

О ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

И.Х. МУСИН

Аннотация. Рассматривается гильбертово пространство F_φ^2 целых функций n переменных, построенное при помощи выпуклой функции φ в \mathbb{C}^n , зависящей от модулей переменных и растущей на бесконечности быстрее $a\|z\|$ для любого $a > 0$. Изучается задача описания сопряжённого для него в терминах преобразования Лапласа функционалов. При определённых условиях на весовую функцию φ получено описание преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на F_φ^2 . Доказательство основного результата основано на использовании новых свойств преобразования Юнга-Фенхеля и одного результата об асимптотике многомерного интеграла Лапласа, установленного Р.А. Башмаковым, К.П. Исаевым и Р.С. Юлмухаметовым.

Ключевые слова: гильбертово пространство, преобразование Лапласа, целые функции, выпуклые функции, преобразование Юнга-Фенхеля.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 42B10, 46E10, 46F05, 42A38

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. О проблеме. Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в \mathbb{C}^n , $d\mu_n$ – мера Лебега в \mathbb{C}^n и для $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) $abs\ u := (|u_1|, \dots, |u_n|)$.

Обозначим через $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ множество всех выпуклых функций g в \mathbb{R}^n таких, что:

- 1) $g(x_1, \dots, x_n) = g(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
- 2) сужение g на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|x\|$ – евклидова норма точки $x \in \mathbb{R}^n$).

С каждой функцией $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ свяжем гильбертово пространство

$$F_\varphi^2 = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\ z)} d\mu_n(z) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)} e^{-2\varphi(abs\ z)} d\mu_n(z), \quad f, g \in F_\varphi^2.$$

Если $\varphi(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$, то F_φ^2 – пространство Фока.

Очевидно, какова бы ни была функция $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}^n$ функция $f_\lambda(z) = e^{\langle \lambda, z \rangle}$ принадлежит F_φ^2 . Поэтому для любого линейного непрерывного функционала S на пространстве F_φ^2 корректно определена в \mathbb{C}^n функция

$$\hat{S}(\lambda) = S(e^{\langle \lambda, z \rangle}), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

– преобразование Лапласа функционала S . Легко видеть, что \hat{S} – целая функция.

Обозначим через $(F_\varphi^2)^*$ сопряжённое пространство к пространству F_φ^2 .

I.KH. MUSIN, ON A HILBERT SPACE OF ENTIRE FUNCTIONS.

© Мусин И.Х. 2017.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №15-01-01661) и Программы Президиума РАН (проект «Комплексный анализ и функциональные уравнения».)

Поступила 22 мая 2017 г.

Цель работы – нахождение условий на $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, при выполнении которых пространство $(\widehat{F_\varphi^2})^*$ преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на F_φ^2 допускает описание как $F_{\varphi^*}^2$.

Если $\varphi(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$, то $(\widehat{F_\varphi^2})^* = F_\varphi^2$. Действительно, в этом случае проблема описания пространства $(F_\varphi^2)^*$ в терминах преобразования Лапласа функционалов легко решается благодаря классическому представлению: для любого $f \in F_\varphi^2$

$$f(\lambda) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) e^{\langle \lambda, \bar{z} \rangle - \|z\|^2} d\mu_n(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Для случая, когда функция $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ – радиальная, решение указанной проблемы было получено В.В. Напалковым и С.В. Попёновым [5, 6].

1.2. Обозначения и определения. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ пусть $\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – евклидова норма u .

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – длина мультииндекса α , $\tilde{\alpha} := (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1)$, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, $D_z^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$

$$c_\alpha(\varphi) := \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \dots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(\text{abs } z)} d\mu_n(z).$$

Для функции u с областью определения, содержащей множество $(0, \infty)^n$, определим функцию $u[e]$ в \mathbb{R}^n по правилу:

$$u[e](x) = u(e^{x_1}, \dots, e^{x_n}), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех непрерывных функций $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Преобразование Юнга-Фенхеля функции $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ есть функция $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле: $u^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - u(y))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Если E – выпуклая область в \mathbb{R}^n , h – выпуклая функция в E , $\tilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : h^*(y) < \infty\}$, $p > 0$, то $D_y^h(p) := \{x \in E : h(x) + h^*(y) - \langle x, y \rangle \leq p\}$, $y \in \tilde{E}$.

Через $V(D)$ обозначаем n -мерный объём множества $D \subset \mathbb{R}^n$.

1.3. Основной результат.

Теорема. Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $K > 0 \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\frac{1}{K} \leq V(D_\alpha^{\varphi[e]}(1/2)) V(D_\alpha^{\varphi^*[e]}(1/2)) \prod_{j=1}^n \alpha_j \leq K.$$

Тогда отображение $\mathcal{L} : S \in (F_\varphi^2)^* \rightarrow \hat{S}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $(F_\varphi^2)^*$ и $F_{\varphi^*}^2$.

Доказательство Теоремы (п. 3.2) основано на использовании новых свойств преобразования Юнга-Фенхеля (п. 2.1) и одного результата об асимптотике многомерного интеграла Лапласа из работы [9] (п. 2.2).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. О некоторых свойствах преобразования Юнга-Фенхеля. Легко проверить, что справедливо следующее

Предложение 1. Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(u[e])^*(x) > -\infty$ для $x \in \mathbb{R}^n$, $(u[e])^*(x) = +\infty$ для $x \notin [0, \infty)^n$, $(u[e])^*(x) < +\infty$ для $x \in [0, \infty)^n$.

Отметим лишь, что последнее утверждение Предложения 1 следует, например, из того, что каково бы ни было $M > 0$, найдётся постоянная $A > 0$ такая, что

$$(u[e])^*(x) \leq \sum_{1 \leq j \leq n: x_j \neq 0} (x_j \ln \frac{x_j}{M} - x_j) + A, \quad x \in [0, \infty)^n.$$

Предложение 2. Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty, \\ x \in [0, \infty)^n}} \frac{(u[e])^*(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Доказательство. Для любых $x \in [0, \infty)^n$ и $t \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(u[e])^*(x) \geq \langle x, t \rangle - (u[e])(t).$$

Пользуясь этим неравенством, получаем, что для любого $M > 0$

$$(u[e])^*(x) \geq M\|x\| - u[e]\left(\frac{Mx}{\|x\|}\right), \quad x \in [0, \infty)^n \setminus \{0\}.$$

Отсюда утверждение следует. \square

Следующие три утверждения были доказаны в работе [1] (Lemma 6, Proposition 3, Proposition 4).

Предложение 3. Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n: \\ x_j \neq 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) \leq 0.$$

Предложение 4. Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^n (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Предложение 5. Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n: \\ x_j \neq 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0.$$

Предложения 4 и 5 можно усилить, пользуясь результатами Д. Асагры [2, 3]. Им была доказана следующая

Теорема А. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое и выпуклое. Для любой выпуклой функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественно аналитическая выпуклая функция $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in U$.

Таким образом, справедливо [3]

Следствие А. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое и выпуклое. Для любой выпуклой функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно дифференцируемая выпуклая функция $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in U$.

Пользуясь Предложением 4 и Следствием А, легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Предложение 6. Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^n (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Кроме того, справедливо следующее

Предложение 7. Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n: \\ x_j \neq 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0.$$

Доказательство. Согласно Предложению 6 наше утверждение справедливо для точек $x \in (0, \infty)^n$. Пусть теперь $x = (x_1, \dots, x_n)$ принадлежит границе $[0, \infty)^n$ и $x \neq 0$. Для простоты рассмотрим случай, когда первые k ($1 \leq k \leq n-1$) координат x положительны, а все другие равны 0. Для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \geq \sum_{j=1}^k x_j (\xi_j + \mu_j) - (u(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) + u^*(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})).$$

Из этого неравенства получаем, что

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \geq \sum_{j=1}^k x_j (\xi_j + \mu_j) -$$

$$-(u(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_k}, 0, \dots, 0) + u^*(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_k}, 0, \dots, 0)).$$

Определим функцию u_k на \mathbb{R}^k по правилу: $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \rightarrow u(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$. Отметим, что для любых $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k, \check{t} = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$u^*(\check{t}) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} (\langle \check{t}, v \rangle - u(v)) \leq$$

$$\leq \sup_{v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^k t_j v_j - u(v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0) \right) = \sup_{v \in \mathbb{R}^k} (\langle t, v \rangle - u_k(v)) = u_k^*(t).$$

Пользуясь этим и вышеприведённым неравенством, имеем для $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ и всех $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k), \tilde{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \geq \langle \tilde{x}, \tilde{\xi} \rangle - u_k[e](\tilde{\xi}) + \langle \tilde{x}, \tilde{\mu} \rangle - u_k^*[e](\tilde{\mu}).$$

Следовательно,

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \geq (u_k[e])^*(\tilde{x}) + (u_k^*[e])^*(\tilde{x}).$$

Так как по Предложению 6

$$(u_k[e])^*(\tilde{x}) + (u_k^*[e])^*(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^k (x_j \ln x_j - x_j),$$

то $(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \geq \sum_{j=1}^k (x_j \ln x_j - x_j)$. Отсюда и из Предложения 3 следует справедливость первого утверждения настоящего Предложения.

Если $x = 0$, то $(u[e])^*(0) = -\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} u[e](\xi) = -u(0)$, $(u^*[e])^*(0) = -\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} u^*[e](\xi) = -u^*(0) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} u(\xi) = u(0)$. Следовательно, $(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0$. \square

2.2. Асимптотика многомерного интеграла Лапласа. В работе [9] установлена следующая

Теорема В. Пусть E – выпуклая область в \mathbb{R}^n , h – выпуклая функция в E , $\tilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : h^*(y) < \infty\}$ и внутренность \tilde{E} – не пустое множество. Пусть

$$D^h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : h(x) + h^*(y) - \langle x, y \rangle \leq 1\},$$

$$D_y^h = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in D\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$e^{-1}V(D_y^h)e^{h^*(y)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{(x,y)-h(x)} dx \leq (1+n!)V(D_y^h)e^{h^*(y)}, \quad y \in \tilde{E}.$$

Здесь предполагается, что $h(x) = +\infty$ для $x \notin E$.

3. ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЁННОГО ПРОСТРАНСТВА

3.1. Вспомогательные леммы. При доказательстве теоремы будут полезны следующие четыре леммы.

Лемма 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда система $\{\exp\langle \lambda, z \rangle\}_{\lambda \in \mathbb{C}^n}$ полна в F_φ^2 .

Доказательство. Пусть S – линейный непрерывный функционал на пространстве F_φ^2 такой, что $S(e^{\langle \lambda, z \rangle}) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Поскольку для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $(D_\lambda^\alpha \hat{S})(\lambda) = S(z^\alpha e^{\langle z, \lambda \rangle})$, то из этого равенства получаем, что $S(z^\alpha) = 0$. Так как функция $\varphi(|z_1|, \dots, |z_n|)$ – выпуклая в \mathbb{C}^n , то из результата Б.А. Тейлора о весовой аппроксимации целых функций полиномами [4, Theorem 2] следует, что полиномы плотны в F_φ^2 . Значит, S – нулевой функционал. По известному следствию из теоремы Хана-Банаха получаем, что система $\{\exp\langle \lambda, z \rangle\}_{\lambda \in \mathbb{C}^n}$ полна в F_φ^2 . \square

Отметим, что система $\{z^\alpha\}_{|\alpha| \geq 0}$ ортогональна в F_φ^2 . Кроме того, она полна в F_φ^2 . Следовательно, система $\{z^\alpha\}_{|\alpha| \geq 0}$ – базис в F_φ^2 .

Лемма 2. Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$c_\alpha(\varphi) \geq \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

В частности, для любого $M > 0$ найдётся постоянная $C_M > 0$ такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $c_\alpha(\varphi) \geq C_M M^{|\alpha|}$.

Доказательство. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и для любых положительных чисел R_1, \dots, R_n имеем

$$\begin{aligned} c_\alpha(\varphi) &= (2\pi)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2\varphi(r_1, \dots, r_n)} dr_1 \cdots dr_n \geq \\ &\geq (2\pi)^n \int_0^{R_1} \cdots \int_0^{R_n} r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2\varphi(R_1, \dots, R_n)} dr_1 \cdots dr_n = \\ &= (2\pi)^n \frac{R_1^{2\alpha_1+2}}{2\alpha_1+2} \cdots \frac{R_n^{2\alpha_n+2}}{2\alpha_n+2} e^{-2\varphi(R_1, \dots, R_n)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для любых $t \in \mathbb{R}^n$

$$c_\alpha(\varphi) \geq \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{(2\tilde{\alpha}, t) - 2\varphi[e](t)}.$$

Следовательно,

$$c_\alpha(\varphi) \geq \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Теперь, пользуясь Предложением 2, легко получим и второе утверждение Леммы. \square

Лемма 3. Пусть целая функция в \mathbb{C}^n $f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha z^\alpha \in F_\varphi^2$. Тогда $\sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) < \infty$

и $\|f\|_\varphi^2 = \sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$.

Обратно, пусть последовательность $(a_\alpha)_{|\alpha| \geq 0}$ комплексных чисел a_α такова, что сходится ряд $\sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$. Тогда $f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{C}^n)$. Причём, $f \in F_\varphi^2$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha z^\alpha$ — целая функция в \mathbb{C}^n из класса F_φ^2 . Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_\varphi^2 &= \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(\text{abs } z)} d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha z^\alpha \sum_{|\beta| \geq 0} \bar{a}_\beta \bar{z}^\beta e^{-2\varphi(\text{abs } z)} d\mu_n(z) = \\ &= \sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha|^2 \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \dots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(\text{abs } z)} d\mu_n(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi). \end{aligned}$$

Обратно, из сходимости ряда $\sum_{|\alpha| \geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ и Леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся постоянная $c_\varepsilon > 0$ такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $|a_\alpha| \leq c_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|}$. Это означает, что $f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha z^\alpha$ — целая функция в \mathbb{C}^n . Легко видеть, что $f \in F_\varphi^2$. \square

Лемма 4. Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(2\pi)^n e^{-1} V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})} \leq c_\alpha(\varphi) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда

$$\begin{aligned} c_\alpha(\varphi) &= (2\pi)^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty r_1^{2\alpha_1+1} \dots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2\varphi(r_1, \dots, r_n)} dr_1 \dots dr_n = \\ &= (2\pi)^n \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty e^{(2\alpha_1+2)t_1 + \dots + (2\alpha_n+2)t_n - 2\varphi[e](t_1, \dots, t_n)} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

То есть

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{(2\tilde{\alpha}, t) - 2\varphi[e](t)} dt.$$

По Теореме В имеем

$$(2\pi)^n e^{-1} V(D_{2\tilde{\alpha}}^{2\varphi[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})} \leq c_\alpha(\varphi) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D_{2\tilde{\alpha}}^{2\varphi[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}$$

Так как $D_{2\tilde{\alpha}}^{2\varphi[e]} = D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(\frac{1}{2})$, то отсюда и из предыдущего неравенства следует справедливость нашего утверждения. \square

3.2. Доказательство Теоремы. Покажем, что отображение \mathcal{L} действует из $(F_\varphi^2)^*$ в F_φ^2 . Пусть $S \in (F_\varphi^2)^*$. Тогда найдётся функция $g_S \in F_\varphi^2$ такая, что $S(f) = (f, g_S)_\varphi$, то есть

$$S(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g_S(z)} e^{-2\varphi(\text{abs } z)} d\mu_n(z), \quad f \in F_\varphi^2.$$

При этом, $\|S\| = \|g_S\|_\varphi$. Если $g_S(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} b_\alpha z^\alpha$, то $\hat{S}(\lambda) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{c_\alpha(\varphi) \bar{b}_\alpha}{\alpha!} \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Следовательно,

$$\|\hat{S}\|_{\varphi^*}^2 = \sum_{|\alpha| \geq 0} \left(\frac{c_\alpha(\varphi) |b_\alpha|}{\alpha!} \right)^2 c_\alpha(\varphi^*). \quad (1)$$

По Лемме 3 для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$c_\alpha(\varphi) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})},$$

$$c_\alpha(\varphi^*) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2)) e^{2(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Следовательно, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$c_\alpha(\varphi) c_\alpha(\varphi^*) \leq (2\pi)^{2n} (1+n!)^2 V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + 2(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Согласно Предложению 6 для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}) = \sum_{j=1}^n ((\alpha_j + 1) \ln(\alpha_j + 1) - (\alpha_j + 1)).$$

Так как по формуле Стирлинга [10, С. 792] для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$(m + 1) \ln(m + 1) - (m + 1) = \ln \Gamma(m + 1) - \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln(m + 1) - \frac{\theta}{12(m + 1)},$$

где $\theta \in (0, 1)$ зависит от m , то

$$(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}) = -n \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{j=1}^n (\ln \Gamma(\alpha_j + 1) + \frac{1}{2} \ln(\alpha_j + 1) - \frac{\theta_j}{12(\alpha_j + 1)}),$$

где $\theta_j \in (0, 1)$ зависит от α_j . Тогда

$$\frac{e^{2((\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}))}}{\alpha!^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n (\alpha_j + 1) e^{-\frac{\theta_j}{6(\alpha_j + 1)}}. \quad (2)$$

Таким образом,

$$\frac{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}{\alpha!^2} \leq (2\pi)^n (1 + n!)^2 V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2)) \prod_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j.$$

Пользуясь условием на φ , получаем, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}{\alpha!^2} \leq (2\pi)^n (1 + n!)^2 K.$$

Отсюда и из (1), полагая $M_1 = (2\pi)^n (1 + n!)^2 K$, получаем

$$\|\hat{S}\|_{\varphi^*}^2 \leq M_1 \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha(\varphi) |b_\alpha|^2 = M_1 \|g_S\|_{\varphi}^2 = M_1 \|S\|^2.$$

Значит, $\hat{S} \in F_{\varphi^*}^2$. Кроме того, из последней оценки следует, что линейное отображение \mathcal{L} действует из $(F_{\varphi}^2)^*$ в $F_{\varphi^*}^2$ непрерывно.

Отметим, что отображение \mathcal{L} действует из $(F_{\varphi}^2)^*$ в $F_{\varphi^*}^2$ инъективно, поскольку по Лемме 1 система $\{\exp\langle \lambda, z \rangle\}_{\lambda \in \mathbb{C}^n}$ полна в F_{φ}^2 .

Покажем, что отображение \mathcal{L} действует из $(F_{\varphi}^2)^*$ на $F_{\varphi^*}^2$. Пусть $G \in F_{\varphi^*}^2$. Пользуясь представлением целой функции G в виде ряда Тейлора $G(\lambda) = \sum_{|\alpha| \geq 0} d_\alpha \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, имеем

$$\|G\|_{\varphi^*}^2 = \sum_{|\alpha| \geq 0} |d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*). \text{ Для каждого } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ определим числа } g_\alpha = \frac{\overline{d_\alpha} \alpha!}{c_\alpha(\varphi)} \text{ и рассмотрим}$$

вопрос о сходимости ряда $\sum_{|\alpha| \geq 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$. Имеем

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \left| \frac{\overline{d_\alpha} \alpha!}{c_\alpha(\varphi)} \right|^2 c_\alpha(\varphi) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} |d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*).$$

По Лемме 4 для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$c_\alpha(\varphi) \geq e^{-1} V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})},$$

$$c_\alpha(\varphi^*) \geq e^{-1} V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2)) e^{2(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Следовательно, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*) \geq e^{-2} V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2)) V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2)) e^{2((\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}))}.$$

Отсюда и из равенства (2) для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} \leq \frac{e^2(2e\pi)^n}{V(D_\alpha^{\varphi[e]}(1/2))V(D_\alpha^{\varphi^*[e]}(1/2)) \prod_{j=1}^n (\alpha_j + 1)}.$$

Пользуясь условием на φ , получаем, что $\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} \leq Ke^2(2e\pi)^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Следовательно, для рассматриваемого ряда имеем

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) \leq Ke^2(2e\pi)^n \sum_{|\alpha| \geq 0} |d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*) = Ke^2(2e\pi)^n \|G\|_{\varphi^*}^2. \quad (3)$$

Итак, ряд $\sum_{|\alpha| \geq 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ сходится. Но тогда по Лемме 3 функция $g(\lambda) = \sum_{|\alpha| \geq 0} g_\alpha \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, является целой, причём, в силу (3) g принадлежит F_φ^2 и

$$\|g\|_\varphi^2 \leq Ke^2(2e\pi)^n \|G\|_{\varphi^*}^2. \quad (4)$$

Определим функционал S на F_φ^2 формулой

$$S(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)} e^{-2\varphi(absz)} d\mu_n(z), \quad f \in F_\varphi^2.$$

Очевидно, S – линейный непрерывный функционал на F_φ^2 . Причём, $\hat{S} = G$. Поскольку $\|S\| = \|g\|_\varphi$, то оценка (4) показывает, что обратное отображение \mathcal{L}^{-1} непрерывно. Таким образом, \mathcal{L} устанавливает изоморфизм между пространствами $(F_\varphi^2)^*$ и $F_{\varphi^*}^2$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Kh. Musin *On a space of entire functions rapidly decreasing on R^n and its Fourier transform* // Concrete Operators. 2015. Volume 2, Issue 1. P. 120–138.
2. D. Azagra *Global and fine approximation of convex functions* // Proc. London Math. Soc. (2013) 107 (4). P. 799–824.
3. D. Azagra *Global approximation of convex functions*. arXiv:1112.1042v7.
4. В.А. Тейлор *On weighted polynomial approximation of entire functions* // Pacific Journal of Mathematics. 1971. V. 36, №2. P. 523–539.
5. Напалков В.В., Попёнов С.В. *О преобразовании Лапласа функционалов в весовом пространстве Бергмана целых функций в \mathbb{C}^n* // Доклады Академии наук. 1997. Т. 352, №5. С. 595–597.
6. Попёнов С.В. *О преобразовании Лапласа функционалов в некоторых весовых пространствах Бергмана в \mathbb{C}^n* // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Уфа, 1996. Т. 2. Комплексный анализ. С. 125–132.
7. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Исследования по теории приближений. Уфа, 1989. С. 132–137.
8. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // Доклады Академии наук. Т. 413. № 1. 2007. С. 20–22.
9. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимск. матем. журн., 2010. Том 2, № 1. С. 3–16.
10. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II*. М.: Наука, 1970.

Ильдар Хамитович Мусин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru