ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 119-131.

УДК 517.58, 517.923, 517.925, 517.929, 517.538, 519.116

ДИСКРЕТНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В.Ю. НОВОКШЕНОВ

Аннотация. На основе метода матричной задачи Римана предложена универсальная схема построения классических специальных функций, удовлетворяющих разностным уравнениям. К таким спецфункциям относятся гамма- и дзета-функции, ортогональные полиномы и другие классы функций с соотношениями рекурренции. Показано, что разностные уравнения для этих функций представляют собой условия совместности пар Лакса, возникающих из решений задачи Римана. При этом интегральные представления решений классической задачи Римана о сопряжении аналитических функций на контуре комплексной плоскости обобщены на случай дискретных мер, то есть на бесконечные последовательности точек на комплексной плоскости. Установлено, что такое обобщение позволяет обслужить ряд нелинейных разностных уравнений, обладающих свойством интегрируемости в смысле теории солитонов.

Решения указанных задач Римана позволяют воспроизвести аналитические свойства классических спецфункций, изложенные в справочниках, а также описать ряд новых функций, претендующих на роль специальных. К таковым, в частности, относятся разностные уравнения Пенлеве. Приведен пример применения разностного уравнения Пенлеве второго типа к задаче представления симметрической группы.

Ключевые слова: Специальные функции, задача Римана, изомонодромные деформации, ортогональные полиномы, рекуррентные соотношения, гамма функция, дзета функция Римана, дискретные уравнения Пенлеве, асимптотические разложения, интегральные представления.

Mathematics Subject Classification: 33C05, 33C12, 34M55, 34M40, 34E20, 34M60

В работе [18] рассмотрена схема описания классических специальных функций, основанная на матричной задаче Римана. Было показано, что такие функции, удовлетворяющие обыкновенным дифференциальным уравнениям, допускают представления в терминах решения некоторой задачи Римана, то есть задачи о восстановлении аналитической функции по ее граничным значениям. Тем самым проверялось свойство интегрируемости соответствующего дифференциального уравнения, понимаемое в смысле теории солитонов [1], [26]. Другое понимание свойства интегрируемости как вычисление значения функции в точке по ее глобальному поведению подразумевает наличие интегрального представления этой функции. По сути, метод задачи Римана демонстрирует эквивалентность этих двух определений интегрируемости [6], [15]. Функциями, попадающими под такое понимание интегрируемости, являются, например, гипергеометрические и эллиптические функции. Однако, в справочниках (см., например, [7], [14], [27]) имеются другие специальные функции, которые не удовлетворяют никакому дифференциальному уравнению. К таковым

V.Yu. Novokshenov, Discrete integrable equations and special functions.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01004).

Поступила 1 июля 2017 г.

относятся гамма- и дзета-функции и их обобщения, возникающие в теории чисел, комбинаторике и теории представления групп. Каким образом можно распространить метод задачи Римана на эти специальные функции?

В данной статье делается попытка ответить на этот вопрос. Ключевым здесь является то обстоятельство, что имеется то или иное *дискретное* уравнение, которому удовлетворяют специальные функции. Оказывается, что эти уравнения также можно уложить в схему теории солитонов. А именно, для каждого дискретного уравнения предъявляется пара Лакса из двух линейных уравнений, условием совместности которых служит данное уравнение. Эта пара Лакса, в свою очередь, строится на основе некоторой спектральной задачи для матричных операторов. Уравнения пары Лакса здесь являются дискретными по спектральному параметру, где дифференцирование заменено на разностный оператор или оператор другого дискретного преобразования. Ниже в §2 будет показано, как эти операторы строятся естественным образом из решений подходящей задачи Римана.

Следует отметить специфику задач Римана для дискретного случая. Здесь задача сопряжения граничных значений на непрерывном контуре в комплексной плоскости заменяется заданием вычетов мероморфной функции на дискретном множестве точек. В теории солитонов аналогом этой задачи служит восстановление собственных функций по дискретному спектру заданного оператора, что эквивалентно решению уравнений «одевающей» цепочки для N-солитонного решения [22]. В нашем случае такого ряда цепочка нелинейных уравнений возникает из дискретной задачи Римана и обладает всеми свойствами интегрируемости, присущими дифференциальным уравнениям. Ниже в §3 этот подход будет проиллюстрирован на примере дискретного уравнения Пенлеве второго типа. В заключение кратко рассматривается приложение этого уравнения в комбинаторике с целью подчеркнуть тот факт, что «дискретный трансцендент Пенлеве» служит новой нелинейной специальной функцией.

1. Задачи Римана и лаксовы пары

Задача Римана на контуре. Начнем с традиционной задачи Римана, в которой выбирается ориентированный гельдеровский контур Γ на комплексной плоскости λ, который, возможно, имеет точки самопересечения и более одной связной компоненты. На контуре Γ задается $N\times N$ обратимая матрица $G=G(\lambda)$, называемая *матрицей скачка*. Решение задачи Римана, заданное парой (Γ, G), состоит в определении $N\times N$-матричнозначной функции $Y(\lambda)\in \mathrm{Mat}\,(N,\mathbb{C})$, удовлетворяющей условиям

1) $Y(\lambda)$ кусочно-аналитична в областях $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$ и существуют ее пределы на контуре Γ
$$Y_\pm(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda'\to\lambda\\ \lambda'\in\pm\,\text{сторона}\,\mathbb{C}\setminus\Gamma}} Y(\lambda').$$

2) На контуре Γ $\det G(\lambda)\neq 0$ и выполняется соотношение скачка
$$Y_+(\lambda)=Y_-(\lambda)G(\lambda).$$

3) $Y(\lambda)$ стремится к единичной матрице I на бесконечности $\lambda\to\infty$.

В скалярном случае $N=1$ задача Римана 1) – 3) решается явно. Действительно, при $G(\lambda)\neq 0$ можно перейти к аддитивной задаче сопряжения
$$\ln Y_+(\lambda)=\ln Y_-(\lambda)+\ln G(\lambda).$$
Аддитивная задача о скачке вида $y_+(\lambda)=y_-(\lambda)+g(\lambda)$ с условием $y(\lambda)\to 0$ на бесконечности решается в явном виде с помощью интеграла Коши
$$y(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu.$$

Условие 2) вытекает из формулы Сохоцкого-Племеля о граничных значениях интеграла Коши (см., например, [11]). Более того, задача Римна 1) – 3) допускает явное решение в *абелевом* случае, когда $G(\lambda_1)G(\lambda_2) = G(\lambda_2)G(\lambda_1)$ для всех λ_1 и λ_2 на контуре Γ. Это решение дается формулой

$$Y(\lambda) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln G(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu \right\}. \tag{1}$$

Таким образом, формула (1) верна при условии нулевого *индекса* матрицы скачка, т.е. $\Delta \ln G|_{\Gamma} = 0$. В случае ненулевого индекса формула (1) модифицируется домножением на полином степени не выше значения индекса [11]. В этом случае решение задачи Римана неединственно и имеет конечное число линейно независимых решений.

В *неабелевом* случае при $N > 1$, когда матрицы $G(\lambda_1)$ и $G(\lambda_2)$ не коммутируют на контуре Γ, формула (1) не годится. В этом случае, как правило, нет явного решения задачи Римана. Тем не менее, теоремы существования и единственности имеют место для широкого класса матриц скачка. Например, достаточным условием однозначной разрешимости задачи Римана является положительная определенность матрицы $G(\lambda)$ [4]. В общем случае задача Римана 1) – 3) сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений на компоненты матрицы $Y(\lambda)$ [11]. Этот подход полезен не только для доказательства разрешимости, но и для оценок нормы матрицы $Y(\lambda)$ и анализа ее асимптотического поведения.

В приложениях матрица скачка зависит от дополнительных параметров. Здесь мы ограничимся случаем $N = 2$ и одного скалярного параметра x, причем

$$G(\lambda, x) = \mathrm{e}^{p(\lambda,x)\sigma_3} S \mathrm{e}^{-p(\lambda,x)\sigma_3}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где S — постоянная по λ и x матрица, а p — скалярный полином от λ и x. Тогда решение задачи Римана 1)–3) также зависит от параметра x. Вводя новые матрицы $\Psi(\lambda, x) = Y(\lambda, x)\mathrm{e}^{p(\lambda,x)\sigma_3}$, получим задачу Римана

1′) $\Psi(\lambda, x)$ кусочно-аналитична по λ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

2′) $\Psi_+(\lambda, x) = \Psi_-(\lambda, x) S, \quad \lambda \in \Gamma.$

3′) $\Psi(\lambda, x) \to \mathrm{e}^{p(\lambda,x)\sigma_3}, \quad \lambda \to \infty.$

Рассмотрим логарифмические производные

$$A(\lambda, x) = \Psi_\lambda \Psi^{-1}, \quad U(\lambda, x) = \Psi_x \Psi^{-1}. \tag{3}$$

Из условия 2′) следует (S — постоянная матрица!)

$$\begin{aligned} A_+(\lambda, x) &= (\Psi_-)_\lambda S \Psi_+^{-1} = (\Psi_-)_\lambda \Psi_-^{-1} = A_-(\lambda, x), \\ U_+(\lambda, x) &= (\Psi_-)_x S \Psi_+^{-1} = (\Psi_-)_x \Psi_-^{-1} = U_-(\lambda, x), \quad \lambda \in \Gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, A и U аналитичны по λ во всей комплексной плоскости. С другой стороны, из условия 3′) вытекает, что на бесконечности эти матрицы имеют полиномиальный рост

$$A(\lambda, x) \to p_\lambda(\lambda, x)\sigma_3, \quad U(\lambda, x) \to p_x(\lambda, x)\sigma_3, \quad \lambda \to \infty,$$

По теореме Лиувилля матрицы A и U являются матричными полиномами по λ степеней $\deg p_\lambda$ и $\deg p_x$ соответственно. Таким образом, матрица $\Psi(\lambda, x)$ удовлетворяет переопределенной системе дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

(пара Лакса)

$$\begin{cases} \Psi_\lambda = A\Psi, \\ \Psi_x = U\Psi. \end{cases} \tag{5}$$

Условием совместности системы (5) является уравнение

$$A_x - U_\lambda + [A, U] = 0. \tag{6}$$

Это уравнение распадается на конечный набор матричных уравнений на коэффициенты при каждой степени λ, что, в свою очередь, дает уравнения на скалярные функции от x. При подходящем выборе пары (Γ, G) на этом пути можно получить дифференциальные уравнения для спецфункций, а также их интегральные представления.

Например, выбирая контур Γ в виде объединения трех лучей $\Gamma_k = \{\lambda \,|\, \arg \varkappa = \pi/2 + 2\pi k/3\}$, $k = 0, 1, 2$, полином $p(\lambda, x) = 8\lambda^3/3 + \lambda x$, а матрицу S в формуле (2) в виде ([9], глава 3)

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & s_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_0 + s_1 + s_2 = 0,$$

получим явное решение задачи Римана 1) – 3) в виде

$$Y(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 & y(\lambda, x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y(\lambda, x) = \left\{ s_0 \int\limits_{\Gamma_0} + s_1 \int\limits_{\Gamma_1} + s_2 \int\limits_{\Gamma_2} \right\} \frac{\mathrm{e}^{p(\mu, x)}}{\mu - \lambda} d\mu.$$

При этом уравнение (6) эквивалентно уравнению Эйри $u'' = xu$ на функцию

$$u(x) = -\lim_{\lambda \to \infty} \lambda y(\lambda, x) = \left\{ s_0 \int\limits_{\Gamma_0} + s_1 \int\limits_{\Gamma_1} + s_2 \int\limits_{\Gamma_2} \right\} \mathrm{e}^{p(\mu, x)} d\mu.$$

Ниже в §2 будут приведены примеры использования задачи Римана 1) – 3) для других специальных функций.

Дискретная задача Римана. Нелинейные разностные уравнения для специальных функций требуют другой версии задачи Римана. Следуя работам А. Бородина [2], [3], определим дискретную задачу Римана следующим образом.

Пусть Σ – некоторое счетное множество точек на комплексной плоскости $\lambda \in \mathbb{C}$, имеющее единственную предельную точку на бесконечности. Пусть $H(\lambda)$ – матричная функция на Σ, $H : \Sigma \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$.

Будем говорить, что матричнозначная функция $Y : \mathbb{C} \setminus \Sigma \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ с простыми полюсами в точках $x \in \Sigma$ является решением *дискретной задачи Римана* (Σ, H), если выполняются следующие условия:

1° $Y(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и имеет простые полюсы в точках Σ,

2° $\mathrm{Res}_{\lambda = x} Y(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to x} \left(Y(\lambda) H(x) \right), \quad x \in \Sigma,$

3° $Y(\lambda) \to I$ при $\lambda \to \infty$.

Так же как и выше, $H(\lambda)$ называется *матрицей скачка.*

Заметим, что данная постановка дискретной задачи Римана выше очень похожа на чисто солитонный случай в обратной задаче рассеяния [26], часть III.

Обозначим

$$\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2} = \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\} = \mathbb{Z}'_+ \cup \mathbb{Z}'_-,$$

где $\mathbb{Z}'_+ = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\}$ и $\mathbb{Z}'_- = \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$.

Рассмотрим построение пары Лакса для задачи 1°–3° в частном случае $N = 2$ и

$$\Sigma_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}, \quad k \in \mathbb{Z}'.$$

$$H(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\varkappa^{2x}}{\Gamma^2\left(x+\frac{1}{2}\right)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x \in \mathbb{Z}'_+, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\varkappa^{-2x}}{\Gamma^2\left(-x+\frac{1}{2}\right)} & 0 \end{pmatrix}, & x \in \mathbb{Z}'_-. \end{cases} \tag{7}$$

В статье [2] доказано, что существует единственное решение задачи (Σ_k, H). Следуя [3], докажем, что для любого $n \in \mathbb{Z}_k$ существует постоянная нильпотентная матрица A_n,

$$A_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & -p_n \end{pmatrix}, \quad p_n^2 = -r_n q_n, \tag{8}$$

и функции a_n, b_n, $a_n b_n = 1$, такие что

$$Y_{n+1}(\lambda) = \left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right) Y_n(\lambda), \tag{9}$$

$$Y_n(\lambda-1)\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda-\frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda-\frac{1}{2}-p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} Y_{n+1}(\lambda). \tag{10}$$

Действительно, поскольку H не зависит от n, мы видим, что $Y_n(\lambda)$ и $Y_{n+1}(\lambda)$ удовлетворяют одному и тому же условию скачка на Σ_n. Однако, Y_{n+1} имеет лишний полюс в точке $\{n\} = \Sigma_{n+1} \setminus \Sigma_n$. Следовательно, отношение $Y_{n+1}Y_n^{-1}$ имеет один полюс в точке $\lambda = n$. Обозначая вычет в этой точке через A_n, мы заключаем, что функция

$$Y_{n+1}(\lambda)Y_n^{-1}(\lambda) - \frac{A_n}{\lambda - n}$$

является целой. Вычисляя асимптотику в окрестности $\lambda = \infty$, получаем по теореме Лиувилля, что эта функция тождественно равна I, что доказывает первое уравнение. Далее, из того, что $\det Y_n \equiv \det Y_{n+1} \equiv 1$, следует $\det(I + A_n/(\lambda - n)) \equiv 1$. Отсюда заключаем, что A_n нильпотентна.

Заметим, что условие 2° означает, что функция $Y(\lambda)$ имеет существенную особенность на бесконечности. Действительно, функция с полюсами, накапливающимися к бесконечности, не может иметь регулярную асимптотику. Для того чтобы условие было корректным, нужно потребовать, например, равномерную асимптотику на последовательности окружностей $|\lambda| = a_k$, $a_k \to +\infty$.

Для того чтобы гарантировать единственность решений дискретной задачи Римана, рассматриваемой ниже в §3, будем предполагать, что существует последовательность расширяющихся контуров, таких, что расстояние от них до множества Σ отграничено от нуля, и мы будем требовать, чтобы решение $Y(\lambda)$ имело нужную асимптотику на этих контурах.

Вычислим, с учетом этих замечаний, асимптотику $Y_n(\lambda)$ на бесконечности. Из условия 3° следует, что

$$Y_n(\lambda) = I + \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to \infty, \tag{11}$$

с некоторыми константами $\alpha_n, \dots, \delta_n$.

Для вывода уравнения (10) разделим слева на матрицу $Y_{n+1}(\lambda)$ и докажем, что его левая часть

$$Y_n(\lambda-1)\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda-\frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix} Y_{n+1}^{-1}(\lambda) \tag{12}$$

является полиномом по λ.

В силу (11) асимптотика матрицы (12) имеет вид

$$\left(I + \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \lambda^{-1}\right) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(I - \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} \lambda^{-1})\right) + O(\lambda^{-1})$$
$$= \varkappa^{-1} \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} + \alpha_n - \alpha_{n+1} & -\beta_{n+1} \\ \gamma_n & 0 \end{pmatrix} + O(\lambda^{-1}).$$

Обозначим $a_n = -\varkappa^{-1}\beta_{n+1}$, $b_n = -\varkappa^{-1}\gamma_n$, $c_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Тогда из теоремы Лиувилля следует, что выражение (12) равно

$$\begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - c_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение покажем, что $c_n = p_n$ и $a_n b_n = 1$. Второе равенство следует из того факта, что определитель $Y_n(\lambda)$ равен 1. Чтобы доказать, что $c_n = p_n$, подставим (9) в только что доказанное соотношение (10). Получаем

$$Y_n(\lambda - 1) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \varkappa(\lambda - \frac{1}{2})^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda - \frac{1}{2} - c_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} \left(I + (\lambda - n)^{-1} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & -p_n \end{pmatrix}\right) Y_n(\lambda).$$

Сравнивая асимптотику матричных элементов $(\cdot)_{11}$ в этом равенстве, заключаем, что $c_n = p_n$. Тем самым доказана справедливость уравнений пары Лакса (9) и (10).

2. Линейные разностные уравнения

Как было замечено во Введении, имеется много специальных функций, не удовлетворяющих какому-либо дифференциальному уравнению. Что в этом случае служит свойством интегрируемости таких функций? Проиллюстрируем это свойство на трех примерах.

Гамма-функция. Определим «усеченную» гамма-функцию следующим образом

$$\gamma(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i}\left(1 - \mathrm{e}^{2\pi i x}\right)\Gamma(x+1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \mathrm{e}^{-\theta(\lambda,x)}d\lambda,$$

где $\theta(\lambda, x) = \lambda - x\ln\lambda$, и контур интегрирования Γ охватывает положительную полуось с обходом по часовой стрелке. Определим *абелеву* задачу Римана 1) – 3) при $N = 2$ на контуре Γ с матрицей скачка [16]

$$G(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-\theta(\lambda,x)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее решение сводится к двум скалярным задачам сопряжения аналитических функций и дается явной формулой

$$Y(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 & \int\limits_C \frac{\mathrm{e}^{-\theta(\mu,x)}}{\mu - \lambda}d\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая пара Лакса выписывается в терминах Ψ-функции (см. [16])

$$\Psi(\lambda, x) = Y(\lambda, x)\mathrm{e}^{-\theta(\lambda,x)\sigma_3/2}\lambda^{\frac{x}{2}\sigma_3}$$

$$A = \Psi_\lambda(\lambda, x)\Psi^{-1}(\lambda, x) = -\frac{\sigma_3}{2} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} x/2 & -\gamma(x) \\ 0 & -x/2 \end{pmatrix},$$
$$U = \Psi(\lambda, x+1)\Psi^{-1}(\lambda, x) = -\sqrt{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & \gamma(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix} 0 & \gamma(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где условие совместности имеет вид

$$U_\lambda = A(\lambda, x+1)U - UA(\lambda, x).$$

Последнее распадается на цепочку тождеств и одно нетривиальное разностное уравнение

$$\gamma(x+1) = (x+1)\gamma(x),$$

которое влечет определяющее уравнений для гамма-функции

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Дзета-функция Римана. Так же как и выше, начнем с интегрального представления для ζ-функции [27]

$$\pi^{-\frac{x}{2}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\zeta(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \int\limits_0^1 \omega(\lambda^{-1})\lambda^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}d\lambda + \int\limits_1^\infty \omega(\lambda)\lambda^{\frac{x}{2}-1}d\lambda,$$

где

$$\omega(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2\lambda} \equiv \frac{1}{2}\left(\theta_3(0|i\lambda) - 1\right),$$

а $\theta_3(z|\kappa) = \sum_m \mathrm{e}^{\pi i\kappa m^2 + 2\pi i z m}$ — тета-функция Якоби от аргумента x с модулем κ [7].

Соотношение Римана для ζ-функции

$$\pi^{-\frac{x}{2}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\zeta(x) = \pi^{-\frac{1-x}{2}}\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\zeta(1-x)$$

переписывается в терминах функции

$$\xi(x) = \int\limits_0^1 \omega(\lambda^{-1})\lambda^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}d\lambda + \int\limits_1^\infty \omega(\lambda)\lambda^{\frac{x}{2}-1}d\lambda$$

в виде разностного уравнения

$$\xi(x) = \xi(1-x), \quad x \neq 0, \quad x \neq 1. \tag{13}$$

Следуя [15], составим контур Γ как объединение отрезков $\Gamma_1 = [0,1]$ и $\Gamma_2 = [1,+\infty)$ с естественной ориентацией и выберем матрицу скачка в виде

$$G(\lambda, x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i\omega(\lambda^{-1})\lambda^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Gamma_1, \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i\omega(\lambda)\lambda^{\frac{x}{2}-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{14}$$

В силу абелевости задачи Римана $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, G)$ ее решение $Y(\lambda, x)$ существует и единственно. Для получения соответствующей пары Лакса определим Ψ-функцию следующим образом

$$\Psi(\lambda, x) = Y(\lambda, x)\lambda^{(\frac{x}{4}-\frac{5}{8})\sigma_3}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матрицы Ψ справедливы уравнения

$$\begin{cases} \sigma_3\Psi\left(\frac{1}{\lambda}, 5-x\right)\sigma_3 = A(\lambda, x)\Psi(\lambda, x), \\ \Psi(\lambda, s+2) = U(\lambda, x)\Psi(\lambda, x), \end{cases} \tag{15}$$

где матрицы A и U имеют вид

$$A(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 & -\xi(3-x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & -\xi(x) \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Уравнения лаксовой пары (15) вытекают из оценок «логарифмических производных»

$$\sigma_3 \Psi\left(\frac{1}{\lambda}, 5 - x\right) \sigma_3 \Psi^{-1}(\lambda, x) \quad \text{и} \quad \Psi\left(\lambda, x + 2\right) \Psi^{-1}(\lambda, x).$$

Последние, в свою очередь, следуют из инвариантности матриц скачка (14) относительно сдвига $x \mapsto x + 2$ и модулярного преобразования тета-константы $\theta_3(0|i/\lambda) = \sqrt{\lambda}\theta_3(0|i\lambda)$ (см. [7], [15]). Условие совместности пары Лакса (15) имеет вид

$$\sigma_3 U\left(\frac{1}{\lambda}, 3 - x\right) \sigma_3 A(\lambda, x + 2) U(\lambda, x) A^{-1}(\lambda, x) = I,$$

что эквивалентно разностному уравнению (13).

Ортогональные полиномы. Выберем в качестве контура Γ вещественную ось с естественной ориентацией $\Gamma = \mathbb{R}$. Матрицу скачка положим в виде

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i w(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Gamma,$$

где

$$w(\lambda) = \mathrm{e}^{-V(\lambda)}, \quad V(\lambda) = \sum_{j=1}^{2k} \lambda^j t_j, \quad t_{2k} > 0. \tag{16}$$

Рассмотрим задачу Римана (Γ, G), где условие нормировки 3) заменено на следующее

$$Y(\lambda) \begin{pmatrix} \lambda^{-n} & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \to I, \quad \lambda \to \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

В работе А. Фокаса, А. Итса и А. Китаева [8] доказано, что эта задача имеет единственное решение при любом $n \in \mathbb{Z}_+$. Более того, это решение может быть представлено в виде

$$Y_n(\lambda) = \begin{pmatrix} P_n(\lambda) & \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(\mu) w(\mu) d\mu}{\lambda - \mu} \\ \frac{1}{h_{n-1}} P_{n-1}(\lambda) & \frac{1}{h_{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{n-1}(\mu) w(\mu) d\mu}{\lambda - \mu} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — семейство полиномов вида

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n,n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n,0}.$$

Из формулировки задачи Римана нетрудно вывести свойства этих полиномов. В частности, они ортогональны на вещественной оси с весом $w(\lambda) = \mathrm{e}^{-V(\lambda)}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda) P_m(\lambda) w(\lambda) d\lambda = h_n \delta_{nm}. \tag{19}$$

Для локазательства формулы (19) выпишем асимптотику на бесконечности из условия (17)

$$Y_n(\lambda) = \left\{ I + m_1^{(n)} \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right\} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}, \quad \lambda \to \infty, \tag{20}$$

так что

$$(Y_n(\lambda)_{22} = \lambda^{-n} + O(\lambda^{-n-1}) = \frac{1}{h_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{n-1}(\mu) w(\mu) d\mu}{\lambda - \mu} =$$

$$= \frac{1}{\lambda h_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\mu) w(\mu) \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \ldots + \frac{\mu^n}{\lambda^n} + \ldots\right) d\mu.$$

Отсюда следует

$$h_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\mu) w(\mu) \mu^{n-1} d\mu, \quad 0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\mu) w(\mu) \mu^k d\mu, \quad 0 \le k \le n-2,$$

что доказывает равенство (19).

Для ортогональных полиномов справедливо линейное рекуррентное соотношение, связывающее полиномы с номерами $n-1$, n и $n+1$ [25]. Его можно рассматривать как уравнение по n для семейства полиномов, ортогональных с заданным весом.

Для вывода этого рекуррентного соотношения рассмотрим «логарифмическую производную»

$$U_n(\lambda) = Y_{n+1}(\lambda) Y_n^{-1}(\lambda).$$

Очевидно, в силу явных формул (16) и (18) $U_n(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости. Установим асимптотику $U_n(\lambda)$ на бесконечности. В силу асимптотики (20) матрица U_n имеет следующее асимптотическое разложение

$$U_n(\lambda) = Y_{n+1}(\lambda) Y_n^{-1}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_1^{(n+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m_1^{(n)} + \ldots$$

Таким образом, при $\lambda \to \infty$

$$Y_{n+1} Y_n^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{n+1} - a_n & -b_n \\ c_{n+1} & 0 \end{pmatrix} + O(\lambda^{-1}), \quad \text{где} \quad m_1^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

По теореме Лиувилля

$$U_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + a_{n+1} - a_n & -b_n \\ c_{n+1} & 0 \end{pmatrix},$$

что дает разностное уравнение на матричный элемент $(\cdot)_{11}$

$$P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda) + (a_{n+1} - a_n) P_n(\lambda) - \frac{b_n}{h_{n-1}} P_{n-1}(\lambda).$$

Окончательно, рекуррентное соотношение имеет вид

$$P_{n+1}(\lambda) + (\alpha_n - \lambda) P_n(\lambda) + \beta_n P_{n-1}(\lambda) = 0, \tag{21}$$

где

$$\alpha_n = a_n - a_{n+1} = \lim_{\lambda \to \infty} \left[\lambda^{1-n} (Y_n(\lambda))_{11} - \lambda^{-n} (Y_{n+1}(\lambda))_{11}\right],$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{h_{n-1}} = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 (Y_n(\lambda))_{12} (Y_n(\lambda))_{21}.$$

В частном случае весовой функции $w(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda^2}$ получаются полиномы Эрмита (см. [5], глава 3),

$$P_n(\lambda) = H_n(\lambda) = (-1)^n e^{\lambda^2} \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{-\lambda^2}.$$

В этом случае задача Римана позволяет вычислить и обосновать асимптотики полиномов Эрмита при $n \to \infty$ (см. [5], глава 7). Это вычисление воспроизводит формулы

Планшереля-Ротаха [21], причем метод «асимптотического раздевания» задачи Римана в [6] годится для других классов полиномов [19].

Заметим в заключение, что в случае экспоненциального веса (16) с параметрами $t = \{t_1, \dots, t_{2k}\}$ коэффициенты α_n и β_n в рекуррентном соотношении (21) становятся функциями от t. При этом они, в свою очередь, удовлетворяют интегрируемым уравнениям. Например, в случае

$$V(\lambda) = \frac{\lambda^4}{4} + t\lambda^2$$

для коэффициента β_n справедливо уравнение Пенлеве четвертого типа

$$u_{tt} = \frac{u_t^2}{2u} + \frac{1}{2u}(3u^2 + 2tu - n - 1))(u^2 + 2tu + n + 1),$$

где $u(t) = \beta_n h_{n-1}$ [17].

3. Нелинейные разностные уравнения

Уравнение dPII. Применим дискретную задачу Римана, рассмотренную в §1, для вывода дискретного аналога второго уравнения Пенлеве (dPII). Решения классического дифференциального уравнения Пенлеве II по праву вошли в состав «нелинейных» специальных функций (см. [9]) благодаря большому числу приложений в различных задачах математики и физики. Ниже будет показано, что решения дискретного уравнения dPII также достойны статуса специальных функций.

Следуя статье [2] и поставленной в §1 дискретной задаче Римана 1°–3° на множестве Σ_k с матрицей скачка (7), выведем условия совместности пары Лакса (9), (10). Сдвигая λ на 1 в (10) и подставляя правую часть (10) в правую часть (9), получаем

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(\lambda) &= \left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} \\ &\times Y_{n+1}(\lambda + 1) \begin{pmatrix} \varkappa(\lambda + \frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С другой стороны, сдвигая n и λ на 1 в (9) и (10) и подставляя правую часть (9) в правую часть (10), получаем

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_{n+1}) & a_{n+1} \\ -b_{n+1} & 0 \end{pmatrix} \left(I + \frac{A_{n+1}}{\lambda - n}\right) \\ &\times Y_{n+1}(\lambda + 1) \begin{pmatrix} \varkappa(\lambda + \frac{1}{2})^{-1} & 0 \\ 0 & \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти два соотношения, получим условие совместности для пары Лакса (9), (10)

$$\left(I + \frac{A_n}{\lambda - n}\right) \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(\lambda + \frac{1}{2} - p_{n+1}) & a_{n+1} \\ -b_{n+1} & 0 \end{pmatrix} \left(I + \frac{A_{n+1}}{\lambda - n}\right). \tag{22}$$

Это соотношение является аналогом уравнения (6), полученного путем перекрестного дифференцирования уравнений пары Лакса в §1.

Из матричного уравнения (22) легко получить скалярные уравнения на переменные p_n и r_n. А именно, вычисление асимптотики элементов $(\cdot)_{12}$ и $(\cdot)_{21}$ в равенстве (22) при $\lambda \to \infty$ дает соотношения

$$\begin{cases} a_n = a_{n+1} + \varkappa^{-1} q_{n+1}, \quad b_n = b_{n+1} + \varkappa^{-1} r_n, \\ a_n r_n = -b_{n+1} q_{n+1}. \end{cases} \tag{23}$$

Вычеты в простом полюсе в $\lambda = n$ в равенстве (22) имеют вид

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & -p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(n+\frac{1}{2}-p_n) & a_n \\ -b_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa^{-1}(n+\frac{1}{2}-p_{n+1}) & a_{n+1} \\ -b_{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ r_{n+1} & -p_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Матричный элемент $(\,\cdot\,)_{22}$ этого равенства совпадает с последним равенством (23), а элемент $(\,\cdot\,)_{12}$ дает

$$a_n p_n = \varkappa^{-1}(\lambda + \tfrac{1}{2} - p_{n+1})q_{n+1} - a_{n+1}p_{n+1}.$$

Умножая обе части на b_{n+1}, получаем (напомним, что $a_{n+1}b_{n+1} = 1$)

$$b_{n+1}a_n p_n = -\varkappa^{-1}(\lambda + \tfrac{1}{2} - p_{n+1})a_n r_n - p_{n+1}. \tag{24}$$

Обозначим

$$s_n = a_n r_n,$$

тогда, умножая первое соотношение (23) на b_{n+1}, мы видим, что $a_n b_{n+1} = 1 - \varkappa^{-1}s_n$. Подставляя это выражение в (24), получаем

$$(p_n + p_{n+1})(s_n - \varkappa) = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) s_n.$$

Используя нильпотентность матрицы A_n (8), имеем

$$p_{n+1}^2 = -q_{n+1}r_{n+1} = (-b_{n+1}q_{n+1})(a_{n+1}r_{n+1}) = s_n s_{n+1}.$$

Тем самым, для любого $n \in \mathbb{Z}_k$ получается система скалярных уравнений

$$\begin{cases} (p_n + p_{n+1})(s_n - \varkappa) = \left(n + \frac{1}{2}\right) s_n, \\ p_{n+1}^2 = s_n s_{n+1}. \end{cases}$$

Из этой системы легко исключить переменную p_n, а именно, полагая

$$s_n = \varkappa x_n^2,$$

получим скалярное разностное уравнение

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) x_n}{\varkappa(x_n^2 - 1)}. \tag{25}$$

Уравнение (25) называется уравнением dPII или *разностным уравнением Пенлеве II* , (см. [3], [13], [24]). Покажем [20], что это уравнение переходит в дифференциальное уравнение Пенлеве II в пределе $\varkappa \to \infty$. Введем непрерывную переменную t

$$t = (n - 2\varkappa)\,\varkappa^{-\frac{1}{3}}$$

и предположим, что $x_n \approx (-1)^n \varkappa^{-\frac{1}{3}} u(t)$ при $\varkappa \to \infty$ с некоторой гладкой функцией $u(\,\cdot\,)$. Тогда

$$\begin{aligned} &x_{n\pm1} = (-1)^{s+1}\varkappa^{-\frac{1}{3}} \left(u(t) \pm \varkappa^{-\frac{1}{3}}u'(t) + \varkappa^{-\frac{2}{3}}u''(t) + O(\varkappa^{-1})\right), \\ &\frac{(n+\frac{1}{2})x_n}{\varkappa(x_n^2-1)} = (-1)^{n+1}\left(2 + \varkappa^{-\frac{2}{3}}t + \tfrac{1}{2}\varkappa^{-1}\right)\varkappa^{-\frac{1}{3}}u(t)\left(1 + \varkappa^{-\frac{2}{3}}u^2(t) + O(\varkappa^{-\frac{4}{3}})\right) = \\ &= (-1)^{n+1}\varkappa^{-\frac{1}{3}}\left(2u(t) + \varkappa^{-\frac{2}{3}}(tu(t) + 2u^3(t)) + O(\varkappa^{-1})\right). \end{aligned}$$

Подставляя в (25) и переходя к пределу $\varkappa \to \infty$, получаем

$$u''(t) = tu(t) + 2u^3(t),$$

что представляет собой частный случай уравнения Пенлеве II [9].

Представления симметрической группы. Пусть S_n – симметрическая группа степени n, то есть группа перестановок множества из n элементов, обозначаемых обычно натуральными числами $1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $l_n(\sigma)$ длину наибольшей возрастающей последовательности подстановки $\sigma \in S_n$, а через $|\cdot|$ – число элементов множества. Положим

$$p_k^n = \frac{1}{n!}\Big|\{\sigma \in S_n \,|\, l_n(\sigma) \le k\}\Big|,$$

и введем производящую функцию

$$p_k(\varkappa) = \mathrm{e}^{-\varkappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^{2n}}{n!}\, p_k^n,$$

где $\varkappa$ – некоторый комплексный параметр. Другое эквивалентное определение вытекает из алгоритма Робинсона-Шенстеда [10]. Возьмем все разбиения подстановки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in S_{|\lambda|}$ такие, что $|\lambda_1| \ge \cdots \ge |\lambda_l| > 0$, $|\lambda_1| \le k$ и $|\lambda| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_l|$. Обозначим через $\dim\lambda$ размерность неприводимого представления симметрической группы $S_{|\lambda|}$, тогда

$$p_k(\varkappa) = \mathrm{e}^{-\varkappa^2} \sum_{|\lambda_1| \le k} \left(\frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}\, \varkappa^{|\lambda|}\right)^2,$$

где суммирование берётся по всем таким разбиениям λ.

Вычисление функции $p_k(\varkappa)$ составляет важную задачу теории представлений симметрической группы. В работе [12] доказано, что эта функция может быть записана как тёплицев определитель

$$p_k(\varkappa) = \mathrm{e}^{-\varkappa^2} \det[f_{i-j}]_{i,j=1}^{k}\,, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m \zeta^m = \mathrm{e}^{\varkappa(\zeta+\zeta^{-1})}. \tag{26}$$

В статье [23] впервые была установлена связь функции $p_k(\varkappa)$ с решением уравнения dPII. Определим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ начальными условиями $x_0 = -1$, $x_1 = f_1/f_0$ с f_i из (26) и рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{n x_n}{\varkappa(x_n^2 - 1)}\,, \quad n \ge 1.$$

Тогда для любого $k \ge 1$ и $\varkappa$ в общем положении справедливы рекуррентные соотношения

$$\frac{p_{k+1}(\varkappa)p_{k-1}(\varkappa)}{p_k^2(\varkappa)} = 1 - x_k^2.$$

Слова «в общем положении» здесь означают, что $\varkappa$ не принадлежит множеству полюсов мероморфной функции $x_k = x_k(\varkappa)$.

Другой вывод этого результата с помощью дискретной задачи Римана был приведен позднее в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M.J. Ablowitz and P.A. Clarkson *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering.* Math. Soc. Lecture Notes Series, v. 149, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
2. A. Borodin *Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations* // Duke Math. J. V. 117. No. 3. (2003) P. 1–54.
3. A. Borodin *Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations.* Ann. Math. V. 160. No. 3. (2004) P. 1141–1182.
4. K. Clancey and I. Gohberg *Factorization of matrix functions and singular integral operators.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 3. Birkhauser Verlag, Basel, 1981.
5. P. Deift *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach.* Courant Lecture Notes: New York Univ. NY, 1999.
6. P.A. Deift *Integrable Systems and Combinatorial Theory* // Notices of the Amer. Math. Soc. V. 47. No. 6. (2000) P. 631–640.

7. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi *Tables of Integral Transforms.* Vol. I. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1954.
8. A.S. Fokas, A.R. Its, and A.V. Kitaev *The Isomonodromy Approach to Matrix Models in 2D Quantum Gravity* // Comm. Math. Phys. V. 147 (1992) P. 395–430.
9. A.S. Fokas, A.R. Its, A.A. Kapaev and V.Yu. Novokshenov *Painlevé Transcendents. The Riemann-Hilbert Approach.* Math. Surveys and Monographs, V. 128, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
10. Фултон У. *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.* М: Издательство МЦНМО, 2006.
11. F.D. Gakhov *Boundary value problems.* Dover Publications, 1990.
12. I.M. Gessel *Symmetric functions and Precursiveness* // J. Combin. Theory, Ser. A 53 (1990) P. 257–285.
13. B. Grammaticos, F. W. Nijhof, A. Ramani *Discrete Painlevé equations, The Painlevé property* // CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999, P. 413–516.
14. E.L. Ince *Ordinary Differential Equations.* Dover, New York, 1956.
15. A.R. Its *The Riemann-Hilbert Problem and Integrable Systems* // Notices of the Amer. Math. Soc., V. 50. No. 11. (2003) P. 1389–1400.
16. A.V. Kitaev *Special functions of the isomonodromy type* // Acta Appl. Math., V. 64 (2000). P. 1–32.
17. A.P. Magnus *Painlevé-type differential equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials* // J.Comput.Appl.Math. V. 57 (1995). P. 215–237.
18. V.Yu. Novokshenov *The Riemann-Hilbert Problem and Special Functions* // In: „Geometric Methods in Physics“, AIP Conf. Proc., V.208, (2008). P. 149–161.
19. Новокшенов В.Ю., Щелконогов А.А. *Распределение нулей обобщенных полиномов Эрмита* // Уфимский математический жур-нал, Т. 7. № 3 (2015). С. 57–69.
20. Y. Ohta, A. Ramani, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani *From discrete to continuous Painlevé equations: a bilinear approach* // Phys. Lett. A V. 216. No. 6. (1996). P. 255–261.
21. M. Plancherel, W. Rotach *Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite* // Commentarii Math. Helvetici 1929. V. 1. P. 227–254.
22. A.B. Shabat *The infinite-dimensional dressing dynamical system* // Inverse Problems, V. 8. No. 2. (1992) P. 303–308.
23. C.A. Tracy and H. Widom *Random unitary matrices, permutations and Painlevé* // Comm. Math. Phys. V.207. No. 3. (1999) P. 665–685.
24. H. Sakai *Rational Surfaces Associated with Affine Root Systems and Geometry of the Painlevé Equations* // Comm. Math. Phys. V.220. No. 1. (2001) P. 165–229.
25. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* М.: Физматгиз. 1962.
26. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов и метод обратной задачи.* М.: Наука. 1980.
27. E.T. Whittaker and G.N. Watson *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, 1996.

Виктор Юрьевич Новокшенов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `novik53@mail.ru`