

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ ФУНКЦИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ $A^\infty(D)$

К.П. ИСАЕВ, К.В. ТРУНОВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, $M_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ — выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию “неквазианалитичности”:

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

$M_k = (M_{n+k})_{n=1}^\infty$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — последовательности, полученные из исходных удалением k первых членов. Далее, для каждой последовательности $M_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ мы рассматриваем Банахово пространство $H(M_0, D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области D функций с нормой

$$\|f\|^2 = \sup_n \frac{1}{M_n^2} \sup_{z \in D} |f^{(n)}(z)|^2.$$

В работе изучаются локально выпуклые подпространства в пространстве аналитических функций в D , бесконечно дифференцируемых в \bar{D} , которые получаются как индуктивный предел пространств $H(M_k, D)$. Доказано, что для любой выпуклой области существует система экспонент $e^{\lambda_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, такая что любая функция из индуктивного предела $f \in \lim ind H(M_k, D) := \mathcal{H}(M_0, D)$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент, причем ряд сходится в топологии $\mathcal{H}(M_0, D)$. Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Характеристические функции L , имеющие более точные асимптотические оценки, позволяют представлять аналитические функции посредством ряда из экспонент в пространствах с более тонкой топологией. В работе построены целые функции с тонкими асимптотическими оценками. Дополнительно получены оценки снизу производных этих функций в нулях.

Ключевые слова: аналитические функции, целые функции, субгармонические функции, ряды экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D20, 30D60

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются подпространства $A \subset A^\infty(D) = H(D) \cap C^\infty(\bar{D})$ для ограниченной выпуклой области D на плоскости на предмет представления функций $f \in A$ из этих подпространств рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

сходящихся в топологии подпространства A . В классической теории рядов экспонент, подробно изложенной в монографии [1] А.Ф. Леонтьева, одной из основных теорем является

К.Р. ISAEV, К.В. TROUNOV, R.S. YULMUKHAMETOV, REPRESENTATION OF FUNCTIONS IN LOCALLY CONVEX SUBSPACES OF $A^\infty(D)$ BY SERIES OF EXPONENTIALS.

© 2016 ИСАЕВ К.П., ТРУНОВ К.В., ЮЛМУХАМЕТОВ Р.С. .

Поступила 1 июня 2017 г.

теорема о представлении рядами экспонент в $H(D)$ с топологией равномерной сходимости на компактах из D (Теорема 5.3.2., стр. 382 в [1]):

Теорема А. Пусть D — ограниченная выпуклая область. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D , такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D , можно в D разложить в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Например, в доказательстве теоремы А показатели $\{\lambda_n\}$ выбираются как простые нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста со свойством: при любом $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda) + \varepsilon|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n) - \varepsilon|\lambda_n|}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

здесь $H_D(\lambda) = \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re} \lambda \bar{z}$ — опорная функция области D . В связи с этим обстоятельством в теории представления рядами экспонент обособленное место занимали выпуклые многоугольники. Дело в том, что характеристическую целую функцию L в этом случае можно взять в виде квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_j a_j e^{\gamma_j \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

здесь γ_j — вершины многоугольника, и требуемое свойство (1) будет выполняться в существенно более точном виде

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

С помощью таких целых функций в [1] (стр. 328, Теорема 4.7.4.) доказано, что функция, аналитическая в многоугольнике D и непрерывная вместе со своей первой производной в \bar{D} , может быть представлена в виде ряда по системе $e^{\lambda_n z}$, причем этот ряд сходится всюду в \bar{D} и равномерно сходится в $\bar{D} \setminus \bigcup B(\gamma_j, \varepsilon)$, здесь γ_j — вершины многоугольника и $\varepsilon > 0$ — произвольное. В работе [2] доказано, что эта система образует (безусловный) базис в пространстве Смирнова $E_2(D)$.

Теорема В. Пусть функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n удовлетворяет условиям

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |L(\lambda)| \succ e^{H_D(\lambda)}, \quad z \notin \bigcup_n B(\lambda_n, \delta),$$

причем круги $B(\lambda_n, \delta)$ попарно не пересекаются. Тогда любая функция $f \in E_2(D)$ единственным образом представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_n f_n e^{\lambda_n z},$$

и при этом выполняется соотношение

$$\|f\|^2 \asymp \sum_n |f_n|^2 e^{-2H_D(\lambda_n)}, \quad f \in E_2(D).$$

Таким образом, характеристические функции L , имеющие более точные асимптотические оценки, позволяют представлять аналитические функции посредством ряда из экспонент в пространствах с более тонкой топологией.

Задача о существовании и конструировании целых функций с заданными асимптотическими свойствами возникла как внутренняя задача теории целых функций. В наиболее общем виде такая задача решена в работе [3]:

Теорема С. Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный тип при порядке $\rho > 0$, существует целая функция f , удовлетворяющая соотношению

$$|u(\lambda) - \ln |f(\lambda)|| = o(|\lambda|^\rho), \lambda \notin E, |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Исключительное множество E является C_0 -множеством, то есть оно может быть покрыто кругами $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k| \leq R} r_k = o(R), R \rightarrow \infty.$$

В работе [4] эта теорема уточнена в смысле оценок разности и размеров исключительного множества.

Теорема Д. Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный порядок роста, существует целая функция f , удовлетворяющая соотношению

$$|u(\lambda) - \ln |f(\lambda)|| = O(\ln(|\lambda| + 1)), \lambda \notin E, |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Для любого $\beta > 0$ исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k| \geq R} r_k = O(R^{-\beta}), R \rightarrow \infty.$$

Теоремы С и Д не могут быть непосредственно применены в вопросах разложения в ряды экспонент. Дополнительно нужно получить нижние оценки для $|L'(\lambda_k)|$, а для этого нужно иметь не только оценки размеров исключительного множества, но в большей степени нужна информация о структуре этого множества.

В данной работе будет доказана теорема.

Теорема 1. Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста ρ , μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых $a, \alpha > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие

$$\mu(B(z, t)) \leq a(|z| + 1)^\alpha t, t \in (0; (|z| + 1)^{-\alpha}), \quad (3)$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n такими, что при некоторых $\delta, \beta > 0$ круги $B_n = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n| + 1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторых постоянных A, B, C удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \ln |f(\lambda)| &\leq u(\lambda) + A_1 \ln(|\lambda| + 1), \lambda \in \mathbb{C}, \\ \ln |f(\lambda)| &\geq u(\lambda) - A_2 \ln(|\lambda| + 1), \lambda \notin \bigcup_n B_n, \\ \ln |f'(\lambda_n)| &\geq u(\lambda_n) - A_3 \ln(|\lambda_n| + 1), n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Постоянные A_1, A_2, A_3 зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функции u .

Далее, для каждой последовательности $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ мы рассмотрим Банахово пространство $H(\mathcal{M}_0, D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области D функций с нормой

$$\|f\|^2 = \sup_n \frac{1}{M_n^2} \sup_{z \in D} |f^{(n)}(z)|^2.$$

Пусть

$$T_k(r) = \sup_n \frac{r^n}{M_{n+k}}, k = 0, 1, 2, \dots -$$

— функции следа "сдвинутых" последовательностей $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=1}^\infty$. Через $P_k(D)$ обозначим банаховы пространства целых функций F с нормой

$$\|F\|^2 = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|^2 e^{-2H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)},$$

а через $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$ проективный предел пространств P_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. В работе [5] показано (Теорема 1), что каждая функция $f \in H(\mathcal{M}_k, D)$, $k \in \mathbb{N}$, является преобразованием Фурье – Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, то есть

$$f(z) = S_\lambda(e^{\lambda z}), z \in D.$$

Используя этот факт и идею достаточных множеств мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ – выпуклая последовательность, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности"

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty.$$

Для любой выпуклой области существует система экспонент $e^{\lambda_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что любая функция из индуктивного предела

$$f \in \lim ind H(\mathcal{M}_k, D) := \mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$$

представляется в виде ряда по данной системе экспонент

$$f(z) = \sum_n f_n e^{\lambda_n z},$$

причем ряд сходится в топологии $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.

Такие системы в дальнейшем будем называть представляющими системами.

2. ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 представляет собой небольшую модификацию доказательства теоремы 4' из работы [4].

Лемма 1. Пусть u , $u(0) = 0$, субгармонична на всей плоскости и удовлетворяет условию

$$u(\lambda) \leq \sigma(|\lambda| + 1)^\rho, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Предположим, что ее ассоциированная мера удовлетворяет условию (3). Тогда существует субгармоническая функция $v \in C^\infty(\mathbb{C})$, удовлетворяющая условиям (3), (4) и

$$u(\lambda) \leq v(\lambda) \leq u(\lambda) + O(\ln(|\lambda| + 1)), \lambda \rightarrow \infty,$$

$$\Delta v(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^{3(\rho+\alpha)}), \lambda \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 1.

Из условия (4) по формуле Йенсена

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) d\varphi = \int_0^R \frac{\mu(t)}{t} dt$$

следует, что

$$\mu\left(\frac{R}{e}\right) \leq \sigma(R + 1)^\rho, R > 0,$$

или

$$\mu(R) \leq \sigma e^\rho (R + 1)^\rho, R > 0. \tag{5}$$

Разобьем отрезок $[2^{n-1}; 2^n]$ на $N_n = [\sigma e^\rho 2^{(n+1)(\rho+1)}] + 1$ ($[x]$ обозначает целую часть x) отрезков I_k равной длины. Тогда по принципу Дирихле найдется хотя бы одно кольцо $S_n := \{z = te^{i\varphi}, t \in I_{k_n}, \varphi \in [0; 2\pi]\}$, у которого μ – мера удовлетворяет оценке

$$\mu(S_n) \leq \frac{\mu(2^n)}{N_n} < 2^{-n}. \tag{6}$$

Ширину этих колец обозначим через h_n :

$$S_n = \{z : R_n \leq |z| < R_n + h_n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при этом

$$h_n \geq \frac{1}{8\sigma e^\rho} 2^{-(n+1)\rho}, \quad R_n \in [2^n; 2^{n+1}]. \quad (7)$$

Пусть

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu|_{S_n}$$

— сумма сужений меры μ на кольцо S_n . Из (6) следует, что $\nu(\mathbb{C}) \leq 1$. Отсюда и из условия (3) обычными в этих вопросах выкладками доказывается оценка

$$\pi(\lambda) := \int_{\mathbb{C}} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) = O(\ln(|\lambda| + 1)), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Функция $u_0(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$

- 1) субгармонична на всей плоскости, гармонична в кольцах S_n ;
- 2) ассоциированная мера μ_0 удовлетворяет условиям (3), (4);
- 3) удовлетворяет оценке

$$|u_0(\lambda) - u(\lambda)| = |\pi(\lambda)| = O(|\lambda| + 1), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Применим к функции u_0 процедуру регуляризации. Пусть $\alpha(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — неотрицательная, финитная функция с носителем в $[-1; 1]$, такая, что

$$\int_{\mathbb{C}} \alpha(|\lambda|) dm(\lambda) = 1,$$

где dm — плоская мера Лебега. Возьмем последовательность чисел

$$\delta_n = \min \left(\frac{h_n}{4}, 2^{-\alpha(n+2)} \right)$$

и положим

$$\alpha_n(\lambda) = \delta^{-2} \alpha(\delta^{-1}(\lambda - w)).$$

Тогда функции

$$u_n(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda - w) u_0(w) dm(w), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

обладают общими свойствами регуляризаций

- 1) субгармоничны, бесконечно дифференцируемы и

$$u_n(\lambda) \geq u_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и свойством, вытекающим из свойств u_0 ,

- 2) в кольце $\tilde{S} = \{\lambda : |\lambda| \in [R_n + \frac{h_n}{4}; R_n + \frac{3h_n}{4}]\}$ $u_n(\lambda) \equiv u_0(\lambda)$.

Определим функцию v следующим образом

$$v(\lambda) = u_n(\lambda), \quad |\lambda| \in \left[R_n + \frac{h_n}{4}; R_{n+1} + \frac{3h_{n+1}}{4} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу второго свойства функций u_n функция v "склеивается" в кольцах \tilde{S}_n в субгармоническую функцию, равную в кольцах \tilde{S} функции u_0 . Очевидно, что функция $v \in C^\infty(\mathbb{C})$ и удовлетворяет условиям (3), (4). Если λ лежит между кольцами \tilde{S}_n и \tilde{S}_{n+1} , то

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) = u_n(\lambda) - u_0(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (u_0(w) - u_0(\lambda)) \alpha_n(\lambda - w) dm(w).$$

Переходя к полярным координатам и пользуясь формулой Иенсена получим

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) = 2\pi \int_0^{\delta_n} \alpha_n(t) \left(\int_0^t \frac{\mu_0(\lambda, s)}{s} ds \right) t dt.$$

По определению $\delta_n \leq 2^{-\alpha(n+1)} \leq (|\lambda| + 1)^{-\alpha}$, и по свойству (3) имеем

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) \leq a \int_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda) dm(\lambda) = a.$$

Отсюда и из оценки (8) получим первое утверждение леммы 1. Оценим Δv . Если λ лежит между кольцами \tilde{S}_n и \tilde{S}_{n+1} , то рассматривая u_0 как обобщенную функцию получим

$$\begin{aligned} \Delta v(\lambda) &= \int \Delta_\lambda \alpha_n(\lambda - w) u_0(w) dm(w) = \int \Delta_w \alpha_n(\lambda - w) u_0(w) dm(w) = \\ &= \pi \int \alpha_n(\lambda - w) d\mu(w). \end{aligned}$$

Если $\alpha = \max_t \alpha(t)$, то с учетом (4) имеем

$$\Delta v(\lambda) \leq \delta_n^{-2} 2\mu(|\lambda| + 1) = O((|\lambda| + 1)^{3(\rho+\alpha)}).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть u — гладкая субгармоническая функция, μ — ассоциированная мера этой функции, которая удовлетворяет условиям (3), (4), и для некоторого β имеет место оценка

$$\Delta u(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^\beta), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Тогда существует субгармоническая функция \tilde{u} такая, что

$$|\tilde{u}(\lambda) - u(\lambda)| = O(|\lambda|), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

При этом ассоциированная мера $\tilde{\mu}$ функции \tilde{u} удовлетворяет условиям (3), (4). Кроме того, существуют меры μ_n и прямоугольники P_n , $n \in \mathbb{N}$ такие, что

- 1) $\sum_n \mu_n = \mu$;
- 2) внутренности выпуклых оболочек носителей мер μ_n попарно не пересекаются;
- 3) носитель меры μ_n лежит в P_n , $n \in \mathbb{N}$;
- 4) отношение длин сторон прямоугольника P_n лежит в интервале $[3^{-1}; 3]$;
- 5) каждая точка плоскости попадает не более чем в 4 прямоугольника P_n ;
- 6) если F_n — выпуклая оболочка носителя меры μ_n , то

$$\text{diam } F_n \leq 2\sqrt{2} \min_{\lambda \in F_n} |\lambda|.$$

- 7) Внутри носителей F_n функция \tilde{u} гладкая и выполняется оценка

$$\Delta \tilde{u}(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^\beta), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 2.

Пусть Q_n , $n \in \mathbb{N}$, — квадрат с центром в начале координат с длиной стороны 3^n и сторонами, параллельными осям координат. Тогда

$$Q_{n+1} \setminus Q_n = \bigcup_1^8 Q_{nj}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где Q_{nj} — квадраты, полученные сдвигом квадрата Q_n на векторы $(\pm 3^n, 0)$, $(0, \pm 3^n)$, $(\pm 3^n, \pm 3^n)$. Положим

$$\mu(Q_{nj}) := m_{nj} + q_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, 8, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q_{nj} = \{\mu(Q_{nj})\} \in [0; 1)$ — дробная часть $\mu(Q_{nj})$. Положим $q_n^+ = \sum_j q_{nj} \in [0; 8)$, $q_n^- = \sum_j (q_{nj} - 1) \in [-8; 0)$. Определим последовательность q_n следующим образом: положим $q_0 = \{\mu(Q_1)\}$, если q_j для $j \leq k-1$ определены, то при $\sum_{j \leq k-1} q_j \geq 0$, положим $q_k := q_k^-$, в противном случае $q_k := q_k^+$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n q_k \in (-8; 8), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Далее определим последовательность натуральных чисел N_0, N_{nj} , $j = 1, \dots, 8$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $N_0 = [\mu(Q_1)]$, если $q_n = q_n^-$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - (q_{nj} - 1)$, а если $q_n = q_n^+$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - q_{nj}$. Таким образом, либо $N_{nj} = m_{nj} + 1$, либо $N_{nj} = m_{nj}$. Сужение меры μ на квадрат Q_{nj} обозначим через μ_{nj} , $\mu_0 = \mu|_{Q_0}$ и положим $\tilde{\mu}_0 = \frac{N_0}{\mu(Q_0)}\mu_0$,

$$\tilde{\mu}_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj}, \quad j = 1, \dots, 8, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $\mu(Q_{nj}) = 0$, то $\tilde{\mu}_{nj} = 0$. Тогда $\tilde{\mu}_{nj}(\mathbb{C}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа, и если положим $\nu_{nj} = \mu_{nj} - \tilde{\mu}_{nj}$, то

$$\nu_{nj}(\mathbb{C}) \in (-1; 1), \quad \left(\sum_{j=1}^8 \nu_{nj} \right) (\mathbb{C}) \in (-8; 8).$$

Пусть $\nu = \nu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \nu_{nj}$,

$$\nu^+ = \nu_0 + \sum_{q_n=q_n^+} \sum_{j=1}^8 \nu_{nj}, \quad \nu^- = - \sum_{q_n=q_n^-} \sum_{j=1}^8 \nu_{nj},$$

тогда ν^\pm — неотрицательные меры и $\nu = \nu^+ - \nu^-$. При этом

$$\nu^\pm \left(\bigcup_j Q_{nj} \right) = q^\pm \in (-8; 8).$$

Утверждение 1. Верно соотношение

$$\pi(\lambda) := \int \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) = O(\ln(|\lambda| + 1)), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Доказательство утверждения 1.

Докажем, что

$$|\nu(t)| = |\nu(B(0, t))| \leq 17, \quad t \geq 0, \quad (10.1)$$

и для $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$

$$|\nu|(t) = |\nu|(B(0, t)) \leq 17 \ln(t + e), \quad t \geq 0. \quad (10.2)$$

Если $t < \frac{9}{\sqrt{2}}$, то $B(0, t) \subset Q_2$, поэтому

$$|\nu(t)| \leq \nu_0(t) + \sum_{j=1}^8 |\nu_{1j}(\mathbb{C})| \leq 9.$$

Для $t \geq \frac{9}{\sqrt{2}}$ через n обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\frac{3^n}{\sqrt{2}} \leq t$, тогда $Q_n \subset B(0, t)$ и $\frac{3^{n+2}}{2} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} t > t$, значит $Q_{n+2} \supset B(0, t)$. Таким образом, с учетом (8) получим

$$|\nu(t)| \leq |\nu(Q_n)| + \sum_{i=n}^{n+1} \sum_{j=1}^8 |\nu_{ij}(\mathbb{C})| \leq 17.$$

Также можем оценить $\nu^\pm(t)$ и, сложив полученные оценки, доказать неравенство (10.2).

Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разобьем плоскость на множества $E_1 = \mathbb{C} \setminus B(0; 2|\lambda|)$, $E_2 = B(0; 1)$, $E_3 = B(0; \frac{|\lambda|}{2}) \setminus B(0; 1)$, $E_4 = B(\lambda, (|\lambda| + 1)^{-\alpha})$ и $E' = \mathbb{C} \setminus \bigcup_k E_k$. На множестве E_1 нужную оценку получим пользуясь (10.2) и неравенством: для некоторой постоянной C для всех $|z| \leq \frac{1}{2}$

$$|\ln |1 - z|| \leq C|z|. \quad (*)$$

$$\left| \int_{E_1} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Оценка интеграла по E_2 очевидна.

$$\left| \int_{E_2} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Оценка первого интеграла в правой части неравенства

$$\left| \int_{E_3} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| \leq \left| \int_{E_3} \ln \left| 1 - \frac{w}{\lambda} \right| d\nu(w) \right| + \left| \int_{E_3} \ln \left| \frac{w}{\lambda} \right| d\nu(w) \right|$$

следует из (10.2) и (*). Второй интеграл интегрируем по частям

$$\left| \int_{E_3} \ln \left| \frac{w}{\lambda} \right| d\nu(w) \right| = \left| \int_1^{\frac{|\lambda|}{2}} \ln \frac{|\lambda|}{t} d\nu(t) \right| \leq \ln 2 \left| \nu \left(\frac{|\lambda|}{2} \right) \right| + \left| \int_1^{\frac{|\lambda|}{2}} \frac{\nu(t) dt}{t} \right|.$$

Нужную оценку получим используя (10.1):

$$\left| \int_{E_3} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Из свойства (3) имеем

$$\left| \int_{E_4} \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\nu(w) \right| \leq a, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть n — наименьшее натуральное число, для которого $B(0, 2|\lambda|) \subset Q_n$, то есть $\frac{3^{n-1}}{2} < 2|\lambda| \leq \frac{3^n}{2}$. Тогда $E' \subset B(0, 2|\lambda|) \setminus B(0, \frac{|\lambda|}{2}) \subset Q_n \setminus Q_{n-3}$, поэтому

$$|\nu|(E') \leq 24.$$

С другой стороны,

$$\max_{w \in E'} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| \right| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Из последних двух оценок следует оценка интеграла по множеству E' .

Утверждение 1 доказано.

Вернемся к доказательству леммы 2. Положим $\tilde{u}(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$, где $\pi(\lambda)$ — потенциал меры ν , определенный в утверждении 1. Тогда \tilde{u} — субгармоническая функция с ассоциированной мерой $\tilde{\mu}$. По построению условия (3) и (4) выполнены. А также во внутренности каждого квадрата Q_{nj}

$$\Delta \tilde{u}(\lambda) dm(\lambda) = \pi \tilde{\mu}(\lambda) = \pi \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})} \mu_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})} \Delta u(\lambda),$$

поэтому верна оценка

$$\Delta \tilde{u}(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^\beta), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из утверждения 1 следует соотношение

$$|\tilde{u}(\lambda) - u(\lambda)| = O((|\lambda|)), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

По построению, $\tilde{\mu}(Q_{nj}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа и к сужениям $\tilde{\mu}_{nj}$ можно применить Теорему 1 (о разбиении мер) из работы 4: существует совокупность пар

(μ_{nj}^k, P_{nj}^k) прямоугольников P_{nj}^k и единичных мер μ_{nj}^k таких что выполняются условия 1-5 леммы 2. Дополнительно, прямоугольники P_{nj}^k лежат в квадратах Q_{nj} . Остается перенумеровать их одним индексом. Свойство 7 выполняется по оценке (11), свойство (6) — из соответствующего свойства квадратов Q_{nj} .

Лемма 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Центр тяжести единичных мер μ_n , построенных в лемме 2, обозначим через λ_n :

$$\int w d\mu(w) = \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Через $\tilde{\mu}_n$ обозначим сужение меры $\tilde{\mu}$ на множество $Q_n \setminus Q_0$ и через π_n потенциал этой меры

$$\pi_n(\lambda) = \int \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{w} \right| d\tilde{\mu}_n(\lambda).$$

Тогда мера $\tilde{\mu}_n$ удовлетворяет условиям теоремы 3 в работе [4] и по этой теореме с учетом условия (3) получим существование полинома P такого, что вне множества кругов $B_n(\varepsilon) = B(\lambda_k, \varepsilon(|\lambda_k| + 1)^{-\gamma})$, где λ_k — нули многочлена P , $\gamma \geq \alpha$, а $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, выполняется соотношение

$$|\pi(\lambda) - \ln |P(\lambda)|| \leq A \ln(|\lambda| + 1).$$

При этом постоянная A не зависит от n . В силу независимости постоянной A от n обычным образом обосновывается предельный переход. В результате получим, что существует целая функция f с простыми нулями в точках λ_n , удовлетворяющая условию

$$|\tilde{u}(\lambda) - \ln |f(\lambda)|| \leq A \ln(|\lambda| + 1), \quad \lambda \notin \bigcup_n B_n(\varepsilon). \quad (12)$$

Необходимо показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ круги $B_n(\varepsilon)$ попарно не пересекаются. Оценим расстояние d_n от точки λ_n до границы выпуклой оболочки F_n носителя меры μ_n . Пусть w_n — одна из точек достижения этого расстояния:

$$|\lambda_n - w_n| = \inf \{ |\lambda_n - w|, w \notin F_n \}.$$

Пусть $\lambda_n - w_n = e^{i\varphi_n} |\lambda_n - w_n|$ и $z = Tw = e^{-\varphi_n} (\lambda_n - w)$. При таком преобразовании образ F_n^* оболочки F_n расположится в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z \leq d_n\}$, и для образа меры $d\mu^*(z) = d\mu_n(\lambda - e^{i\varphi_n} z)$ будут выполняться условия

$$\int d\mu^*(z) = 1, \quad \int z d\mu^*(z) = 0, \quad d\mu^*(z) = \frac{1}{\pi} \chi_n(z) \Delta \tilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n} z) dm(z),$$

где $\chi_n(z)$ — характеристическая функция F_n^* . Пусть

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int \chi_n(x + iy) \Delta \tilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n} (x + iy)) dy.$$

Тогда $\delta(x)$ — финитная функция с носителем на отрезке $[a; d_n]$ и по условиям 6-7 в лемме 2

$$0 \leq \delta(x) \leq C(|\lambda_n| + 1)^{\beta+1} := M_n.$$

Кроме того, из свойств μ^* следует, что

$$\int_a^{d_n} \delta(x) dx = 1, \quad \int_a^{d_n} x \delta(x) dx = 0.$$

Утверждение 2. Пусть $\delta(x)$ — неотрицательная, непрерывная и финитная функция, удовлетворяющая условиям

$$1) \operatorname{conv} \operatorname{supp} \delta = [a; d], \quad 2) \sup_x \delta(x) \leq M < \infty,$$

$$3) \int \delta(x)dx = 1, \quad 4) \int x\delta(x)dx = 0.$$

Тогда

$$d \geq \frac{1}{6M}.$$

Доказательство утверждения 2.

Определим число $c > 0$ из равенства

$$\int_{-c}^c \delta(x)dx = \frac{1}{3}.$$

Из условия 2) следует, что $c \geq \frac{1}{6M}$. Допустим, что $d < c$. Тогда, учитывая 3), имеем

$$\int_{-\infty}^{-c} \delta(x)dx = 1 - \int_{-c}^d \delta(x)dx = 1 - \int_{-c}^c \delta(x)dx = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^0 |x|\delta(x)dx \geq \frac{2c}{3} + \int_{-c}^0 |x|\delta(x)dx \geq \frac{2c}{3}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^d |x|\delta(x)dx = \int_0^c |x|\delta(x)dx \leq c \int_{-c}^c \delta(x)dx = \frac{c}{3}.$$

По условию 4)

$$\frac{2c}{3} \leq \int_{-\infty}^0 |x|\delta(x)dx = \int_0^1 |x|\delta(x)dx \leq \frac{c}{3}.$$

Из полученного противоречия имеем

$$d \geq c \geq \frac{1}{6M}.$$

Утверждение 2 доказано.

Из доказанного утверждения вытекает, что для $\gamma = 3(\rho + \alpha) + 1$ круг $B_n(\varepsilon) = B(\lambda_n, \varepsilon(|\lambda| + 1)^{-\gamma})$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ лежит в оболочке F_n и, тем самым, эти круги попарно не пересекаются. Обычными приемами с помощью формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{f(z)(z - \lambda_n)},$$

можем получить необходимые оценки для производной в точках λ_n .

Теорема 1 доказана.

3. ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая выпуклая последовательность положительных чисел. Выпуклость понимается в том смысле, что если

$$T_0(r) = \sup_n \frac{r^n}{T_n}, \quad r > 0,$$

— функция следа данной последовательности, то

$$M_n = \sup_{r>0} \frac{r^n}{T(r)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Во введении мы ввели обозначения: для $k \in \mathbb{N}$ через \mathcal{M}_k обозначили сдвиг последовательности $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=1}^{\infty}$ и ввели подпространства

$$H(\mathcal{M}_k, D) = \{f \in H(D) : \|f\|_k = \sup_n \frac{\sup_{z \in D} |f^{(z)}|}{M_{n+k}}, k \in \mathbb{N},$$

и индуктивный предел этих пространств

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D) = \bigcup_k H(\mathcal{M}_k, D).$$

Через $P_k(d)$ обозначили банахово пространство целых функций с нормой

$$\|F\|_k = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|e^{-H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)},$$

где T_k — функция следа последовательности \mathcal{M}_k , и проективный предел этих пространств обозначили через $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$. Преобразование Фурье – Лапласа линейного непрерывного функционала S на $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$ определяется как

$$S \longrightarrow \widehat{S}(z) = S_\lambda(e^{\lambda z}).$$

В работе [5] доказано, что для последовательности \mathcal{M}_0 , удовлетворяющей условию

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty, \quad (13)$$

преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{P}^*(\mathcal{M}_0, D)$ и пространства $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.

С каждым подмножеством $S \subset \mathbb{C}$ свяжем полунорму в $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$

$$\|F\|_{k,S} = \sup_{\lambda \in S} \frac{|F(\lambda)|e^{-H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)}.$$

Если топология, определяемая системой этих полунорм, совпадает с исходной топологией пространства $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, то подмножество S называется достаточным для пространства $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$ (см. [6], [7]).

Теорема 3. Пусть целая функция $L(\lambda)$ с нулями λ_n , $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям 1) для некоторого $A > 0$

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)} T_0(|\lambda|)(|\lambda| + 1)^A, \lambda \in \mathbb{C},$$

2) для некоторого $B > 0$ и некоторой последовательности $R_k \rightarrow \infty$

$$|L(\lambda)| \succ e^{H_D(\lambda)} T_0(|\lambda|)(|\lambda| + 1)^{-B}, |\lambda| = R_k, k \in \mathbb{N},$$

3) для некоторого $C > 0$

$$|L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)} T_0(|\lambda_n|)(|\lambda_n| + 1)^{-C}, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда множество $S = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ является достаточным для пространства $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$.

Доказательство теоремы 3.

Мы в ходе оценок будем пользоваться следующим соотношением между функциями следа, доказанным в работе [5] (Лемма 1.2.): для любых натуральных k, m , $m \leq k$, найдется $r_{k,m}$ так, что при $r \geq r_{k,m}$

$$T_k(r) = r^{m-k} T_m(r). \quad (14)$$

Итак, возьмем и зафиксируем натуральное число k , возьмем число $N \geq A + k$ и число $m \geq N + C + B + 2$, здесь постоянные A, C из условия теоремы. Пусть $F \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, тогда

$$|F(\lambda)| \leq \|F\|_m e^{H_D(\lambda)} T_m(|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

и по соотношению (14)

$$|\lambda^N F(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)} T_0(|\lambda|) (|\lambda| + 1)^{-B-2}.$$

Отсюда и по второму условию на функцию L получим, что на окружностях $|\lambda| = R_n$ имеет место оценка

$$\frac{|\lambda^N F(\lambda)|}{|L(\lambda)|} \prec (|\lambda| + 1)^{-2}.$$

Следовательно, равномерно на плоскости сходится ряд Лагранжа

$$\lambda^N F(\lambda) = \sum_n \frac{\lambda_n^N F(\lambda_n)}{(\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n)} L(\lambda).$$

В силу выбора m и по соотношению (15) для $|\lambda - \lambda_n| \geq 1$ имеем оценку

$$\frac{|\lambda_n^N F(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \leq \|F\|_{m,S} |\lambda_n|^{-B-2}.$$

Поэтому для $|\lambda - \lambda_n| \geq 1$

$$|F(\lambda)| \prec \|F\|_{m,S} |L(\lambda)| |\lambda|^{-N}.$$

Отсюда, учитывая условие 1) теоремы, получим

$$\frac{|F(\lambda)| e^{-H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)} \prec \|F\|_{m,S} \frac{T_0(|\lambda|) (|\lambda| + 1)^A}{T_k(|\lambda|)} \prec \|F\|_{m,S},$$

или

$$\|F\|_k \prec \|F\|_{m,S}, \quad f \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 2 следует из теоремы 3 на основе хорошо известной связи между достаточными множествами и представляющими системами. Существование целых функции L с требуемыми свойствами вытекает из теоремы 1.

Очевидно, что если система $e^{\lambda_n z}$ является представляющей для пространства $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$, то после удаления конечного числа элементов оставшаяся часть системы будет тоже представляющей. Но при удалении бесконечного набора элементов система вообще говоря перестает быть представляющей.

Утверждение 3. Пусть $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — нули функции целой функции L , удовлетворяющей условиям теоремы 3 и $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, — некоторое бесконечное подмножество нулей. Система $E = \{e^{\lambda_n z}, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{e^{\mu_n z}, n \in \mathbb{N}\}$ не является представляющей в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.

Доказательство утверждения 3. Переходя при необходимости к подмножеству, будем считать, что множество $\{\mu_k\}$ удовлетворяет условию: в каждый отрезок $[2^n; 2^{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, попадает не более одного $r_k = |\mu_k|$ и $r_k > 1$. Через $m(t)$ обозначим считающую функцию этого множества. Тогда функция

$$g(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

является целой функцией. Пусть $\lambda \in [2^n; 2^{n+1}]$. Тогда

$$\left| \sum_{|\mu_k| \geq 2^{n+2}} \ln \left|1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right| \right| \leq |\lambda| \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 1, \quad \left| \sum_{|\mu_k| \leq 2^{n-1}} \ln \left|1 - \frac{\mu_k}{\lambda}\right| \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Так как для $|\lambda - \mu_k| \geq 1$

$$\left| \sum_{2^{n-1} < |\mu_k| < 2^{n+2}} \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| \right| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

то

$$|\ln |g(\lambda)|| = \sum_{|\mu_k| \leq 2^{n-1}} \ln \left| \frac{\lambda}{\mu_k} \right| + O(\ln |\lambda|) = \int_1^{|\lambda|} \frac{m(t)dt}{t} + O(\ln |\lambda|), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad |\lambda - \mu_n| \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

И, поскольку $m(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, то $\ln |\lambda| = o(\ln |g(\lambda)|)$, $|\lambda - \mu_k| \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Таким образом, функция $L_1(\lambda) = L(\lambda)/g(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, и система E не будет представляющей в $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$. Утверждение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976.
2. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат., 39:3 (1975). С. 657–702.
3. Азарин В.С. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Математический сборник, 79(121):4(8) (1969). С. 464–476.
4. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica, 11:3 (1985). С. 257–282.
5. Юлмухаметов Р.С. *Квазианалитические классы функций в выпуклых областях* // Математический сборник, 130(172):4(8) (1986). С. 500–519.
6. Shneider D.M. *Sufficient sets for some spaces entire functions*// Trans. Amer. Math. Soc., 197 (1974). P. 161–180.
7. Напалков В.В. *О дискретных слабодостаточных множествах в некоторых пространствах целых функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 45:5 (1981). С. 1088–1099.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Кирилл Владимирович Трунов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: trounovkv@mail.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru