Lambda,\delta) = \tau < +\infty$. Согласно определению величины $\bar{n}_0(\Lambda,\delta)$ существует возрастающая последовательность $0 < t_k \to \infty, k \to \infty$ такая, что

$$\tau = \bar{n}_0(\Lambda,\delta) = \lim_{k\to\infty} \frac{n(t_k)-n(t_k(1-\delta))}{\delta t_k}. \tag{20}$$

Оказывается, что при условии (20) точки последовательности Λ обладают некоторой равномерностью в распределении на полуинтервалах $(t_k(1-\delta), t_k]$, если дополнительно $\bar{n}_0(\Lambda,\alpha) = \tau,\ 0 < \alpha < \delta$. Более точно смысл этой равномерности раскрывается в следующем утверждении.

Лемма 5. *Пусть $\tau \geqslant 0$, $\delta \in (0;1)$ и натуральное число p удовлетворяет условию $\delta/((1-\delta)p) < 1$. Предположим, что $\bar{n}_0(\Lambda,\alpha) = \tau$, $\alpha \in (0;\delta]$, и выполнено (20) и (12). Тогда для любого $l = \overline{1,p}$ предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n(t_{k,l})-n(t_{k,l}(1-\delta_l))}{\delta_l t_{k,l}} \tag{21}$$

существует и равен τ.

Доказательство. По условию $\bar{n}_0(\Lambda,\alpha) = \tau,\ \alpha \in (0;\delta]$. Поскольку $\delta_l \leqslant \delta$, то из определения величины $\bar{n}_0(\Lambda,\delta_l)$ получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n(t_{k,l})-n(t_{k,l}(1-\delta_l))}{\delta_l t_{k,l}} \leqslant \bar{n}_0(\Lambda,\delta_l) \leqslant \tau, \quad l = \overline{1,p}. \tag{22}$$

Предположим, что существует номер l_0, для которого

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{n(t_{k,l_0}) - n(t_{k,l_0}(1-\delta_{l_0}))}{t_{k,l_0}\delta_{l_0}} < \tau. \tag{23}$$

Пусть $k_i,\ i\in\mathbb{N}$ — подпоследовательность натуральных чисел, реализующая нижний предел из (23). Тогда в силу (20) имеем:

$$\tau = \lim_{i\to\infty} \frac{n(t_{k_i}) - n(t_{k_i}(1-\delta))}{t_{k_i}\delta} =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{t_{k_i}\delta}\left(n(t_{k_i,l_0}) - n(t_{k_i,l_0}(1-\delta_{l_0})) + \sum_{l=1, l\neq l_0}^{p} \Big(n(t_{k_i,l}) - n(t_{k_i,l}(1-\delta_l))\Big)\right).$$

В силу выбора подпоследовательности k_i предел

$$\lim_{i\to\infty}\Big(\big(n(t_{k_i,l_0}) - n(t_{k_i,l_0}(1-\delta_{l_0}))\big)/\delta t_{k_i}\Big)$$

существует. Следовательно, существует также и предел по $i\to\infty$ выражения

$$\frac{1}{t_{k_i}\delta}\sum_{l=1, l\neq l_0}^{p}\Big(n(t_{k_i,l}) - n(t_{k_i,l}(1-\delta_l))\Big).$$

Поэтому из предыдущего с учетом (12), (22) и (23) имеем:

$$\tau = \lim_{i\to\infty} \frac{n(t_{k_i,l_0}) - n(t_{k_i,l_0}(1-\delta_{l_0}))}{t_{k_i}\delta} + \lim_{i\to\infty}\sum_{l=1, l\neq l_0}^{p} \frac{n(t_{k_i,l}) - n(t_{k_i,l}(1-\delta_l))}{t_{k_i}\delta} =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{n(t_{k_i,l_0}) - n(t_{k_i,l_0}(1-\delta_{l_0}))}{t_{k_i,l_0}\delta_{l_0}}\frac{t_{k_i,l_0}\delta_{l_0}}{t_{k_i}\delta} +$$

$$+ \lim_{i\to\infty}\sum_{l=1, l\neq l_0}^{p} \frac{n(t_{k_i,l}) - n(t_{k_i,l}(1-\delta_l))}{t_{k_i,l}\delta_l}\frac{t_{k_i,l}\delta_l}{t_{k_i}\delta} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\lim_{i\to\infty} \frac{n(t_{k_i,l_0}) - n(t_{k_i,l_0}(1-\delta_{l_0}))}{t_{k_i,l_0}\delta_{l_0}} + \lim_{i\to\infty}\sum_{l=1, l\neq l_0}^{p} \frac{n(t_{k_i,l}) - n(t_{k_i,l}(1-\delta_l))}{t_{k_i,l}\delta_l}\right) <$$

$$< \frac{\tau}{p} + \frac{(p-1)\tau}{p} = \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, (23) неверно, т.е.

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{n(t_{k,l_0}) - n(t_{k,l_0}(1-\delta_{l_0}))}{t_{k,l_0}\delta_{l_0}} \geqslant \tau.$$

Отсюда с учетом (22) следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Пусть $\bar{n}(\Lambda) = \bar{n}_0(\Lambda) = \tau < +\infty$. Тогда для любого $\delta\in(0;1)$ справедливо неравенство $\bar{L}(\Lambda,\delta)\geqslant\tau$.*

Доказательство. Из условия теоремы и леммы 1 следует равенство $\bar{n}_0(\Lambda,\alpha)=\tau$, если $\alpha\in(0;1)$. Пусть $\delta\in(0;1)$, $\varepsilon>0$, натуральное число p удовлетворяет условию $\delta/((1-\delta)p)<1$ и выполнено (12). Согласно определению величины $\bar{n}_0(\Lambda,\delta)$ существует последовательность $t_k,\ k\in\mathbb{N}$ такая, что верно (20). Тогда по лемме 5 для любого $l=\overline{1,p}$ предел (21) существует и равен τ. Следовательно, найдётся номер $k(\varepsilon)$ такой, что

$$n(t_{k,l}) - n(t_{k,l}(1-\delta_l)) > (\tau-\varepsilon)\delta_l t_{k,l},\quad l=\overline{1,p},\quad k\geqslant k(\varepsilon). \tag{24}$$

Пусть $k \geqslant k(\varepsilon)$ и $l = \overline{1,p}$. Если $t_{k,l}(1-\delta_l) < \lambda_n \leqslant t_{k,l}$, то

$$\frac{1}{\lambda_n} \geqslant \frac{1}{t_{k,l}+m\beta}, \quad m = \overline{1,s_k},$$

где $\beta = 1/(\tau-\varepsilon)$ и $s_k = \big[(\tau-\varepsilon)t_{k,l}\delta_l\big] = \big[((\tau-\varepsilon)\delta t_k)/p\big]$. Следовательно, с учетом (24) получаем:

$$\lambda\big(t_{k,l}\big) - \lambda\big(t_{k,l}(1-\delta_l)\big) = \sum_{t_{k,l}(1-\delta_l)<\lambda_n\leqslant t_{k,l}} \frac{m_n}{\lambda_n} \geqslant \sum_{m=1}^{s_k} \frac{1}{t_{k,l}+m\beta} =$$

$$= \sum_{m=1}^{s_k} \frac{\tau-\varepsilon}{t_{k,l}(\tau-\varepsilon)+m} \geqslant \sum_{m=1}^{s_k} \frac{\tau-\varepsilon}{s_{k,l}+1+m} = \sum_{s=s_{k,l}+2}^{s_{k,l}+s_k+1} \frac{\tau-\varepsilon}{s}, \tag{25}$$

где $s_{k,l} = \big[t_{k,l}(\tau-\varepsilon)\big]$. Отметим, что в силу (12)

$$s_{k,l} \leqslant t_{k,l}(\tau-\varepsilon) = (\tau-\varepsilon)\left(1-\frac{(l-1)\delta}{p}\right)t_k =$$

$$= (\tau-\varepsilon)\left(\left(1-\frac{((l+1)-1)\delta}{p}\right)t_k + \frac{\delta t_k}{p}\right) = (\tau-\varepsilon)\left(\alpha_{l+1}t_k + \frac{\delta t_k}{p}\right) - 1 =$$

$$= (\tau-\varepsilon)(t_{k,l+1} + t_{k,l+1}\delta_{l+1}) \leqslant s_{k,l+1} + s_k + 2.$$

Таким образом, с учетом (15) и (25) имеем:

$$\lambda(t_k) - \lambda(t_k(1-\delta)) \geqslant \sum_{l=1}^{p} \sum_{s=s_{k,l}+2}^{s_{k,l}+s_k+1} \frac{\tau-\varepsilon}{s} \geqslant \sum_{s=s_{k,p}+2}^{s_{k,1}+s_k+1} \frac{\tau-\varepsilon}{s} -$$

$$-\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{1}{s_{k,l}} + \frac{1}{s_{k,1}+1}\right) \geqslant \sum_{s=s_{k,p}+2}^{s_{k,1}+s_k+1} \frac{\tau-\varepsilon}{s} - \frac{2p}{t_k(1-\delta)(\tau-\varepsilon)}, \quad k \geqslant k(\varepsilon).$$

Отсюда с учетом формулы Эйлера получаем:

$$\lambda(t_k) - \lambda(t_k(1-\delta)) \geqslant (\tau-\varepsilon)\ln\frac{s_{k,1}+s_k+1}{s_{k,p}+2} -$$

$$-\frac{2p}{t_k(1-\delta)(\tau-\varepsilon)} + \tilde{\alpha}(k), \quad k \geqslant k(\varepsilon), \tag{26}$$

где $\tilde{\alpha}(k) \to 0, k \to \infty$. Найдем оценку снизу для выражения, стоящего под знаком логарифма:

$$\frac{s_{k,l}+s_k+1}{s_{k,l}+2} \geqslant \frac{t_{k,1}(\tau-\varepsilon)+(\tau-\varepsilon)\delta t_k/p-1}{t_{k,p}(\tau-\varepsilon)+2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{t_k(\tau-\varepsilon)-1}{t_k(1-\delta)(\tau-\varepsilon)+(\tau-\varepsilon)\delta t_k/p+2} = c_k(p).$$

Отсюда с учетом определения величины $\bar{L}(\Lambda,\delta)$ и (26) получаем

$$\bar{L}(\Lambda,\delta) \geqslant (\tau-\varepsilon)\lim_{k\to\infty}\frac{c_k(p)}{-\ln(1-\delta)} = (\tau-\varepsilon)\frac{\ln c(p)}{-\ln(1-\delta)},$$

где

$$c(p) = \lim_{k\to\infty} c_k(p) = \lim_{k\to\infty}\frac{t_k(\tau-\varepsilon)-1}{t_k(1-\delta)(\tau-\varepsilon)+(\tau-\varepsilon)\delta t_k/p+2} =$$

$$= \frac{1}{(1-\delta)+\delta/p} \to \frac{1}{1-\delta}, \quad p \to \infty.$$

Поскольку натуральное число p можно выбрать сколь угодно большим, а $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, то в силу предыдущего имеем: $\bar{L}(\Lambda,\delta) \geqslant \tau$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < +\infty$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) $\bar{n}_0(\Lambda, \delta) = \tau,\ \delta \in (0;1)$;
2) $\bar{n}(\Lambda) = \tau$;
3) $\bar{L}(\Lambda, \delta) = \tau,\ \delta \in (0;1)$;
4) $\bar{L}(\Lambda, \delta) = \tau$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из леммы 2.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $\bar{n}(\Lambda) = \tau$. Тогда согласно условию теоремы и лемме 6 имеет место неравенство $\bar{L}(\Lambda, \delta) \geqslant \tau,\ \delta \in (0;1)$. Кроме того, из условия и леммы 4 следует также неравенство $\bar{L}(\Lambda, \delta) \leqslant \tau,\ \delta \in (0;1)$. Таким образом, $\bar{L}(\Lambda, \delta) = \tau,\ \delta \in (0;1)$.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) вытекает из формул (2) и (3).

Наконец, по лемме 1 с учетом условия теоремы получаем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что при выполнении хотя бы одного из соотношений $\bar{n}_0(\Lambda) = \bar{n}(\Lambda) < +\infty$ и $\bar{n}_0(\Lambda) = \bar{L}(\Lambda) < +\infty$ верны равенства $\bar{n}_0(\Lambda) = \bar{n}(\Lambda) = \bar{L}(\Lambda)$. Естественным образом возникает следующий вопрос. Являются ли последние равенства следствием соотношения $\bar{n}(\Lambda) = \bar{L}(\Lambda) < +\infty$. Ответ на этот вопрос отрицательный. Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $0 < R_k \to \infty$ и $R_{k+1}/R_k \to \infty, k \to \infty$. Положим $\Lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\Lambda_k \cup \tilde{\Lambda}_k\right)$, где Λ_k — множество, состоящее из всех натуральных чисел, принадлежащих интервалу $(R_{2k}; R_{2k+1})$, кратность каждого из которых равна единице, и $\tilde{\Lambda}_k = \{R_{2k+2}, p_k\}$, где $p_k = \left[R_{2k+2}\right] - \left[R_{2k+1}\right], k \in \mathbb{N}$ — кратность числа R_{2k+2}. В силу выбора чисел R_k имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n(R_{2k+1}, \Lambda)}{R_{2k+1}} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{R_{2k+1} - R_{2k}}{R_{2k+1}} = 1.$$

Отметим, что по построению $n(t, \Lambda) \leqslant t, t > 0$. Поэтому

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t} \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t} = 1.$$

Следовательно, $\bar{n}(\Lambda) = 1$. Пусть $\delta \in (0;1)$. По формуле Эйлера получаем:

$$\bar{L}(\Lambda, \delta) \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(R_{2k+1}) - \lambda(R_{2k+1}(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left[R_{2k+1}\right] - \ln\left[R_{2k+1}(1-\delta) + 1\right]}{-\ln(1-\delta)} = \lim_{k\to\infty} \frac{-\ln(1-\delta)}{-\ln(1-\delta)} = 1.$$

Отсюда с учетом леммы 1 и формулы (2) следует равенство $\bar{L}(\Lambda) = \bar{n}(\Lambda)$. В тоже время имеем:

$$\bar{n}_0(\Lambda, \delta) = \lim_{k\to\infty} \frac{n(R_{2k+2}, \Lambda) - n(R_{2k+2}(1-\delta), \Lambda)}{\delta R_{2k+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left[R_{2k+2}\right] - \left[R_{2k+1}\right]}{\delta R_{2k+2}} = \frac{1}{\delta}.$$

Таким образом,

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to0+} \bar{n}_0(\Lambda, \delta) \lim_{\delta\to0+} \frac{1}{\delta} = +\infty.$$

Применим теперь полученные результаты к проблеме полноты системы экспоненциальных мономов с положительными показателями в выпуклых областях комплексной плоскости.

Напомним, что целая функция f называется *целой функцией экспоненциального типа*, если для некоторых положительных констант A, B (зависящих от f) и для любого $z \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство $\ln|f(z)| \leqslant A|z| + B$. Её *индикатором (верхним индикатором)* называется функция

$$h_f(\phi) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}, \quad \varphi \in (-\pi; \pi].$$

По теореме Полиа (см., напр., [10], гл. I, §5, теорема 5.4) индикатор совпадает с опорной функцией $H_K(\varphi)$ некоторого выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}$, называемого *индикаторной диаграммой* функции f ([10], гл. I, §5):

$$h_f(\varphi) = H_K(\varphi) = \sup_{z\in K} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}). \tag{27}$$

Компакт, комплексно сопряжённый к компакту K, называется *сопряжённой диаграммой* функции f.

Пусть D — выпуклая область. По теореме Хана-Банаха система $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^k e^{\lambda_n z}\}_{n=1,k=1}^{\infty,m_n}$ не полна в пространстве $H(D)$ тогда и только тогда, когда существует ненулевой линейный непрерывный функционал $\nu \in H^*(D)$, который обращается в нуль на элементах этой системы.

Пусть P_D — пространство целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в D. Оно наделяется стандартной топологией индуктивного предела (см., напр., [9], гл. III, §12, п.7). Преобразование Лапласа $f(\lambda) = \nu(\exp(\lambda z)), \nu \in H^*(D)$, устанавливает изоморфизм (см., напр., [9], гл. III, §12, теоремы 12.3 и 12.13) линейных топологических пространств $H^*(D)$ и P_D.

Таким образом, неполнота $\mathcal{E}(\Lambda)$ в области D равносильна существованию функции $0 \neq f \in P_D$, которая обращается в нуль в точках λ_n с кратностью не меньшей чем $m_n, n \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, то выпуклая область D *вертикально сбалансирована*, если

$$H_D\left(-\frac{\pi}{2}\right) + H_D\left(\frac{\pi}{2}\right) = d(D),$$

где H_D — опорная функция области D и $d(D)$ — её вертикальный диаметр. Нетрудно показать, что вертикально сбалансированными будут, например, области, которые имеют вертикальную или горизонтальную ось симметрии.

Следующее утверждение является обобщением указанного в начале работы результата А.Ф. Леонтьева и Б.Я. Левина для вертикально сбалансированных выпуклых областей.

Теорема 4. *Пусть $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < +\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\bar{n}(\Lambda) = \tau$;

2) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в любой выпуклой области D с вертикальным диаметром $d(D) > 2\pi\tau$, и полна в любой вертикально сбалансированной выпуклой области D с вертикальным диаметром $d(D) \leqslant 2\pi\tau$.

Доказательство. Пусть последовательность Λ имеет конечную максимальную плотность τ. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Так как $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$, то по лемме 2.1 из работы [11] (см. также [12], лемма 5) существует измеримая последовательность $\Lambda' = \{\mu_k, p_k\}_{k=1}^{\infty}$ с плотностью τ такая, что справедливы соотношения

$$\mu_{k_n} = \lambda_n, \quad m_n \leqslant p_{k_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая подпоследовательность натуральных чисел. Поскольку аргументы членов последовательности не влияют на ее плотность, то можно считать, что $\mu_k > 0, k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right)^{p_k}.$$

Она обращается в нуль в точках μ_k с кратностью $p_k, k \geqslant 1$ (в частности, в точках λ_n с кратностью не меньшей чем $m_n, n \geqslant 1$). Поскольку Λ' имеет плотность τ, то (см. [10], гл. I, §5, теорема 5.9, [5], гл. II, §1, теорема 2) $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором $h_f(\varphi) = \pi\tau|\sin\varphi|$. Он совпадает с опорной функцией $H_K(\varphi)$ отрезка мнимой оси $[-i\pi\tau; i\pi\tau]$. Следовательно, этот отрезок является индикаторной диаграммой (а, значит, и сопряженной диаграммой) функции f.

Пусть D — выпуклая область с вертикальным диаметром $d(D) > 2\pi\tau$. Тогда в области D найдутся точки $z_1 = x_0 + iy_1$ и $z_2 = x_0 + iy_2$ такие, что

$$|z_2 - z_1| = |y_2 - y_1| = 2\pi\tau.$$

Таким образом, область D содержит вертикальный отрезок $[z_1, z_2]$ длины $2\pi\tau$. Положим $\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda)e^{z_0\lambda}$, где $z_0 = (z_2 - z_1)/2$. Легко заметить, что индикаторная диаграмма этой функции совпадает с отрезком $[\bar{z}_1; \bar{z}_2]$ комплексно сопряженным к отрезку $[z_1; z_2]$. Поэтому сопряженная диаграмма этой функции совпадает с отрезком $[z_1, z_2]$, т.е. $\tilde{f} \in P_D$. Следовательно, согласно сказанному выше система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в области D. Это доказывает первую часть утверждения 2).

Докажем теперь вторую часть. Пусть D — вертикально сбалансированная выпуклая область с вертикальным диаметром $d(D) \leqslant 2\pi\tau$. Так как $\bar{n}(\Lambda) = \bar{n}_0(\Lambda) = \tau$, то в силу теоремы 3 справедливо равенство $\bar{L}(\Lambda) = \tau$.

Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в области D. Тогда существует функция $0 \neq f \in P_D$, которая обращается в нуль в точках λ_n с кратностью не меньшей чем $m_n, n \geqslant 1$. Её сопряженная диаграмма K лежит в области D, т.е. верно неравенство $H_K(\varphi) < H_D(\varphi), \varphi \in (-\pi; \pi]$. Поэтому с учетом вертикальной сбалансированности D получаем:

$$H_K\left(-\frac{\pi}{2}\right) + H_K\left(\frac{\pi}{2}\right) < H_D\left(-\frac{\pi}{2}\right) + H_D\left(\frac{\pi}{2}\right) = d(D) \leqslant 2\pi\tau. \tag{28}$$

Положим

$$y_0 = -\frac{1}{2}\left(H_K\left(\frac{\pi}{2}\right) - H_K\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \tilde{f}(z) = f(z)e^{iy_0 z}.$$

Пусть $\tilde{K}$ сопряженная диаграмма функции $\tilde{f}$. В силу выбора числа y_0 имеем:

$$H_{\tilde{K}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = H_{\tilde{K}}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, с учетом (28) получаем:

$$H_{\tilde{K}}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \pi\tau.$$

Это же неравенство верно, очевидно, и для индикаторной диаграммы функции $\tilde{f}$. Поэтому в силу (27)

$$h_{\tilde{f}}\left(\mp\frac{\pi}{2}\right) < \pi\tau.$$

Тогда по теореме 6.2 из работы [1] должно выполняться неравенство $\bar{L}(\Lambda) < \tau$. Получили противоречие. Таким образом, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в области D.

Теперь докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). В силу теоремы 3 достаточно доказать, что $\bar{L}(\Lambda) = \tau$. Предположим, что $\bar{L}(\Lambda) < \tau$. Тогда по теореме 6.2 работы [1] существует $f \neq 0$ — целая функция экспоненциального типа, обращающаяся в нуль в точках λ_n с кратностью не меньшей чем $m_n,\ n \geqslant 1$, и такая, что

$$h_f\left(\mp\frac{\pi}{2}\right) < \pi\tau.$$

Следовательно, индикаторная диаграмма функции f (а вместе с ней и ее сопряженная диаграмма) лежит в полосе $D = \{z : |\mathrm{Im} z| < \pi\tau\}$. Это означает, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в ней. Получили противоречие с утверждением 2), т.к. выпуклая область D является вертикально сбалансированной и имеет вертикальный диаметр $d(D) = 2\pi\tau$. Таким образом, наше предположение неверно, т.е. выполнено неравенство $\bar{L}(\Lambda) \geqslant \tau$. Остается заметить, что по лемме 1 имеем: $\bar{L}(\Lambda) \leqslant \bar{n}_0(\Lambda) = \tau$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что согласно замечанию 1 к лемме 1 для измеримой последовательности Λ всегда выполнено равенство $\bar{n}(\Lambda) = \bar{n}_0(\Lambda)$. Обратное неверно. Приведем соответствующий пример. Пусть $0 < R_k \to \infty, k \to \infty$, и $R_{k+1}/R_k \to \infty, k \to \infty$. Положим

$\Lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Lambda_k$, где Λ_k — множество, состоящее из всех натуральных чисел, принадлежащих интервалу $(R_{2k}; R_{2k+1}), k \in \mathbb{N}$, кратность каждого из которых равна единице. В силу выбора чисел R_k имеем:

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{n(t,\Lambda)}{t} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{n(R_{2k+1},\Lambda)}{R_{2k+1}} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{R_{2k+1}-R_{2k}}{R_{2k+1}} = 1.$$

Пусть $\delta \in (0;1)$. Тогда

$$\bar{n}_0(\Lambda,\delta) = \lim_{k\to\infty} \frac{n(R_{2k+1},\Lambda) - n(R_{2k+1}(1-\delta),\Lambda)}{\delta R_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta R_{2k+1}}{\delta R_{2k+1}} = 1.$$

Отсюда с учетом предыдущего и леммы 1 получаем: $\bar{n}_0(\Lambda) = \bar{n}(\Lambda)$. В то же время имеем:

$$\underline{n}(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{n(R_{2k},\Lambda)}{R_{2k}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{R_{2k-1}}{R_{2k}} = 0.$$

Таким образом, $\underline{n}(\Lambda) < \bar{n}(\Lambda)$, т.е. последовательность Λ не имеет плотности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Malliavin, L.A. Rubel *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bull. Soc. Math. France, 89 (1961). P. 175–201.
2. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 5. С. 706–719.
3. Абдулнагимов А.И., Кривошеев А.С. *Правильно распределенные подпоследовательности на прямой* // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, № 1. С. 3–12.
4. Леонтьев А.Ф. *О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе* // Матем. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 555–568.
5. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
6. G. Polya *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* // Math. Zeitschr. 1929. V. 29. P. 549–640.
7. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge University Press, 1997.
8. Абдулнагимов А.И., Кривошеев А.С. *Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости* // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 4. С. 1–46.
9. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука, 1982.
10. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
11. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 684–697.
12. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, № 3. С. 96–120.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Арсен Фанилевич Кужаев,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: arsenkuzh@outlook.com