ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 27-37.

УДК 517.53

ОЦЕНКА СКОРОСТИ РОСТА И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ В ТЕОРЕМАХ ТИПА МАКИНТАЙРА–ЕВГРАФОВА

А.М. ГАЙСИН, Г.А. ГАЙСИНА

Посвящается столетию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Алексея Федоровича Леонтьева

Аннотация. В статье получены два результата о поведении рядов Дирихле на вещественной оси.

В первом из них речь идет об оценке снизу суммы ряда Дирихле на системе отрезков вида $[\alpha, \alpha+\delta]$. Здесь параметры $\alpha > 0$, $\delta > 0$ таковы, что $\alpha \uparrow +\infty$, $\delta \downarrow 0$. Требуемая асимптотическая оценка установлена при помощи метода, основанного на некоторых неравенствах для экстремальных функций из соответствующего неквазианалитического класса Карлемана. Этот подход оказался более эффективным, чем известные ранее традиционные способы получения подобных оценок.

Второй результат существенно уточняет известную теорему М.А. Евграфова о существовании ограниченного на $\mathbb{R}$ ряда Дирихле. Согласно Макинтайру, сумма этого ряда стремится к нулю на $\mathbb{R}$. Здесь доказана конкретная оценка скорости стремления к нулю функции в примере типа Макинтайра–Евграфова.

Ключевые слова: ряд Дирихле, лакунарный степенной ряд, асимптотическое поведение.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Предварительно напомним историю вопроса. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z = x+iy) \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$ $(n \geq 1)$ — последовательность перемен знаков коэффициентов (по определению, $p_n = \min\limits_{k>p_{n-1}} \{k : a_{p_{n-1}} a_k < 0\}$), $p_0 = \min\{k : a_k \neq 0\}$.

Долгое время была актуальной следующая задача, восходящая к работе Полиа [1]: при каких условиях на последовательность $\{p_n\}$ имеет место равенство

$$d(f; \mathbb{R}_+) = 1, \tag{2}$$

где $\mathbb{R}_+$ — положительный луч $[0, \infty)$,

$$d(f; \mathbb{R}_+) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)}, \quad M_f(x) = \max_{|z|=x} |f(z)|?$$

A.M. Gaisin, G.A. Gaisina, Estimates for growth and decay of functions in Macintyre–Efgrafov kind theorems.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-0(661)).

Поступила 10 июня 2017 г.

Следует отметить, что и более общий аналог $d(f;\,\gamma)=1$ (γ — произвольная кривая, уходящая в бесконечность) равенства (2) впервые был рассмотрен и установлен Полиа также в работе [1] для целых функций f конечного порядка, представленных лакунарными степенными рядами, имеющих, вообще говоря, комплексные тейлоровские коэффициенты. Именно этот результат Полиа дал толчок к многочисленным исследованиям, в которых были получены различные его обобщения. Но в самой общей постановке эта задача, как и задача о равенстве (2) для целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами, оказалась весьма сложной.

До конца 1990 — начала 2000-х гг. оставался открытым следующий вопрос: каковы минимальные ограничения на последовательность $\{p_n\}$, при выполнении которых для любой целой функции f, заданной рядом (1) с вещественными коэффициентами Тейлора, будет справедливо равенство (2)?

Еще в работе [2] М. Н. Шереметой была высказана гипотеза о справедливости равенства (2) для любых последовательностей $\{p_n\}$, для которых выполняется лишь условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}<\infty. \tag{3}$$

В [2] было даже приведено доказательство этого сильного утверждения. Однако позднее в упомянутом доказательстве был обнаружен пробел, который М. Н. Шеремета не смог устранить и сформулировал в виде отдельной задачи, которая в той или иной постановке приводилась в разделе открытых проблем ряда выпусков журнала "Математичнї студiї"(Львов) и других изданий Львовского математического общества. (см., н-р, [3], [4]).

В статье [5] построен контрпример, опровергающий гипотезу М. Н. Шереметы. Основной результат статьи дал ответ на так называемую проблему Полиа.

Двойственная задача Полиа о поведении целых трансцендентных функций вида

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{p_n}\quad (0<p_n\uparrow\infty, a_n\in\mathbb{C}) \tag{4}$$

на произвольных кривых γ, уходящих в ∞, была полностью решена в [6].

Приведем этот результат. Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $w=w(x)$, $0<w(x)\uparrow\infty$ при $x\to\infty$. Через W обозначим множество всех функций w из L, таких, что $w(x)x^{-2}$ интегрируема на $[1,\infty)$. В [6] доказано следующее утверждение (здесь приводится равносильная формулировка): *для того чтобы для всяких функций f вида (4), для любой кривой γ, уходящей в ∞, имело место равенство $d(f;\,\gamma)=1$, необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $P=\{p_n\}$ выполнялись условия:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}<\infty;\quad 2)\ I_P(p_n)=\int\limits_0^{p_n}\frac{\mu_P(p_n;\,t)}{t}\,dt\leqslant w(p_n)\,(n\geq 1),$$

где $\mu_P(p_n;\,t)$ – число точек $p_k\neq p_n$ из отрезка $\{h:|h-p_n|\leqslant t\}$, w – некоторая функция из W.

Если $\gamma=\mathbb{R}_+$, то те же условия 1) и 2) необходимы и достаточны для того, чтобы для любой функции (4) при $x\to\infty$ вне некоторого множества $e\subset\mathbb{R}_+$ нулевой логарифмической плотности [7][1]

$$\ln M_f(x)=(1+o(1))\ln|f(x)|,\quad M_f(x)=\max_{|z|=x}|f(z)|. \tag{5}$$

[1]Т. е. вне e, $\int\limits_{e\cap[1,\,r)}\frac{dt}{t}=o(\ln r)$ при $r\to\infty$. Если $\int\limits_e\frac{dt}{t}<\infty$, то говорят, что множество e имеет конечную логарифмическую меру.

Наконец, отметим, что в [8] решена и более общая задача, связанная с гипотезой Полиа о минимуме модуля: условия 1) и 2) необходимы и достаточны для того, чтобы для любой функции f вида (4) при $x \to +\infty$ вне некоторого множества $e \subset \mathbb{R}_+$ конечной логарифмической меры

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln m_f(x),$$

где $m_f(x) = \min\limits_{z \in C_x} |f(z)|$, а C_x – некоторый замкнутый контур, получаемый от окружности $\{z : |z| = x\}$ путем «малой деформации» [8].

Здесь приведены формулировки основных результатов работ [5]–[8], но применительно к лакунарным степенным рядам (4). В них на самом деле рассматриваются соответствующие задачи для более общих рядов — рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (0 < \lambda_n \uparrow \infty \ , s = \sigma + it), \tag{6}$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости (предполагается, что не все коэффициенты ряда равны нулю, а последовательность показателей имеет конечную верхнюю плотность).

Как известно, при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \tag{7}$$

сумма F любого ряда (6) не ограничена на $\mathbb{R}_+$ [9].

Для натуральных λ_n верно и обратное — это следует из результата Макинтайра [10]. Для последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, имеющих конечный индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

аналогичное утверждение доказано Н.Н. Юсуповой [11].

Если $n(r) \sim cr^{\rho(r)}$ при $r \to \infty$ ($c \neq 0, \infty$; $\rho(r)$ — уточненный порядок, $n(r)$ — считающая функция последовательности Λ), $-\ln|Q^{'}(\lambda_n)| = O(n)$ при $n \to \infty$, соответствующий пример построен в [9].

При выполнении единственного условия (7) о какой-либо асимптотике суммы ряда (6) даже на $\mathbb{R}_+$ ничего не известно. Можно лишь утверждать, что $0 \leqslant d(F; \mathbb{R}_+) \leqslant 1$ [6], где

$$d(F; \mathbb{R}_+) = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{|F(\sigma)|}{M_F(\sigma)}, \quad M_F(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|.$$

Как показано в [6], оценки $0 \leqslant d(F; \mathbb{R}_+) \leqslant 1$ точны ($d(F; \mathbb{R}_+) = 1$, если для I_Λ выполняется условие типа 2); в противном случае существует ряд (6), для которого $d(F; \mathbb{R}_+) = 0$).

В связи с этим естественно возникает вопрос: логарифм какой неограниченно возрастающей и «правильной» функции, желательно определяемой через коэффициенты и показатели ряда (6), является оптимальной минорантой для логарифма модуля суммы этого ряда хотя бы на какой-то достаточно плотной последовательности точек $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$, $\quad \sigma_n \to +\infty$?

Подобная задача для кривых $\gamma = \{z = t + ig(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ ограниченного наклона исследовалась в [12]. В случае $\gamma = \mathbb{R}_+$ можно получить соответствующий результат, но гораздо проще, если применить свойства экстремальных функций из неквазианалитического класса Карлемана. Как и в [12], будем предполагать, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ подчинена условию: существуют числа $\mu_n > 0$, такие, что

$$\lambda_n \geq \mu_n \ \ (n \geq 1), \quad \frac{n}{\mu_n} \downarrow, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty. \tag{8}$$

Группа условий (8), как известно (см. в [13]), сильнее чем условие (7).

2. Оценка роста ряда Дирихле на $\mathbb{R}_+$ снизу

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (8). Тогда найдется последовательность* $\{\sigma_n\}$, $0 < \sigma_n \uparrow \infty$, $\sigma_{n+1} - \sigma_n \to 0$, *такие, что при* $n \to \infty$

$$\ln \mu^*(\sigma_n) \leqslant (1 + o(1)) \ln |F(\sigma_n)|. \tag{9}$$

Здесь F *– сумма ряда Дирихле (6),* $\mu^*(\sigma) = \max_{n \geq 1}\{|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n \sigma}\}$.

Хорошо известно, что $\ln \mu^*(\sigma)$ – выпуклая функция, причем $\ln \mu^*(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \to +\infty$ [14] ($\mu^*(\sigma)$ — максимальный член измененного ряда Дирихле).

Смысл оценки (9) в том, что ее левая часть — выпуклая функция, которая зависит только от коэффициентов и последовательности Λ показателей ряда (6) и явно может быть вычислена. В [12] показано, что оценка (9) в условиях теоремы 1 в принципе не может быть улучшена.

Отметим, что теорема 1 другим способом доказана в [12], а двойственная теорема о рядах Дирихле с вещественными коэффициентами установлена в [15]. Оказывается, метод доказательства соответствующей теоремы из [15] применим и в случае, рассматриваемом здесь.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняется условие (7). Тогда $\Omega(M'_n) \neq \{0\}$, где $\Omega(M'_n) = \{\psi : \psi \in C^\infty[0,1], \psi(x) \geq 0, \psi^{(n)}(0) = 0, \sup_{0 \leq t \leq 1} |\psi^{(n)}(t)| \leq M'_n \quad (n \geq 0)\}$, $M'_n = M^c_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad M'_i = 1 \quad (i = 0, 1, 2)$. Как и в [15], показывается, что для любого δ, $0 < \delta \leqslant 1$, для любой функции $\psi \in \Omega(M'_n)$ найдется целая функция вида

$$Q_\delta(\lambda) = \int_0^\delta \varphi_\delta(t) e^{\lambda t}\, dt,$$

такая, что $Q_\delta(\lambda_n) = 0$, $Q'_\delta(\lambda_n) \neq 0$, $\sup_{0<\delta\leqslant 1} \max_{0 \leq t \leq 1} |\varphi_\delta(t)| \leqslant c_0 < \infty$, причем

$$|Q_\delta(\lambda)| \geq |Q(\lambda)| \int_0^{\delta/12} \psi(x)\, dx. \tag{10}$$

Введем теперь в рассмотрение интерполирующую функцию А. Ф. Леонтьева. Поскольку сопряженная диаграмма функции Q_δ — отрезок $[0, \delta]$, обозначая, для удобства, $\omega_{Q_\delta}(\mu, \alpha, F) = \omega(\mu, \alpha, F)$, $\varphi_\delta(t)\, dt = d\sigma(t)$ (α – комплексный параметр, F – сумма ряда (6)), имеем [14]:

$$\omega(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta}\, d\eta \right) dt, \tag{11}$$

где C — замкнутый спрямляемый контур, охватывающий отрезок $[0, \delta]$, γ — ассоциированная по Борелю с Q_δ функция, которая в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\gamma(t) = \int_0^\delta \frac{d\sigma(\xi)}{t - \xi}.$$

Положив

$$f(t) = \int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta}\, d\eta,$$

получим

$$\omega(\mu,\alpha,F)=e^{-\alpha\mu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left(\int\limits_0^\delta\frac{d\sigma(\xi)}{t-\xi}\right)f(t)\,dt=e^{-\alpha\mu}\int\limits_0^\delta d\sigma(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)\,dt}{t-\xi}\right).$$

Функция f регулярна на C и внутри C, так как F – целая функция. Поэтому внутренний интеграл равен $f(\xi)$, и тогда

$$\omega(\mu,\alpha,F)=e^{-\alpha\mu}\int\limits_0^\delta d\sigma(\xi)\left(\int\limits_0^\xi F(\xi+\alpha-\eta)e^{\mu\eta}\,d\eta\right). \tag{12}$$

Воспользуемся теперь известными формулами для коэффициентов [14]:

$$a_n=\frac{\omega(\lambda_n,\alpha,F)}{Q'_\delta(\lambda_n)}\quad(n\geq 1). \tag{13}$$

Поделив обе части неравенства (10) на $\lambda-\lambda_n$ и устремляя λ к λ_n, очевидно, получаем, что

$$|Q'_\delta(\lambda_n)|\geq|Q'(\lambda_n)|\int\limits_0^{\delta/12}\psi(x)\,dx\quad(n\geq 1). \tag{14}$$

Полагая в формуле (12) $\alpha=\sigma+\delta$, оценим $|\omega(\lambda_n,\alpha,F)|$. При этом учтем, что переменная $\xi+\alpha-\eta$ будет принадлежать отрезку $I_\sigma=[\sigma+\delta,\sigma+2\delta]$. Имеем

$$|\omega(\lambda_n,\alpha,F)|\leqslant c_0\delta^2e^{-\sigma\lambda_n}\max_{u\in I_\sigma}|F(u)|\quad(u\geq 1). \tag{15}$$

Следовательно, учитывая (14), (15), из (13) получаем

$$|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma}\int\limits_0^{\delta/12}\psi(x)\,dx\leqslant c_0\delta^2\max_{u\in I_\sigma}|F(u)|\quad(n\geq 1).$$

Отсюда, переходя в левой части к максимуму по n, имеем

$$\mu^*(\sigma)\int\limits_0^{\delta/12}\psi(x)\,dx\leqslant c_0\delta^2|F(\sigma')|, \tag{16}$$

где σ' – некоторая точка отрезка I_σ, $0<\sigma\leqslant 1$.

Оценим теперь функционал

$$J_\delta(\psi)=\int\limits_0^{\delta/12}\psi(x)\,dx$$

снизу. Для этого применим теорему о среднем. Тогда

$$J_\delta(\psi)\geq\int\limits_{\delta/24}^{\delta/12}\psi(x)\,dx=\frac{\delta}{24}\psi(\beta),$$

где β — некоторая точка отрезка $[\frac{\delta}{24},\frac{\delta}{12}]$. Следовательно, из (16) получаем

$$\psi(\beta)\mu^*(\sigma)\leqslant 24c_0|F(\sigma')|.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от ψ. Поэтому, переходя в левой части к экстремальной функции I, окончательно получаем, что

$$I(\beta)\mu^*(\sigma)\leqslant 24c_0|F(\sigma')|,\quad\sigma'\in I_\sigma. \tag{17}$$

Воспользуемся теперь леммой типа 9 из [15] (она доказывается точно так же): *если выполняются условия (8), то существует постоянная N, зависящая только от последовательности $\{M'_n\}$, такая, что*

$$I(\beta) \geq \frac{1}{NH^2(\frac{\beta}{4})}, \quad \beta \in \left[\frac{\delta}{24}, \frac{\delta}{12}\right] \quad (0 < \delta \leqslant 1),$$

где H — функция, определенная формулой

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{M'_n y^{n+1}} \quad (0 < y < \infty).$$

Как известно (выше мы воспользовались этим обстоятельством), условия (8) равносильны тому, что (см. в [13])

$$\int_0^c \ln\ln H(\delta)\, d\delta < \infty, \tag{18}$$

где $c > 0$ – достаточно малая постоянная, такая, что $H(c) \geq e$.

Таким образом из (17) получаем

$$\mu^*(\sigma) \leqslant m(\delta)|F(\sigma')|, \tag{19}$$

где σ' – некоторая точка отрезка $[\sigma+\delta, \sigma+2\delta]$, а

$$m(\delta) = 24c_0 NH^2\left(\frac{\delta}{96}\right).$$

Функция $m(\delta)$, очевидно, также удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона (18). Выберем δ как решение (единственное) уравнения

$$m(\delta) = e^{V(\sigma)}, \tag{20}$$

где $V(\sigma) = [\ln \mu^*(\sigma)]/[\ln\ln \mu^*(\sigma)]$. Ясно, что $V(\sigma)$ — непрерывная при $\sigma \geq \sigma_0$ функция, $V(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \to \infty$. Перепишем уравнение (20) в виде

$$\ln\ln m(\delta) = \ln V(\sigma) \stackrel{def}{=} U(\sigma)$$

и через $K = K(t)$ обозначим функцию, обратную к $t = \ln\ln m(\delta)$. Тогда $K(U(\sigma)) = \delta$. Ясно, что функция $K(t)$ непрерывна, $K(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$. Так как $m(\delta)$ удовлетворяет условию (18), то

$$\int_{u(\sigma_0)}^{\infty} K(u)\, du < \infty,$$

что проверяется непосредственно. Следовательно, применяя лемму Бореля-Неванлинны (см. в [16]), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$, для всех $\sigma \geq \sigma_0$, но вне некоторого множества

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, a'_i], \quad mF \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (a'_i - a_i) < \infty,$$

выполняется оценка [17]

$$U[\sigma + 2K(U(\sigma))] < u(\sigma) + \varepsilon \quad .$$

Это оценка может быть улучшена (см., например, [16, § 1], [18, лемма 6]): *существует исключительное множество $E \subset [\sigma_0, \infty)$, которое также покрывается системой отрезков конечной суммарной длины* [16], *вне которого при $\sigma \to \infty$*

$$u[\sigma + 2K(u(\sigma))] < u(\sigma) + o(1).$$

Отсюда, принимая во внимание возрастание функции $V(\sigma)$, при $\sigma \to \infty$ вне множества E имеем

$$\ln \mu^*(\sigma + 2\delta) < \ln \mu^*(\sigma) + o(1). \qquad (21)$$

Следовательно, учитывая (20), (21), из (19) окончательно получаем, что при $\delta \to \infty$ вне E

$$(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma') \leqslant \ln |F(\sigma')|, \qquad (22)$$

где $\sigma + \delta \leqslant \sigma' \leqslant \sigma + 2\delta$, $\delta = K(u(\sigma))$. Поскольку множество E покрывается системой отрезков конечной суммарной длины, то оценка (22) выполняется на некоторой последовательности $\{\sigma_n\}$, $0 < \sigma_n \uparrow \infty$, $\sigma_{n+1} - \sigma_n \to 0$.

Теорема 1, таким образом, полностью доказана.

3. Существование ряда Дирихле, быстро убывающего на $\mathbb{R}_+$[1]

Пусть $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} < \infty$. Тогда целая функция

$$E(\lambda) = e^{b\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}} \quad (b \in \mathbb{R}) \qquad (23)$$

обладает свойствами [19, гл. I, §8; гл. III, §6; гл. V, §3]:

1) при $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_1$

$$\frac{1}{E(\lambda)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-\lambda t} dt,$$

где

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{E(\lambda)} e^{\lambda t} dt;$$

2) $G \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, причем $G(t) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t) dt = 1$;

3) $G^{(n)}(t)$ $(n \geq 1)$ имеет n, а $G(t)$ — ни одной перемены знака на $\mathbb{R}$;

4) $-\ln G(t)$ является выпуклой функцией на $\mathbb{R}$;

5) если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} < \infty$, $b = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}$, то $G(t) > 0$ при $t < 0$; $G(t) \equiv 0$ при $t \geq 0$;

6) если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$, то функция $G(t)$ представляет собой сужение на $\mathbb{R}$ целой функции $G(z)$ $(z = t + iy)$ [19, гл. I, §4].

В [19] показано, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} < \infty$, но $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$, то при $r \to +\infty$

$$G^{(n)}[\lambda(r)] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-r)^n \Lambda(r) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \qquad (24)$$

где

$$\Lambda(r) = \frac{e^{-r\lambda(r)}}{\sigma(r) E(-r)},$$

а

$$\lambda(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_k(\lambda_k + r)}, \quad \sigma(r) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

---

[1]Результаты этого пункта принадлежат Г.А. Гайсиной.

Приступим к построению примера. Пусть E — функция (23), $b=0$,

$$L(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Предположим, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность τ и конечный индекс конденсации δ (см. в [14]). Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k z}}{E'(\lambda_k)},\ z=t+iy. \tag{25}$$

Имеем:

$$E'(\lambda_n)=-\frac{1}{\lambda_n}\prod_{k\neq n}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)e^{\frac{\lambda_n}{\lambda_k}}.$$

Значит,

$$\frac{1}{E'(\lambda_n)}=2\frac{\prod\limits_{k\neq n}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}}}{L'(\lambda_n)}.$$

Поскольку $\delta<\infty$, то при некотором $C>0$

$$\left|\frac{1}{E'(\lambda_n)}\right|\le 2e^{C\lambda_n}E(-\lambda_n)\quad (n\ge 1).$$

А так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}=\infty$, то, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|E(-\lambda_n)|}{\lambda_n}=-\infty \tag{26}$$

(это проверяется обычным образом). Отсюда следует, что ряд (25) абсолютно сходится во всей плоскости и определяет целую функцию F.

Убедимся, что $F(t)\equiv G(t),\ t\in\mathbb{R}$. Сначала заметим, что при $\frac{\pi}{4}\le|\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}$ и $a\ge 0$

$$I=\left|\left(1-\frac{\lambda}{a}\right)e^{\frac{\lambda}{a}}\right|\ge 1. \tag{27}$$

Действительно, если $\lambda=|\lambda|e^{i\psi}$, то, полагая $r=\frac{|\lambda|}{a}$, имеем:

$$\ln I=\frac{1}{2}[\ln\left(1-2r\cos\psi+r^2\right)+2r\cos\psi]\quad (r\ge 0).$$

Величина $\alpha=2\cos\psi$ $\left(\frac{\pi}{4}\le\psi\le\frac{\pi}{2}\right)$ меняется на отрезке $[0,\sqrt{2}]$. Функция $g(\alpha)=\ln I$ на концах этого отрезка неотрицательна, а $g'(\alpha)=0$ в точке $\alpha=r$, где достигается локальный максимум. Значит, $I\ge 1$.

Далее, учитывая (27), в углах $\Delta_\pm=\{\lambda=|\lambda|e^{i\psi}:|\lambda|>0,\frac{\pi}{4}\le|\psi|\le\frac{\pi}{2}\}$ (Δ_+ — верхний угол, Δ_- — нижний) имеем:

$$P=\left|\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}\right|\ge\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}\right|\quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда видно, что для любого $n\ge 1$

$$P\ge B\lambda^n,\quad \lambda\in\Delta_\pm.$$

Следовательно, пользуясь теоремой Коши, имеем:

$$G(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}d\lambda\quad (t\ge 0), \tag{28}$$

где C — граница угла $\{\lambda : |\lambda| > 0, \arg\lambda = \pm\frac{\pi}{4}\}$.

Так как $E(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа ($\tau < \infty$), то можно воспользоваться следующим утверждением [14, гл. I, §1, теорема 1.19]:

Для заданного $q > 1$ имеется число $h > 0$ и окружности $C_n = \{z : |z| = r_n\}$, $r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} < qr_n$ ($n = 1,\ 2,\ \ldots$), на которых

$$\ln|E(\lambda)| > -h|\lambda|,\ |\lambda| = r_n \quad (n \geq 1). \tag{29}$$

В силу (28), для $\lambda \in C$, $t \leq -\sqrt{2}(1+h)$ имеем:

$$\left|\frac{r^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right| \leq e^{h|\lambda| + \frac{\sqrt{2}}{2}|\lambda| t} \leq e^{-|\lambda||t|}.$$

Значит, для таких t интеграл (28) по окружности C_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для $t \leq -\sqrt{2}(1+h)$

$$G(t) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}d\lambda\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{\lambda_n < r_k}\frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)},$$

где Γ_k — граница сектора $\{\lambda : 0 \leq |\lambda| \leq r_k,\ |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{4}\}$, обходимая против часовой стрелки. Но ряд (25) сходится абсолютно во всей плоскости, и его сумма F — целая функция. Как было сказано, $G(t)$ — сужение на $\mathbb{R}$ целой функции $G(z)$ ($z = t + iy$). Так что $G(t)$ при $t < -\sqrt{2}(1+h)$ представляется рядом (25). Отсюда следует, что $F(z) \equiv G(z)$ во всей плоскости, и

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k z}}{E'(\lambda_k)}.$$

Выясним, какова точная асимптотика $G(t)$ при $t \to +\infty$. Для этого будем пользоваться соотношением (24).

Очевидно, имеем:

$$E(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{E(-\lambda)}.$$

Отсюда получаем, что

$$E'(\lambda_n) = \frac{L'(\lambda_n)}{E(-\lambda_n)}.$$

Таким образом, можем записать

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(-\lambda_n)}{L'(-\lambda_n)}e^{\lambda_n t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим максимальный член измененного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(-\lambda_n)e^{\lambda_n t}$, т.е.

$$\mu^*(t) = \max_{n\geq 1}[E(-\lambda_n)e^{\lambda_n t}].$$

Эта функция определена корректно, так как измененный ряд, в силу (26), также сходится абсолютно во всей плоскости.

Имеем далее

$$\ln\mu^*(t) = \max_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right] + \lambda_n t\right\} \leq \max_{r\geq 0}\varphi(r),$$

где

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{r}{\lambda_k}\right) - \frac{r}{\lambda_k}\right] + rt.$$

Так как $\varphi(0) = 0, \varphi(+\infty) = -\infty$, то максимум этой функции достигается в точке, где

$$\varphi'(r) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_k(\lambda_k + r)} + t = 0,$$

т.е. в точке r, $\lambda(r) = t$ (функция $\lambda = \lambda(r)$ введена выше). Учитывая это и соотношение (24), получаем, что при $t = \lambda(r) \to +\infty$

$$a(r) = \frac{\ln G(\lambda(r))}{\ln \mu^*(t)} \sim \frac{\ln \Lambda(r)}{\ln \mu^*(t)}, \tag{30}$$

где $\ln \Lambda(r) = -r\lambda(r) - \ln \sigma(r) - \ln E(-r)$. Учитывая, что $t = \lambda(r)$,

$$\ln \mu^*(t) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{r}{\lambda_k} \right) - \frac{r}{\lambda_k} \right] + r\lambda(r),$$

из (30) получим оценку $a(r) \le b(r)$, причем при $r \to +\infty$

$$b(r) \sim -\frac{r\lambda'(r) + \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)}}{r\lambda'(r)} = -[1 + \varepsilon(r)],$$

где

$$\varepsilon(r) = \frac{\sigma'(r)}{r\lambda'(r)\sigma(r)}.$$

Далее, как легко проверить, $\lambda'(r) = \sigma^2(r)$. Отсюда получаем, что

$$2\sigma'(r)\sigma(r) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(\lambda_k + r)^3},$$

т.е.

$$\sigma'(r) = -\frac{1}{\sigma(r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + r)^3}.$$

Следовательно,

$$|\varepsilon(r)| \le r^{-2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k + r)^2} \right]^{-1} \le r^{-2} \left[\sum_{\lambda_k \le 2r} \frac{1}{(\lambda_k + r)^2} \right]^{-1}.$$

Отсюда получаем, что при $r \to \infty$

$$|\varepsilon(r)| \le \frac{9}{n(2r)} \to 0.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\ln G(t)}{\ln \mu^*(t)} \le -1, \tag{31}$$

и, тем самым, доказана

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ *— любая последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность* τ *и конечный индекс конденсации* δ. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$, *то ряд Дирихле (25) абсолютно сходится во всей плоскости,* $G(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *причем так, что выполняется оценка (31).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Pólya *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* // Math. Z., **29**:1 (1929), P. 549–640.
2. Шеремета М.Н. *Об одном свойстве целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами* // Матем. заметки, **18**:3 (1975), P. 395–402.
3. M.M. Sheremeta, M.V. Zabolotskii *Some open problems in theory of functions of a complex variable* // Matem. Studii, **3** (1994), P. 117–119 (Problem section).
4. M.M. Sheremeta *Five open problems in the theory of entire functions* // Matem. Studii, **6** (1996), P. 157–159(Problem section).
5. Гайсин А.М. *Решение проблемы Пойа* // Матем. сб., **193**:6 (2002). C. 39–60.
6. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб., **194**:8 (2003). P. 55–82.
7. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. **39**:3 (1998). C. 501–516.
8. Гайсин А.М., Рахматуллина Ж.Г. *Оценка суммы ряда Дирихле через минимум модуля на вертикальном отрезке* // Матем. сб. **202**:12 (2011). C. 23–56.
9. Евграфов М.А. *Об одной теореме единственности для рядов Дирихле* // УМН. **17**:3 (1962). C. 169–175.
10. A.J. Macintyre *Asymptotic paths of integral functions with gap power series* // Proc. London Math. Soc., **2**:3 (1952). P. 286–296.
11. Юсупова Н.Н. *Асимптотика рядов Дирихле заданного роста.* Дисс.-ия канд. наук. Уфа, 2009.
12. Гайсин А.М. *Свойства рядов экспонент с последовательностью показателей, подчиненной условию типа Левинсона* // Матем. сб., **197**:6 (2006). C. 25–46.
13. Гайсин А.М. *Условие Левинсона в теории целых функций. Эквивалентные утверждения* // Матем. заметки, **83**:3 (2008). C. 350–360.
14. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
15. Гайсин А.М. *Ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, неограниченные на положительном луче* // Матем. сб., **198**:6 (2007). C. 41–64.
16. Гайсин А.М. *Теоремы типа Бореля–Неванлинны. Применения.* РИЦ БашГУ, Уфа. 2010.
17. Гайсин А.М. *Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра* // Матем. сб. **182**:7 (1991). C. 931–945.
18. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле, показатели которого — нули целой функции с нерегулярным поведением* // Матем. сб. **185**:2 (1994). C. 33–56.
19. Хиршман И.И., Уиддер Д.В. *Преобразования типа свертки.* М.: ИЛ. 1958.
20. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Галия Ахтяровна Гайсина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `gaisinaga@mail.ru`