ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 9. № 2 (2017). С. 94-103.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.У. ХУБИЕВ

Аннотация. В работе исследуется аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. Доказана теорема единственности и существования решения исследуемой задачи. Единственность решения доказывается с помощью принципа максимума, существование – методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженные уравнения, уравнения смешанного типа, гиперболо-параболические уравнения, задача Трикоми, краевая задача.

Mathematics Subject Classification: 35M12

1. Введение

Уравнения смешанного типа занимают важное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных благодаря их теоретической и прикладной значимости. Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются нагруженные уравнения смешанного типа. Исследованию локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными посвящена монография А.М. Нахушева [1].

Впервые аналог задачи Трикоми для модельного гиперболо-параболического уравнения был изучен в работе [2]. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений гиперболо-параболического типа, в том числе обратные задачи и задачи для вырождающихся уравнений исследовались в работах многих авторов (см., например, [3]–[6]).

В настоящее время теория краевых задач и теория обратных задач для уравнений гиперболо-параболического типа, в том числе для вырождающихся уравнений продолжает интенсивно развиваться. В этой связи укажем следующие работы. В [7] доказывается априорная оценка классического решения аналога задачи Трикоми для неоднородного модельного уравнения гиперболо-параболического типа с правой частью из класса Гельдера. В [8] для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа в прямоугольной области изучена обратная задача, связанная с поиском неизвестной правой части, установлен критерий единственности решения задачи, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. В [9] исследуется нелокальная внутреннекраевая задача с оператором Эрдейи-Кобера для модельного уравнения гиперболо-параболического типа. В [10] для вырождающегося в области гиперболичности уравнения в прямоугольной области методом спектрального анализа установлен

K.U. Khubiev, Analogue of Tricomi problems for characteristicly loaded hyperbolic-parabolic equations with variable coefficients.

Поступила 7 июля 2016 г.

критерий единственности решения задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения, построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи, установлена устойчивость решения по нелокальному условию. В [11], [12] исследованы нелокальные краевые задачи с условием типа условия Бицадзе–Самарского для вырождающегося уравнения гиперболо-параболического типа второго рода. В [13] для неоднородного гиперболо-параболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа изучается краевая задача с граничными условиями первого рода на характеристиках в параболической и гиперболической частях области задания уравнения, и с условием третьего рода на нехарактеристической части границы в параболической части.

Отметим также работы для нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа второго и третьего порядков в различных областях [14]–[19]. В [14] исследуются краевые задачи для модельных нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа второго порядка, когда линия изменения типа является нехарактеристической, и третьего порядка, когда линия изменения типа является характеристической. В [15] доказана однозначная разрешимость краевых задач для нагруженного дифференциального уравнения третьего порядка с гиперболическим и параболо-гиперболическим оператором. В [16] для уравнения гиперболо-параболического типа исследована однозначная разрешимость нелокальной задачи с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии. В [17], [18] для различных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа с нагруженными слагаемыми установлены критерии единственности решения начально-граничной задачи в прямоугольной области. Решения построены в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. В [19] исследован аналог задачи Трикоми для нагруженного модельного уравнения гиперболо-параболического типа с дробной производной при нагрузке.

В настоящей работе рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + a_1 u_x + c_1 u + d_1 u(x,0) = f_1, \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u + d_2 u(x+y,0) + e_2 u(x-y,0) = f_2, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = l$, $y = h > 0$ соответственно, и характеристиками $AC: \ x + y = 0$, $BC: \ x - y = l$. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J – интервал $0 < x < l$ прямой $y = 0$, $a_i = a_i(x,y)$, $c_i = c_i(x,y)$, $d_i = d_i(x,y)$, $f_i = f_i(x,y)$, $b_2 = b_2(x,y)$, $e_2 = e_2(x,y)$ – заданные функции из класса $C(\bar{\Omega}_i)$, $i = 1,2$.

Регулярным в области Ω *решением уравнения* (1.1) назовем функцию $u\,(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^2_x(\Omega_1)$, $u_x, u_y \in L(J)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задача T. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\,(0,y) = \varphi_0\,(y)\,, \quad u\,(l,y) = \varphi_l\,(y)\,, \quad 0 \le y \le h, \tag{1.2}$$

$$u\,(x/2, \ -x/2) = \psi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l, \tag{1.3}$$

где $\varphi_0(y), \varphi_l(y), \psi(x)-$ *заданные функции,* $\varphi_0(y), \varphi_l(y) \in C[0,h]$, $\psi(x) \in C[0,l] \cap C^2]0,l[$, *причем* $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

В работах [20], [21] для задачи T при $e_2 \equiv 0$ было доказано существование и единственность решения исследуемой задачи при очень сильных ограничениях на функцию d_2, а точнее в случае, если функция d_2 определенным образом зависела от функций a_2, b_2, c_2. В данной работе эти условия существенно ослаблены, причем при $d_1 = d_2 = e_2 \equiv 0$ полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [3].

2. Теорема существования и единственности решения

Для задачи T справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть*

1) в $\bar{\Omega}_1$ *функции* $a_1(x,y), c_1(x,y), d_1(x,y), f_1(x,y)$ *непрерывны и удовлетворяют по* x *условию Гельдера,* $a_1(x,0) \in C^1[0,l]$, *кроме того*

$$c_1(x,y) + d_1(x,y) < 0, \quad d_1(x,y) \geq 0; \tag{2.1}$$

2) функции $a_2(x,y), b_2(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}_2)$, $c_2(x,y), d_2(x,y), e_2(x,y), f_2(x,y) \in C(\bar{\Omega}_2)$, *функция* $u(x,y)$ *обладает свойством* $\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u \in C\Big(\bar{\Omega}_2 \setminus \bar{J}\Big)$, *кроме того, выполняются условия*

$$a_2^2 - b_2^2 + 2a_{2x} + 2b_{2x} + 2a_{2y} + 2b_{2y} - 4c_2 \geq 0, \tag{2.2}$$

$$a_2(x,y) + b_2(x,y) > 0,\ c_2(x,y) + d_2(x,y) + e_2(x,y) \geq 0,\ d_2(x,y) \leq 0,\ e_2(x,y) \leq 0. \tag{2.3}$$

Тогда решение задачи T существует и единственно.

Доказательство. Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи T. Обозначим через

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_y(x,0) = \nu(x). \tag{2.4}$$

Тогда из условий задачи следует, что $\tau(0) = \varphi_0(0) = \psi(0)$, $\tau(l) = \varphi_l(0)$, $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$, $\nu(x) \in C(J) \cap L(J)$.

2.1. Единственность решения задачи T.

Рассмотрим однородную задачу T, т.е. $\varphi_0(y) = \varphi_l(y) = \psi(x) \equiv 0$, $f_1(x,y) = f_2(x,y) \equiv 0$. В Ω_2 уравнение (1.1) в характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ примет вид

$$v_{\xi\eta} + pv_\xi + qv_\eta + rv + \lambda v(\xi,\xi) + \mu v(\eta,\eta) = 0, \tag{2.5}$$

где $4p = a_2 + b_2$, $4q = a_2 - b_2$, $4r = c_2$, $4\lambda = d_2$, $4\mu = e_2$, $v = v(\xi,\eta) = u(x,y)$, а $\Omega^- \cup AB$ перейдет в область $D = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < l\}$.

Следуя [22], покажем, что положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\bar{D}$ может достигаться только на отрезке $0 \leq \xi = \eta \leq l$. Действительно, пусть (ε,δ) – произвольным образом фиксированная точка из области D, $\varepsilon,\delta = const > 0$. Как следует из условий теоремы 2.1, функция p в области D имеет непрерывную производную по ξ, а q – непрерывна в D, и уравнение (2.5) в классе функций $v = v(\xi,\eta)$, имеющих в D первые и вторые смешанные производные, эквивалентно уравнению

$$(q_1 v_\eta + p_1 v)_\xi + r_1 v + \lambda_1 v(\xi,\xi) + \mu_1 v(\eta,\eta) = 0$$

или нагруженному уравнению первого порядка

$$q_1(\xi,\eta)v_\eta(\xi,\eta) + p_1(\xi,\eta)v(\xi,\eta) + \int_\varepsilon^\xi r_1(\xi_1,\eta)v(\xi_1,\eta)d\xi_1 =$$

$$= q_1(\varepsilon,\eta)v_\eta(\varepsilon,\eta) + p_1(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta) - \int_\varepsilon^\xi \lambda_1(\xi_1,\eta)v(\xi_1,\xi_1)d\xi_1 - \int_\varepsilon^\xi \mu_1(\xi_1,\eta)v(\eta,\eta)d\xi_1, \tag{2.6}$$

где $r_1 = rq_1 - p_{1\xi}$, $p_1 = pq_1$, $q_1 = \exp\int_\delta^\xi q(t,\eta)dt$, $\lambda_1 = \lambda q_1$, $\mu_1 = \mu q_1$, $0 < \xi < \eta < l$.

Перепишем (2.6) в следующем виде:

$$q_1(\xi,\eta)v_\eta(\xi,\eta) = \int_\varepsilon^\xi [v(\xi,\eta) - v(\xi_1,\eta)]r_1(\xi_1,\eta)d\xi_1 + q_1(\varepsilon,\eta)\Big[v_\eta(\varepsilon,\eta) + p(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta)\Big] +$$

$$+\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\xi_1)]\lambda_1(\xi_1,\eta)d\xi_1+\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[v(\xi,\eta)-v(\eta,\eta)]\mu_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-$$

$$-v(\xi,\eta)\Big[p_1(\xi,\eta)+\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[r(\xi_1,\eta)q_1(\xi_1,\eta)+\lambda_1(\xi_1,\eta)+\mu_1(\xi_1,\eta)]d\xi_1\Big]=$$

$$=\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\eta)]r_1(\xi_1,\eta)d\xi_1+q_1(\varepsilon,\eta)\Big[v_\eta(\varepsilon,\eta)+p(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta)\Big]+$$

$$+\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\xi_1)]\lambda_1(\xi_1,\eta)d\xi_1+\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[v(\xi,\eta)-v(\eta,\eta)]\mu_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-$$

$$-v(\xi,\eta)\Big[p_1(\varepsilon,\eta)+\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}[r(\xi_1,\eta)+\lambda(\xi_1,\eta)+\mu(\xi_1,\eta)]q_1(\xi_1,\eta)d\xi_1\Big]. \tag{2.7}$$

Допустим теперь, что положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$, являющейся регулярным решением уравнения (2.5), в $\bar{D}$ достигается в точке (ξ_0,η_0), $0<\xi_0<\eta_0\le l$. Из (2.7) при $\xi=\xi_0,\eta=\eta_0$, $\varepsilon\to 0$, имеем:

$$q_1(\xi_0,\eta_0)v_\eta(\xi_0,\eta_0)=\int\limits_{0}^{\xi_0}[v(\xi_0,\eta_0)-v(\xi_1,\eta_0)]r_1(\xi_1,\eta_0)d\xi_1+$$

$$+\int\limits_{0}^{\xi_0}[v(\xi_0,\eta_0)-v(\xi_1,\xi_1)]\lambda_1(\xi_1,\eta_0)d\xi_1+\int\limits_{0}^{\xi_0}[v(\xi_0,\eta_0)-v(\eta_0,\eta_0)]\mu_1(\xi_1,\eta_0)d\xi_1-$$

$$-v(\xi_0,\eta_0)\Big[p_1(\xi_0,\eta_0)+\int\limits_{0}^{\xi}[r(\xi_1,\eta_0)+\lambda(\xi_1,\eta_0)+\mu(\xi_1,\eta_0)]q_1(\xi_1,\eta_0)d\xi_1\Big]+$$

$$+q_1(0,\eta)\Big[v_\eta(0,\eta)+p(0,\eta)v(0,\eta)\Big]. \tag{2.8}$$

Из условий теоремы 2.1 следует, что p,p_ξ,q,r,λ и μ принадлежат $C(0\le\xi<\eta\le l)$, $v_\eta\in C(0\le\xi<\eta\le l)$, кроме того, из (2.2), (2.3) получим, что

$$r_1(\xi,\eta)\le 0,\quad \lambda(\xi,\eta)\le 0,\quad \mu(\xi,\eta)\le 0,$$

$$p_1(\xi,\eta)+\int\limits_{0}^{\xi}\Big[r(\xi_1,\eta)+\lambda(\xi_1,\eta)+\mu(\xi_1,\eta)\Big]q_1(\xi_1,\eta)d\xi_1>0,$$

а из того, что $\psi(x)\equiv 0$ следует, что

$$v_\eta(0,\eta)+p(0,\eta)v(0,\eta)=0.$$

Таким образом, учитывая условия теоремы 2.1 и то что $q_1(\xi,\eta)>0$, из (2.8) получаем, что $v_\eta(\xi_0,\eta_0)<0$. Но это противоречит сделанному допущению, так как в точке (ξ_0,η_0) положительного максимума $v_\eta(\xi_0,\eta_0)\ge 0$. Следовательно, положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\bar{D}$ достигается только на отрезке $0\le\xi=\eta\le l$, и при выполнении условий теоремы 2.1 решение $u(x,y)$ уравнения (1.1) при $y<0$ свой положительный максимум в $\bar{\Omega}_2$ принимает во внутренней точке $(x_0,0)$ отрезка AB, причем в точке положительного максимума

$$\nu(x_0)\ge 0. \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. Отметим, что при $d_2 = e_2 \equiv 0$ полученный принцип экстремума для нагруженного гиперболического уравнения совпадает с принципом экстремума Агмона-Ниренберга-Проттера, сформулированным для гиперболического уравнения в [22], и полученные условия согласуются с условиями, полученными в работе [23]. Краткий обзор результатов исследований по принципу максимума для уравнений смешанного типа приведен в работе [24].

Покажем, аналогично [22], что при $y > 0$ положительный максимум функции $u(x,y)$ в $\bar{\Omega}^+$ может достигается только на AA_0, AB, BB_0. Пусть регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1.1) при $y > 0$ достигает положительного максимума в точке $(x_0,y_0) \in \Omega^+$. Необходимое условие максимума функции u в точке (x_0,y_0) имеет следующий вид: $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_{xx} \leq 0$. Принимая это во внимание, из (1.1) находим

$$c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) = -u_{xx}(x_0,y_0) \geq 0.$$

С другой стороны, при выполнении условий (2.1) теоремы 2.1 $c_1 + d_1 < 0, \quad d_1 \geq 0$, получим

$$c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) =$$

$$= c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) - d_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) =$$

$$= [c_1(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)]u(x_0,y_0) - d_1(x_0,y_0)[u(x_0,y_0) - u(x_0,0)] < 0.$$

Полученное противоречие – результат неверного допущения, и $(x_0,y_0) \notin \Omega^+$. Утверждение, что точка максимума не принадлежит A_0B_0, доказывается также, как и в случае, когда $y_0 < h$, но с той лишь разницей, что необходимое условие экстремума $u_y(x_0,y_0) = 0$ при $y_0 < h$ заменяется условием $u_y(x_0,y_0) \geq 0$ при $y_0 = h$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2.1 следует, что положительный максимум функции $u(x,y)$ может достигаться только на отрезках AA_0, BB_0, AB.

Покажем теперь, что для функции $u(x,y)$ любая внутренняя точка $(x_0,0)$ отрезка AB не может быть точкой положительного максимума. В самом деле, в силу непрерывности производных u_x, u_y, u_{xx} из уравнения (1.1) мы можем перейти к пределу при $y \to +0$ и тогда получим

$$\tau''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + [c_1(x,0) + d_1(x,0)]\tau(x) - \nu(x) = 0. \tag{2.10}$$

Из (2.10) в силу условий (2.1) теоремы 2.1 в точке положительного максимума имеем $\nu(x_0) < 0$, что противоречит неравенству (2.9), откуда следует, что функция $u(x,y)$ не может достигать положительного максимума во внутренней точке $(x_0,0)$ отрезка AB. Таким образом, при выполнении условий теоремы 2.1 положительный максимум функции $u(x,y)$ может достигаться только на отрезках AA_0 и BB_0. Так как $\varphi_0(y) = \varphi_l(y) \equiv 0$, то заключаем, что максимум функции $u(x,y) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Аналогично доказывается, что функция $u(x,y)$ не может достигать отрицательного минимума, и минимум функции $u(x,y) = 0$. Следовательно, однородная задача, соответствующая задаче Т, имеет только тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$, из чего заключаем единственность решения задачи Т.

2.2. Существование решения задачи Т. Решая задачу Коши [25] для уравнения (1.1) в области Ω_2 как для неоднородного волнового уравнения с правой частью $f_2(x,y) - d_2(x,y)\tau(x+y) - e_2(x,y)\tau(x-y)$, получим

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[R(x,y;x+y,0)\tau(x+y) + R(x,y;x-y,0)\tau(x-y)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left[R_\eta(x,y;\xi,0) + b_2(\xi,0)R(x,y;\xi,0)\right]\tau(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}R(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} R(x,y;\xi,\eta)\Big[f_2(\xi,\eta)-d_2(\xi,\eta)\tau(\xi+\eta)-e_2(\xi,\eta)\tau(\xi-\eta)\Big]d\xi d\eta, \tag{2.11}$$

где $R(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса

$$R_1=R(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=x+y-\xi}=exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\xi}\left[a_2(t,x+y-t)+b_2(t,x+y-t)\right]dt\right),$$

$$R_2=R(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=\xi-x+y}=exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\xi}\left[a_2(t,t-x+y)+b_2(t,t-x+y)\right]dt\right),$$

$$R(x,y;x,y)=1,$$

для уравнения

$$R_{\xi\xi}-R_{\eta\eta}-(a_2R)_\xi-(b_2R)_\eta+c_2R=0. \tag{2.12}$$

Удовлетворяя (2.11) условию (1.3), получим

$$R_2(x/2,-x/2;x,0)\tau(x)+\int\limits_{0}^{x}\left[R_\eta(x/2,-x/2;\xi,0)+b_2(\xi,0)R(x/2,-x/2;\xi,0)\right]\tau(\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-\eta}^{x+\eta} d_2(\xi,\eta)R(x/2,-x/2;\xi,\eta)\tau(\xi+\eta)-e_2(\xi,\eta)R(x/2,-x/2;\xi,\eta)\tau(\xi-\eta)d\xi d\eta=$$

$$=2\psi(x)-R_1(x/2,-x/2;0,0)\psi(0)+\int\limits_{0}^{-x/2}\int\limits_{x+\eta}^{-\eta}R(x/2,-x/2;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{0}^{x}R(x/2,-x/2;\xi,0)\nu(\xi)d\xi. \tag{2.13}$$

Меняя пределы интегрирования в двойных интегралах, получим

$$\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-\eta}^{x+\eta} d_2(\xi,\eta)R(x/2,-x/2;\xi,\eta)\tau(\xi+\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}\tau(\xi)\int\limits_{\frac{\xi-x}{2}}^{0} d_2(\xi-\eta,\eta)R(x/2,-x/2;\xi-\eta,\eta)d\eta d\xi,$$

$$\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-\eta}^{x+\eta} e_2(\xi,\eta)R(x/2,-x/2;\xi,\eta)\tau(\xi-\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}\tau(\xi)\int\limits_{-\xi/2}^{0} e_2(\xi+\eta,\eta)R(x/2,-x/2;\xi+\eta,\eta)d\eta d\xi,$$

и обозначив

$$K_1(x,\xi)=\int\limits_{\frac{\xi-x}{2}}^{0} d_2(\xi-\eta,\eta)R(x/2,-x/2;\xi-\eta,\eta)d\eta+\int\limits_{-\xi/2}^{0} e_2(\xi+\eta,\eta)R(x/2,-x/2;\xi+\eta,\eta)d\eta,$$

$$K(x,\xi)=\frac{K_1(x,\xi)-R_\eta(x/2,-x/2;\xi,0)-b_2(\xi,0)R(x/2,-x/2;\xi,0)}{R_2(x/2,-x/2;x,0)},$$

$$g_1(x)=\frac{2\psi(x)-R_1(x/2,-x/2;0,0)\psi(0)+\int\limits_0^{-x/2}\int\limits_{x+\eta}^{-\eta}R(x/2,-x/2;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\xi d\eta}{R_2(x/2,-x/2;x,0)},$$

$$g_2(x)=\int\limits_0^x\frac{R(x/2,-x/2;,\xi,0)\ \nu(\xi)}{R_2(x/2,-x/2;x,0)}d\xi,\quad g(x)=g_1(x)+g_2(x),$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(x)-\int\limits_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi=g(x).$$

После обращения полученного интегрального уравнения относительно $\tau(x)$ будем иметь первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 в виде

$$\tau(x)-\int\limits_0^x T(x,\xi)\nu(\xi)d\xi=\rho(x), \tag{2.14}$$

где

$$T(x,\xi)=\frac{R(x/2,-x/2,\xi,0)+\int\limits_\xi^x\Gamma(x,t)R(t/2,-t/2;\xi,0)dt}{R_2(x/2,-x/2;x,0)},$$

$\rho(x)=g_1(x)+\int\limits_0^x\Gamma(x,\xi)g_1(\xi)d\xi$, а $\Gamma(x,\xi)$ – резольвента ядра $K(x,\xi)$.

Замечание 2.2. Отметим, что для уравнения (1.1) в Ω_2 при $d_2=e_2=f_2\equiv 0$ аналогичные соотношения были получены в [3], [26].

Для неоднородного уравнения (1.1) соотношение (2.10) примет вид:

$$\tau''(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+\left[c_1(x,0)+d_1(x,0)\right]\tau(x)=f_1(x,0)+\nu(x). \tag{2.15}$$

Поэтому второе функциональное соотношение между функциями $\tau\,(x)$ и $\nu\,(x)$, принесенное из области Ω_1, определим как решение уравнения (2.15), удовлетворяющее краевым условиям

$$\tau(0)=\varphi_0(0),\quad \tau(l)=\varphi_l(0). \tag{2.16}$$

При выполнении условий теоремы 2.1 на гладкость функций a_1,c_1,d_1,f_1 оно имеет вид

$$\tau(x)=f(x)-\int\limits_0^l G(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \tag{2.17}$$

где

$$f(x) = \varphi_0(0) + x\{\varphi_l(0) - \varphi_0(0)\} + \int\limits_0^l \Big[G(x,\xi)\Big(f_1(\xi,0)-$$

$$-\{a_1(\xi,0) + \xi[c_1(\xi,0) + d_1(\xi,0)]\}\{\varphi_l(0) - \varphi_0(0)\} - \varphi_0(0)[c_1(\xi,0) + d_1(\xi,0)]\Big)\Big]d\xi,$$

а $G(x,\xi)$ – функция Грина, обладающая свойствами [25]

а) в промежутках $0 \le x < \xi$, $\xi < x \le l$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению, сопряженному с уравнением (2.15), кроме того, при каждом фиксированном ξ, $0 < \xi < l$, удовлетворяет как функция от x однородным краевым условиям (2.16);

б) в точке $\xi = x$ как функция ξ сама непрерывна, а ее первая производная по x имеет скачок, причем $G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) = 1$.

Исключая $\tau(x)$ из (2.14) и (2.17), получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x T(x,\xi)\nu(\xi)d\xi + \rho(x) = f(x) - \int\limits_0^l G(x,\xi)\nu(\xi)d\xi,$$

из которого после дифференцирования по x с учетом того, что $T(x,x) \equiv 1$ имеем

$$\nu(x) - \int\limits_0^x T_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi = f'(x) - \rho'(x) - \int\limits_0^l G_x(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \qquad (2.18)$$

где $T_1(x,\xi) = \frac{T_x(x,\xi)}{R_2(x/2,-x/2,x,0)}$. Обращая уравнение (2.18), получим

$$\nu(x) + \int\limits_0^l K_2(x,t)\nu(t)dt = \sigma(x). \qquad (2.19)$$

Здесь

$$K_2(x,t) = G_x(x,t) + \int\limits_0^x \Gamma_1(x,\xi)G_x(\xi,t)d\xi,$$

$$\sigma(x) = f'(x) - \rho'(x) + \int\limits_0^x \Gamma_1(x,\xi)\left[f'(\xi) - \rho'(\xi)\right]d\xi,$$

а $\Gamma_1(x,\xi)$ – резольвента ядра $T_1(x,\xi)$.

Так как мы будем искать $\nu(x)$ в классе непрерывных функций, интегрируемых на интервале, то $\sigma(x)$ тоже должно быть в этом же классе. В силу свойств функций $G(x,\xi)$ и $R(x,y,\xi,\eta)$ заключаем, что функция $K_2(x,\xi)$ в промежутке $0 \le x < \xi$, $\xi < x \le l$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x, а $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема в $0 < x < l$.

Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.19) в классе непрерывных функций, интегрируемых на интервале, следует из единственности решения задачи T.

Из (2.19), принимая во внимание условия, наложенные на коэффициенты уравнения (2.15), вышеприведенные свойства функции Грина, а также равенство

$$\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\big[a_1(x,0)G(x,\xi)\big] - [c_1(x,0) + d_1(x,0)]G(x,\xi),$$

верное при $x \neq \xi$, имеем:

$$\nu'(x) = \sigma'(x) + \nu(x) - \int\limits_0^l \Big(\frac{d}{dx}\big[a_1(x,0)G(x,t)\big] - [c_1(x,0) + d_1(x,0)]G(x,t)\Big)\nu(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^l \Gamma_1(x,x)G_x(x,t)\nu(t)dt - \int\limits_0^l \int\limits_0^x \Gamma_{1x}(x,\xi)G_x(\xi,t)\nu(t)d\xi dt,$$

откуда нетрудно заключить, что $\nu(x) \in C^1(J)$.

После нахождения $\nu(x)$ функция $\tau(x)$ находится из (2.14) или (2.17), причем функция $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$. Далее решение задачи T в области Ω сводится к решению задачи Коши для уравнения (1.1) в Ω_2, т.е. задается формулой (2.11), а в Ω_1, учитывая, что $a_1(x,y)$, $c_1(x,y)$, $d_1(x,y)$, $f_1(x,y)$ непрерывны и удовлетворяют по x условию Гельдера, к решению первой краевой задачи для уравнения (1.1) в Ω_1 [27]. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.3. Заметим, что условие (2.2) теоремы 2.1 при $|a_2| = |b_2| \equiv const$ не имеет места, если $c_2 \neq 0$, так же, как и в [3], поэтому этот случай должен быть рассмотрен отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применения.* М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Золина Л.А. *О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа* // Жур. вычис. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А.С., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Ташкент: ФАН. 1986. 220 с.
4. Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
5. Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Елеев В.А. *О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22–29.
7. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. *Уточнение априорной оценки решения одной известной задачи для параболо-гиперболического уравнения* // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 591–592.
8. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918.
9. Нахушева З.А. *Нелокальная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и его аналогов в теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1332–1339.
10. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356–365.
11. Исламов Н.Б. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода* // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7. № 1. С. 31–45.
12. Салахитдинов М.С., Исламов Н.Б. *Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода* // Известия вузов. Математика. 2015. № 6. С. 43–52.
13. Гуляев Д.А. *О неоднородной задаче для параболо-гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1423–1425.
14. Елеев В.А. *О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 230–237.

15. Балтаева У.И., Исломов И.Б. *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 3. С. 15–25.
16. Тарасенко А.В. *О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения* // Известия вузов. Математика. 2013. № 1. С. 73–81.
17. Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 66–73.
18. Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми* // Известия вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31–42.
19. Хубиев К.У. *Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо–параболического типа с дробной производной при нагрузке* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 3. С. 54–59.
20. Хубиев К.У. *Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа с переменными коэффициентами* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2006. Т. 8. № 2. С. 69–72.
21. Хубиев К.У. *Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. 2007. № 2(15). С. 155–158.
22. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
23. S. Agmon, L. Nirenberg, M. Protter *A maxitum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equtions of mixed elliptic-hyperbolic type*// Communications on pure and applied mathematics. 1953. V. VI. P. 455–470.
24. Сабитов К.Б. *О принципе максимума для уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 1967–1976.
25. Соболев С.Л. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 444 с.
26. Пулькин С.П. *Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Докл. АН СССР, 1958. Т. 118. № 1. С. 38–41.
27. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3(105). С. 3–141.

Казбек Узеирович Хубиев,
Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89 А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: khubiev_math@mail.ru