ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 4 (2016). С. 135-146.

УДК 517.956

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

А.В. НЕКЛЮДОВ

Аннотация. В полубесконечном цилиндре расматривается эллиптическое уравнение второго порядка, содержащее младший член. На боковой поверхности цилиндра задано однородное условие Неймана. Показано, что любое ограниченное решение стремится на бесконечности к постоянной, причем при выполнении условия типа не слишком быстрого убывания младшего коэффициента уравнения эта постоянная равна нулю. Установлено, что при достаточно быстром убывании младшего коэффициента имеет место трихотомия решений, как и для уравнения без младшего члена – решение стремится к постоянной (вообще говоря, не равной нулю), либо растет с линейной скоростью, либо растет экспоненциально. Условия убывания младшего коэффициента сформулированы в интегральной форме.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, условие Неймана, неограниченная область, младший коэффициент, асимптотическое поведение решений, трихотомия решений.

Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J25

1. Введение

Поведение решений эллиптических уравнений в цилиндрических или близких к ним областях при задании на боковой поверхности цилиндра условий Дирихле, Неймана или периодичности по всем переменным, кроме одной, изучено довольно хорошо для уравнений в дивергентной форме, не содержащих младших членов [1]–[4]. Для уравнений с младшими членами в основном изучен случай коэффициентов, периодических по переменной, направленной вдоль оси цилиндра [5], [6].

В настоящей работе поведение обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка, содержащих младший член, при граничных условиях Неймана на боковой поверхности цилиндра, изучается с помощью энергетических оценок типа принципа Сен-Венана [2]–[4]. Основное внимание уделено зависимости свойств решений от поведения коэффициента $q(x)$ при младшем члене уравнения. Показано, что при достаточно быстром убывании младшего коэффициента поведение решений аналогично поведению решений уравнения в дивергентной форме без младших членов при граничных условиях Неймана (стремление ограниченных решений к постоянной, трихотомия произвольных решений). В случае медленного убывания младшего коэффициента поведение ограниченных решений аналогично поведению решений уравнения без младших членов при граничных условиях Дирихле (любое ограниченное решение стремится к нулю).

A.V. Nekludov, On solutions of second order elliptic equations in cylindrical domains.

Поступила 28 октября 2015 г.

2. Основные обозначения и определения

В n-мерном цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \widehat{\Omega}$ рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - q(x)u = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^n_x$, $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n-1}_{\widehat{x}}$ – ограниченная область с липшицевой границей, $a_{ij}(x)$ – измеримые функции в Ω, $a_{ij} = a_{ji}$, $\lambda_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda_2|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} > 0$, $q(x) \ge 0$ – локально ограниченная измеримая функция.

На боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, \infty) \times \partial\widehat{\Omega}$ задано краевое условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $\partial u/\partial\nu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial u/\partial x_i \cos(\vec{n}, x_j)$, $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Γ.

Введем следующие обозначения: $\Omega(a, b) = \Omega \cap \{x : a < x_1 < b\}$, $\Omega_t = \Omega(t, t+1)$, $\Gamma(a, b) = \Gamma \cap \{x : a < x_1 < b\}$, $\Gamma_t = \Gamma(t, t+1)$, $S_t = \{x : x_1 = t,\ \widehat{x} \in \widehat{\Omega}\}$, $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $m_0 = \operatorname{mes}_{n-1}\widehat{\Omega}$, $\overline{u}(t) = m_0^{-1}\int_{\Omega_t} u\,dx$.

Под решениями (1)-(2) в Ω будем понимать обобщенные решения, т.е. функции, принадлежащие пространству С.Л. Соболева $W_2^1(\Omega(0,t))$ для всех $t > 0$ и удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_{\Omega(0,t)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_{\Omega(0,t)} quv\,dx = 0 \tag{3}$$

для всех функций $v \in W_2^1(\Omega(0,t))$, таких, что $v|_{S_0 \cup S_t} = 0$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ решение уравнения (1) в Ω_t, удовлетворяющее условию (2) на Γ_t. Тогда справедливы оценки*

$$\sup_{S_{t+1/2}}|u| \le c_0\left(\int_{\Omega_t} u^2\,dx\right)^{1/2}, \qquad \sup_{S_{t+1/2}}(u - C) \le c_1\left(\int_{\Omega_t} (u-C)^2\,dx\right)^{1/2},$$

c_0 не зависит от u, t; c_1 не зависит от u, t, $C > 0$.

Доказательство. Известно, например [7, с. 185], что решение эллиптического уравнения второго порядка, удовлетворяющее однородному условию Неймана на Γ_t, для любой точки Γ_t может быть с помощью локального распрямления границы и принципа симметрии продолжено в область ω, содержащую окрестность этой граничной точки, с сохранением структуры уравнения.

Пусть $C \ge 0$, $k > 0$, $x^0 \in \omega$, $\rho, \sigma \in (0, 1)$, $\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(x) = 1$ при $|x - x^0| \le \rho(1-\sigma)$, $\varphi(x) = 0$ при $|x - x^0| \ge \rho$, $|\nabla\varphi| \le \mathrm{const}/(\rho\sigma)$. Возьмем ρ таким, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \omega$. Полагая в интегральном тождестве (3) $v = \max\{u - C - k, 0\}\varphi$ и учитывая, что $\int_{\{x:\, u-C-k>0\}} qu(u - C - k)\,\varphi dx \ge 0$, получим оценку

$$\int_{A_{k,\rho(1-\sigma)}} |\nabla w|^2\,dx \le c_2(\rho\sigma)^{-2}\int_{A_{k,\rho}} (w-k)^2\,dx,$$

где $w = u - C$, $A_{k,\varkappa} = \{x : w(x) > k\} \cap \{x : |x - x^0| < \varkappa\}$, c_2 не зависит от w, k, ρ, σ, x^0.

Отсюда следует [8, глава II, теорема 5.3], что для любой области $\omega' \subset\subset \omega$ справедлива оценка

$$\sup_{\omega'} w \le c\left(\int_{\omega} w^2\,dx\right)^{1/2} \le c_1\left(\int_{\Omega_t} w^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Покрывая $\Gamma(t+1/4, t+3/4)$ конечным числом построенных окрестностей, получаем, что такая оценка справедлива для $\sup_{\Omega(t+1/4,t+3/4)} w$ и, следовательно, для $\sup_{S_{t+1/2}} w$. Таким образом, вторая из требуемых оценок доказана. Кроме того, при $C = 0$ аналогично полученной оценке для $\sup u$, получаем оценку для $\sup(-u)$. Лемма доказана.

Для решения $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего (2), стандартным образом введем понятие «потока тепла» через сечение S_t цилиндра Ω:

$$P(t,u) = \lim_{h\to 0+}\left(h^{-1}\int_{\Omega(t,t+h)}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx\right) = \int_{S_t}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\widehat{x},$$

последнее равенство справедливо для почти всех $t \geq 0$. Пусть $0 \leq t < T$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. Положим в (3) $v = \Phi$, где $\Phi = \Phi(x_1)$ – непрерывная функция, $\Phi = 1$ при $t + h_1 \leq x_1 \leq T$, $\Phi(t) = \Phi(T + h_2) = 0$, Φ – линейная при $t \leq x_1 \leq t + h_1$ и при $T \leq x_1 \leq T + h_2$:

$$h_1^{-1}\int_{\Omega(t,t+h_1)}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - h_2^{-1}\int_{\Omega(T,T+h_2)}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega(t,T+h_2)} qu\Phi\,dx = 0. \qquad (4)$$

Устремляя к нулю h_1, а затем h_2, получаем соотношение

$$P(T,u) - P(t,u) = \int_{\Omega(t,T)} qu\,dx. \qquad (5)$$

Легко видеть, что при $t > 0$ в определении потока область интегрирования $\Omega(t, t + h)$ можно заменить на $\Omega(t - h, t)$.

Рассмотрим соответствующее уравнению (1) уравнение без младшего члена

$$L_0 V \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = 0. \qquad (6)$$

Хорошо известно, например [9, теорема 2], что в Ω существует положительное решение $V(x)$ уравнения (6), удовлетворяющее на Γ однородному условию Неймана $\big(\partial V/\partial\nu\big)\big|_\Gamma = 0$ и оценке при $x_1 > 1$

$$C_1 x_1 \leq V(x) \leq C_2 x_1, \qquad C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0.$$

$V(x)$ также удовлеторяет [10, формула (12)] условиям

$$\int_{\Omega_t} |\nabla V|^2\,dx \leq c_1 = \mathrm{const}, \quad P(t,V) = 1, \quad t \geq 0,$$

второе условие выполняется после умножения V на постоянную. Для V при $t > 0$ справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega(0,t)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = 0 \qquad (7)$$

для всех функций $v \in W_2^1(\Omega(0,t))$, таких, что $v|_{S_0\cup S_t} = 0$.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ – ограниченное в Ω решение (1)-(2), $M_0 = \sup_{S_0} u$. Тогда в Ω справедлива оценка*

$$u(x) \leq \max\{M_0, 0\}.$$

Доказательство. Пусть $V(x)$ – решение уравнения (6), определенное выше. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Очевидно, что для функции $w = u - \varepsilon V$ имеем $w \leq M_0$ на S_0 и на $S_{T(\varepsilon)}$ для достаточно большого $T(\varepsilon)$. Так как $Lw = \varepsilon qV \geq 0$ и $(\partial w/\partial\nu)|_\Gamma = 0$, то w не может иметь положительного максимума в $\Omega(0, T(\varepsilon)) \cup \Gamma(0, T(\varepsilon))$, то есть $w \leq \max\{M_0, 0\}$. Устремляя ε к 0, получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ – ограниченное в Ω решение* (1)-(2). *Тогда*

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2+qu^2\right)dx<\infty.$$

Доказательство. Полагая в (3) $v=u\Phi$, где $\Phi=\Phi(x_1)\in C^2(\mathbb{R})$, $0\le\Phi\le 1$, $\Phi=1$ при $1\le x_1\le N$, $\Phi=0$ при $x_1\le 0$ и при $x_1\ge N+1$, $(\Phi')^2\le c\Phi$, $c=\mathrm{const}$, используя эллиптичность уравнения и оценку вида $ab\le\varepsilon a^2/2+b^2/(2\varepsilon)$, получаем оценку

$$\int_{\Omega(0,N+1)}\left(|\nabla u|^2+qu^2\right)\Phi\,dx\le c_0+c_1\int_{\Omega_N}|u||\nabla u||\Phi'|\,dx\le$$
$$\le c_0+\int_{\Omega_N}\left(c_2u^2+|\nabla u|^2\Phi\right)dx,$$

$c_i=\mathrm{const}>0$. Тогда

$$\int_{\Omega(1,N)}\left(|\nabla u|^2+qu^2\right)dx\le c_0+c_2\int_{\Omega_N}u^2\,dx, \tag{8}$$

откуда непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть $u(x)$ – решение* (1)–(2) *в Ω, $V(x)$ – решение уравнения* (6), *определенное выше. Тогда*

$$\overline{u}(N)=\overline{V}(N)\int_N^{N+1}P(t,u)dt-\int_{\Omega(0,N+1)}quV\Phi\,dx+I_N,$$

где

$$|I_N|\le c_0\bigg(\int_{\Omega_N}|\nabla u|^2\,dx\bigg)^{1/2}+c_1,\quad c_0,c_1=\mathrm{const}>0,$$

$\Phi=\Phi(x_1)$ *– непрерывная функция,* $\Phi(x_1)=1$ *при* $1\le x_1\le N$, $\Phi(0)=\Phi(N+1)=0$, Φ *– линейная при* $0\le x_1\le 1$ *и* $N\le x_1\le N+1$.

Доказательство. Полагая в интегральном тождестве (7) $v=u\Phi$, получаем, что

$$\int_{\Omega(0,N+1)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Phi\,dx=\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}u\,dx-\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}u\,dx.$$

Полагая в интегральном тождестве (3) для u пробную функцию $v=V\Phi$, получим

$$\int_{\Omega(0,N+1)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}\Phi\,dx=-\int_{\Omega(0,N+1)}quV\Phi\,dx+$$
$$+\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}V\,dx-\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}V\,dx.$$

Из двух последних равенств, учитывая симметричность матрицы a_{ij}, получаем, что

$$\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial V}{\partial x_i}u\,dx=\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}V\,dx-\int_{\Omega(0,N+1)}quV\Phi\,dx+I_0,$$

$I_0=\mathrm{const}$ – не зависит от N. Отсюда

$$\begin{aligned}\overline{u}(N)=\overline{V}(N)\int_N^{N+1}P(t,u)dt-\int_{\Omega(0,N+1)}quV\Phi\,dx+\\+\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\bigg((V-\overline{V}(N))\frac{\partial u}{\partial x_i}-(u-\overline{u}(N))\frac{\partial V}{\partial x_i}\bigg)dx+I_0.\end{aligned} \tag{9}$$

Используя неравенства Коши-Буняковского и Пуанкаре и оценку интеграла Дирихле для V, получаем

$$\Big|\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\Big((V-\overline{V}(N))\frac{\partial u}{\partial x_i}-(u-\overline{u}(N))\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big)\,dx\Big|\le$$
$$\le c_2\Big[\Big(\int_{\Omega_N}\big(V-\overline{V}(N)\big)^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\Omega_N}|\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}+$$
$$+\Big(\int_{\Omega_N}\big(u-\overline{u}(N)\big)^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\Omega_N}|\nabla V|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big]\le$$
$$\le c_3\Big(\int_{\Omega_N}|\nabla V|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\Omega_N}|\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\le c_4\Big(\int_{\Omega_N}|\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

$c_i>0$ не зависят от N. Тогда из (9) получаем утверждение леммы.

4. Поведение ограниченных решений

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ – ограниченное в Ω решение* (1)-(2), *$q(x)\ge 0$ в Ω. Тогда для некоторого $C=\mathrm{const}$*

$$\int_{\Omega_t}(u-C)^2\,dx\to 0,\quad t\to\infty.$$

Если также выполнено условие $||q||_{L_p(\Omega_t)}\to 0,\quad t\to\infty$, $p>n/2$, либо если $C=0$, то

$$\sup\nolimits_{S_t}|u-C|\to 0,\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Из ограниченности решения следует ограниченность $\overline{u}(t)$, поэтому для некоторой последовательности $t_k\to\infty$, $k\to\infty$, имеем $\overline{u}(t_k)\to C=\mathrm{const}$. Тогда, используя неравенство Пуанкаре и конечность по лемме 3 интеграла Дирихле для $u(x)$, получаем, что

$$\int_{\Omega_{t_k}}(u-C)^2\,dx\le 2\int_{\Omega_{t_k}}\big(u-\overline{u}(t_k)\big)^2\,dx+2m_0\big(\overline{u}(t_k)-C\big)^2\to 0,\quad k\to\infty.$$

Покажем, что $||u-C||_{L_2(\Omega_t)}\to 0$, $t\to\infty$. Предположим противное, тогда $||u-C'||_{L_2(\Omega_{t'_k})}\to 0$ при $k\to\infty$ для некоторой последовательности $t'_k\to\infty$ и постоянной $C'\ne C$. Учитывая непрерывность функции $\overline{u}(t)$, без ограничения общности можем считать, что C и C' одного знака, например $0\le C<C'$. Согласно лемме 1 имеем $\sup_{S_{t_k+1/2}}(u-C)\le\alpha_k\equiv c||u-C||_{L_2(\Omega_{t_k})}\to 0$, $k\to\infty$, $c=\mathrm{const}$. По лемме 2, получаем, что $u\le C+\alpha_k$ при $x_1>t_k+1/2$, что противоречит условию $C<C'$.

Утверждение теоремы относительно равномерности стремления u к постоянной следует при $C\ne 0$ из того, что $L_0(u-C)=qu$ и оценки Де Джорджи [2, с. 600] $\sup_{S_{t+1/2}}|u-C|\le c\big(||u-C||_{L_2(\Omega_t)}+||qu||_{L_p(\Omega_t)}\big)$. При $C=0$ это следует из леммы 1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $q(x)\ge 0$ удовлеторяет одному из двух следующих условий:*

1) $q(x)\ge q_0=\mathrm{const}>0$ в Ω,

2) $\int_\Omega x_1 q(x)\,dx=\infty$, $||q||_{L_p(\Omega_t)}\to 0$, $t\to\infty$, $p>n/2$.

Тогда для любого ограниченного в Ω решения (1)-(2)

$$\sup\nolimits_{S_t}|u(x)|\to 0,\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие 1). Тогда в силу лемм 1 и 3 получаем

$$\sup\nolimits_{S_t}u^2\le c_0\int_{\Omega_{t-1/2}}u^2\,dx\to 0,$$

$t \to \infty$, $c_0 > 0$ не зависит от t.

Пусть выполнено условие 2). Предположим, что $u \to C \neq 0$ при $x_1 \to \infty$. Можно считать, что $C > 0$. По лемме 4 имеем

$$\overline{V}(N) \int_N^{N+1} P(t,u)dt = \int_{\Omega(0,N+1)} quV\Phi\, dx + I_N, \tag{10}$$

где $|I_N| \leq c_1 = \text{const}$, $\Phi = \Phi(x_1) = 1$ при $0 \leq x_1 \leq N$, $\Phi = N+1-x_1$ при $N \leq x_1 \leq N+1$. Так как по предположению $u \to C > 0$, $x_1 \to \infty$, и, согласно теореме 1, эта сходимость является равномерной относительно $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$, то $u(x) > 0$ в $\Omega(t_0,\infty)$ для достаточно большого t_0. Тогда из (5) следует, что $P(t,u)$ является неубывающей функцией от t при $t > t_0$. Тогда, поскольку в силу леммы 3 $\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx < \infty$, то $P(t,u) \to 0$, $t \to \infty$, следовательно, $P(t,u) < 0$ для достаточно больших t. Из условия 2) с учетом того, что $u \to C > 0$, следует, что $\int_\Omega quV\, dx = +\infty$, тогда левая и правая часть (10) имеют разные знаки, если N достаточно велико. Из полученного противоречия следует, что $C = 0$. Теорема доказана.

5. Случай быстрого убывания младшего коэффициента: существование решения, обладающего линейной скоростью роста, трихотомия решений

Известно [11, глава VI, теорема 5], что для любого решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' - q(t)u = 0, \qquad \int_{t_0}^{\infty} tq(t)\, dt < \infty,$$

на полупрямой $t > t_0$ справедлива асимптотика $u(t) \sim ct$, $c = \text{const} \neq 0$, либо $u(t) \to \text{const}$, $t \to \infty$. Ниже будет показано, что при выполнении соответствующего интегрального условия на $q(x)$ для решений (1)-(2) в Ω справедлив аналогичный результат с добавлением третьей возможности – экспоненциального роста (трихотомия решений).

Теорема 3. *Пусть $q(x) \geq 0$ в Ω, $\int_\Omega x_1 q(x)\, dx < \infty$, $||q||_{L_p(\Omega_t)} \leq c$ при $t \geq t_0 = \text{const} > 0$, $p > n/2$, $c > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2. Тогда в Ω существует положительное решение $U(x)$ задачи (1)–(2), удовлетворяющее условиям*

$$U\big|_{S_0} = 0,\ A_1 x_1 \leq U(x) \leq A_2 x_1 \ \ (x_1 \geq 1),\ A_1, A_2 = \text{const} > 0,$$

$$P(t,U) \to p_0 = \text{const} > 0,\ t \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $V(x) > 0$ – введенное выше положительное линейно растущее решение уравнения (6) в Ω, удовлетворяющее однородному условию Неймана на Γ. Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ в области $\Omega(0,N)$ рассмотрим решение $U_N(x)$ задачи

$$LU_N = 0, \quad U_N\big|_{S_0} = 0, \quad U_N\big|_{S_N} = C_1 N, \quad \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma(0,N)} = 0.$$

Согласно принципу максимума U_N не может иметь отрицательного минимума в $\Omega(0,N)$ и на $\Gamma(0,N)$, следовательно, $U_N > 0$ в $\Omega(0,N)$. Полагая в интегральном тождестве (3) для $u = U_N$ пробную функцию $v = U_N\Phi$, где $\Phi = \Phi(x_1)$ непрерывная функция, $\Phi = 1$ при

$0 \le x_1 \le N-h$, $\Phi(N)=0$, Φ – линейная при $N-h \le x_1 \le N$, получим

$$\int_{\Omega(0,N)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial U_N}{\partial x_i}\frac{\partial U_N}{\partial x_j}\Phi\,dx + \int_{\Omega(0,N)} qU_N^2\Phi\,dx =$$

$$= h^{-1}\int_{\Omega(N-h,N)} U_N \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= h^{-1}\int_{\Omega(N-h,N)} (U_N - C_1N)\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\,dx + h^{-1}C_1N\int_{\Omega(N-h,N)}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\,dx.$$

Так как $(U_N - C_1N)\big|_{S_N} = 0$, то из неравенства вида Фридрихса
$\int_{\Omega(N-h,N)} \varphi^2\,dx \le c_0h^2\int_{\Omega(N-h,N)} |\nabla\varphi|^2\,dx$, $\varphi\big|_{S_N}=0$, $c_0=\mathrm{const}$, получаем

$$h^{-1}\left|\int_{\Omega(N-h,N)} (U_N - C_1N)\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\,dx\right| \le c_1\int_{\Omega(N-h,N)} |\nabla U_N|^2\,dx \to 0, \quad h\to 0,$$

здесь и далее в доказательстве $c_i = \mathrm{const} > 0$ зависят только от $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2. Тогда из предыдущего равенства получаем, что

$$\int_{\Omega(0,N)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\frac{\partial U_N}{\partial x_j}\,dx + \int_{\Omega(0,N)} qU_N^2\,dx = C_1NP(N,U_N).$$

Отсюда, учитывая, что $U_N\big|_{S_0}=0$ и, следовательно, справедливо [2, формула 46] неравенство

$$m_0C_1^2N^2 = \int_{S_N} U_N^2\,d\widehat{x} \le c_2N\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx,$$

получаем

$$P(N,U_N) \ge c_3N^{-1}\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx \ge c_4 > 0. \tag{11}$$

Для функции $w = U_N - V$ имеем $Lw = qV \ge 0$ в $\Omega(0,N)$, $(\partial w/\partial\nu)|_{\Gamma(0,N)}=0$, $w|_{S_0\cup S_N} \le 0$. Тогда w не может иметь положительного максимума в $\Omega(0,N)\cup\Gamma(0,N)$. Отсюда $w<0$ в $\Omega(0,N)$. Таким образом, в $\Omega(0,N)$ справедливо неравенство

$$0 < U_N < V. \tag{12}$$

Так как согласно (5) при $t<N$

$$P(t,U_N) = P(N,U_N) - \int_{\Omega(t,N)} qU_N\,dx,$$

то из (11) и (12) получаем, что существует $t_0>0$, такое, что для всех $t\ge t_0$ и $N\ge t$

$$P(t,U_N) \ge c_4/2 > 0. \tag{13}$$

Из оценок (12) и (8) следует, что последовательность U_N $(N\ge t)$ ограничена в $W_2^1(\Omega(0,t))$ для любого $t>0$. Отсюда, применяя диагональный процесс, получаем последовательность U_{N_k}, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Omega(0,t))$ и сильно сходящуюся в $L_2(\Omega(0,t))$ для любого $t>0$ к некоторой функции U. Очевидно, что U удовлетворяет (1)–(2) и оценке $0\le U(x)\le V(x)\le C_2x_1$ почти всюду в $\Omega(1,\infty)$ и, в силу непрерывности по Гёльдеру обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка [8, глава III, теорема 14.1], $0\le U(x)\le V(x)\le C_2x_1$ всюду в $\Omega(1,\infty)$. Из (5) получаем, что $P(t,U)\to p_0=\mathrm{const}$, $t\to\infty$. Так как из (4) следует, что $P(t,U_N)=\int_0^1 P(\tau,U_N)\,d\tau + \int_{\Omega(0,t)} qU_N\Psi(x_1)\,dx$, $\Psi = x_1$ при $0\le x_1\le 1$, $\Psi=1$ при $1\le x_1\le t$, то $P(t,U)=\lim_{k\to\infty}P(t,U_{N_k})$. Учитывая (13), получаем, что $P(t,U)\ge c_4/2$ при $t\ge t_0$ и $p_0\ge c_4/2>0$.

Оценим интеграл Дирихле для U. Полагая в интегральном тождестве вида (3) для $U(x)$ пробную функцию $v = U\Phi$, где $\Phi = \Phi(x_1)$ – непрерывная функция, $\Phi = 1$ при $0 \le x_1 \le t$, $\Phi(t+h) = 0$; Φ – линейная при $t \le x_1 \le t+h$; $h > 0$, получим

$$\int_{\Omega(0,t+h)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \Phi \, dx + \int_{\Omega(0,t+h)} qU^2 \Phi \, dx = h^{-1} \int_{\Omega(t,t+h)} U \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \, dx.$$

Устремляя h к нулю, получим, что для почти всех $t > 0$

$$\int_{\Omega(0,t)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \, dx + \int_{\Omega(0,t)} qU^2 \, dx = \int_{S_t} U \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \, d\widehat{x}. \tag{14}$$

Отсюда для почти всех $t > 0$ получаем

$$I(t) \equiv \int_{\Omega(0,t)} |\nabla U|^2 \, dx \le c_5 \int_{S_t} U \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \, d\widehat{x} \le c_6 t \sqrt{I'(t)}.$$

Тогда, интегрируя неравенство $I' I^{-2} \ge c_6^{-2} t^{-2}$ от t до T и устремляя T к ∞, получим $I(t) \le c_6^2 t$.

Пусть $N_0 \in \mathbb{N}$ – такое, что $\int_{\Gamma(N_0,\infty)} qU \, dx < c_4 C_1/(3C_2)$ и $P(t,U) \ge c_4/2$ при $t \ge N_0$. Из леммы 4 для $u = U$ в области $\Omega(N_0,\infty)$, используя неравенство Пуанкаре и оценку интеграла Дирихле для U, получаем для достаточно больших $N \ge N_0$

$$\begin{aligned} \overline{U}(N) &\ge \overline{V}(N) \int_N^{N+1} P(t,U) dt - \int_{\Omega(N_0,N+1)} qUV \, dx - c_7 N^{1/2} \ge \\ &\ge c_4 C_1 N/2 - C_2(N+1) c_4 C_1/(3C_2) - c_7 N^{1/2} \ge c_8 N. \end{aligned}$$

Оценим отклонение U от $\overline{U}(N)$ в области Ω_N. Так как функция $U - \overline{U}(N)$ удовлетворяет в Ω уравнению $L_0(U - \overline{U}(N)) = qU$ и однородному условию Неймана на Γ, то для $p > n/2$ имеем с учетом оценки Де Джорджи [2, с. 600], неравенства Пуанкаре и оценки функции U и ее интеграла Дирихле, что

$$\begin{aligned} \sup_{S_{N+1/2}} \big(U - \overline{U}(N)\big)^2 &\le c_9 \bigg(\int_{\Omega_N} \big(U - \overline{U}(N)\big)^2 dx + ||qU||^2_{L_p(\Omega_N)} \bigg) \le \\ &\le c_{10}(N + c^2 N^2) \le c_8^2 N^2/4, \qquad N \ge N_0' = \text{const}, \end{aligned}$$

если $c_{10} c^2 \le c_8^2/5$. Учитывая линейную оценку снизу для $\overline{U}(N)$, получаем требуемую оценку снизу для $U(x)$. Теорема, таким образом, доказана.

Лемма 5. *Пусть $q(x) \ge 0$ в Ω, $||q||_{L_p(\Omega_t} \le c'$ при $t \ge t_1 = \text{const}$ для некоторого $p > n/2$, c' – некоторая постоянаая, зависящая от $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2; $u(x)$ – решение (1)–(2), причем для некоторой последовательности $t_k \to \infty$ выполнено условие $\sup_{\Omega_{t_k}} |u| = o(\exp(At_k))$, $k \to \infty$, где $A > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2. Тогда существует последовательность $t_k' \to \infty$, $k \to \infty$, такая, что справедлива оценка*

$$\overline{u}(t_k') - \frac{1}{2}|\overline{u}(t_k')| - I_1 \le u(x) \le \overline{u}(t_k') + \frac{1}{2}|\overline{u}(t_k')| + I_1, \qquad x \in S_{t_k'+1/2},$$

$I_1 \ge 0$ не зависит от k.

Доказательство. Используя оценку (8), получаем

$$\int_{\Omega(0,t_k)} |\nabla u|^2 \, dx \le I_0 + c_1 \int_{\Omega_{t_k}} u^2 \, dx = o(\exp(2At_k)), \ k \to \infty, \tag{15}$$

$c_i = c_i(\widehat{\Omega}, \lambda_1, \lambda_2) > 0$, $I_0 \geq 0$ не зависит от $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что для некоторой последовательности $t'_k \to \infty$

$$\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx \leq \delta \int_{\Omega(0,t'_k)} |\nabla u|^2\,dx, \quad \delta = \exp\{2A\} - 1 > 0. \tag{16}$$

Действительно, в противном случае для произвольного $t \geq t_0 = \text{const}$

$$\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2\,dx = \int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx > \delta \int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx,$$

откуда получаем, учитывая (15), что

$$\int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-1} \int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\,dx < \dots$$

$$\dots < (1+\delta)^{-N_k} \int_{\Omega(0,t+N_k)} |\nabla u|^2\,dx = (1+\delta)^{-N_k} o(\exp\{2A(t+N_k)\}) \to 0, \quad k \to \infty,$$

если брать $N_k \in \mathbb{N}$ такие, что $t_k - 1 \leq t + N_k \leq t_k$. Таким образом, $\nabla u \equiv 0$. Итак, справедлива оценка (16). Тогда из (15) и неравенства Пуанкаре получаем

$$\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx \leq \delta\Big(I_0 + c_1 \int_{\Omega_{t'_k}} u^2\,dx\Big) \leq c_2\delta\Big(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(t'_k) + I_0\Big).$$

Если $\delta \leq c_2^{-1}/2$, то

$$\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx \leq 2c_2\delta(\overline{u}^2(t'_k) + I_0). \tag{17}$$

Оценим отклонение $u(x)$ от $\overline{u}(t'_k)$. По лемме 1, используя неравенство Пуанкаре и оценку (17), получим

$$\sup\nolimits_{S_{t'_k+1/2}} u^2 \leq c_3\Big(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(t'_k)\Big) \leq c_4\big((\delta+1)\overline{u}^2(t'_k) + \delta I_0\big).$$

Отсюда, учитывая, что $L_0(u - \overline{u}(t'_k)) = qu$, используя оценку Де Джорджи [2, с. 600] и еще раз неравенство (17), получим при $k \geq k_0 = \text{const}$

$$\sup\nolimits_{S_{t'_k+1/2}} \big(u - \overline{u}(t'_k)\big)^2 \leq c_5\Big(\int_{\Omega_{t'_k}} \big(u - \overline{u}(t'_k)\big)^2\,dx + ||qu||^2_{L_p(\Omega_{t'_k})}\Big) \leq$$

$$\leq c_6\Big(\int_{\Omega_{t'_k}} |\nabla u|^2\,dx + (c')^2\big((\delta+1)\overline{u}^2(t'_k) + \delta I_0\big)\Big) \leq$$

$$\leq c_7\Big(\delta(\overline{u}^2(t'_k) + I_0) + (c')^2\big((\delta+1)\overline{u}^2(t'_k) + \delta I_0\big)\Big) \leq \frac{1}{4}\big(\overline{u}^2(t'_k) + I_0\big),$$

если $c_7(c')^2 \leq 1/8$ и $c_7\delta(1 + (c')^2) \leq 1/8$. Таким образом, утверждение леммы справедливо для последовательности t'_k, $k \geq k_0$, $c' = (8c_7)^{-1/2}$, $\delta = \min\{c_2^{-1}/2,$
$\big(8c_7(1+(c')^2)\big)^{-1}\}$, $A = 2^{-1}\ln(1+\delta)$.

Лемма 6. *Пусть для $u(x)$ выполнены условия леммы 5 и, кроме того, $\int_\Omega x_1 q(x)\,dx < \infty$ и $||q||_{L_p(\Omega_t)} \leq c$ при $t \geq t_0 = \text{const}$, где $c > 0$ – постоянная из теоремы 3. Тогда для всех $x_1 \geq 1$*

$$|u(x)| \leq Cx_1, \quad C = \text{const} > 0.$$

Доказательство. Предположим противное, тогда для некоторой последовательности $\widetilde{t}_k \to \infty$

$$\sup_{S_{\widetilde{t}_k}} |u|/\widetilde{t}_k \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{18}$$

Пусть U — линейно растущее решение (1)-(2) в Ω, существование которого доказано в теореме 3. Применяя к функциям $u \pm c_0 U$ при достаточно большом $c_0 > 0$ принцип максимума, получаем, что из (18) следует, что $\sup_{S_t} |u|/t \to \infty, \quad t \to \infty$. Пусть t'_k — последовательность, для которой справедливо утверждение леммы 5. Без ограничения общности можно считать, что $\sup_{S_{t'_k+1/2}} u > 0$. Тогда в силу леммы 5 получаем, что $\inf_{S_{t'_k+1/2}} u/t'_k \to +\infty$, $k \to \infty$. Применяя принцип максимума к функции $U - c_1 - \varepsilon u$ для достаточно большого $c_1 > 0$, и устремляя ε к 0, получим, что $U \le c_1$ в $\Omega(t'_1 + 1/2, \infty)$, что противоречит линейному росту U. Полученное противоречие показывает, что соотношение (18) неверно, что и доказывает лемму.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы 6, и, кроме того, выполнено условие* $P(t,u) \to 0, \ t \to \infty$. *Тогда решение* (1)-(2) $u(x)$ *ограничено в* Ω.

Доказательство. Согласно лемме 6 $|u(x)| \le Cx_1$, $x_1 \ge 1$, тогда $\int_{\Omega(0,t)} x_1 q u \, dx = o(t)$, $t \to \infty$. Из леммы 4 тогда получаем, что

$$|\overline{u}(t)| \le o(t) + c_1 \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad t \to \infty,$$

$c_1 > 0$ не зависит от t. Оценивая интеграл Дирихле для u так же, как это делалось при доказательстве теоремы 3 для функции U, получим, что $\int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2 \, dx \le c_2 t$, $c_2 > 0$ не зависит от t. Тогда $\overline{u}(t) = o(t)$. Используя утверждение леммы 5, получим, что $\sup_{S_{t_k}} |u| = o(t_k)$ для некоторой последовательности $t_k \to \infty$, т.е. $u(x) \le c_0 + \varepsilon U$ на $S_{t_1} \cup S_{t_k}$ при $k > k_0(\varepsilon)$. Применяя принцип максимума и устремляя ε к 0, получим, что $u(x) \le c_0$ для достаточно больших x_1. Аналогично получим оценку снизу. Лемма доказана.

Основной результат о трихотомии решений в случае быстрого убывания младшего коэффициента уравнения состоит в следующем.

Теорема 4. *Пусть* $q(x) \ge 0$ *в* Ω, $\int_\Omega x_1 q(x) \, dx < \infty$, $||q||_{L_p(\Omega_t)} \le \min\{c, c'\}$ *при* $t \ge t_0 = \mathrm{const}$, *c*, *c′* *– постоянные из теоремы 3 и леммы 5 соответственно. Тогда любое решение* (1)-(2) *ведет себя одним из трех возможных способов:*

1) $u(x)$ *ограничено в* Ω;

2) $\sup_{\Omega_t} |u| \ge C_0 \exp(At)$, *где постоянная* $A > 0$ *зависит от* $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2; $C_0 = \mathrm{const} > 0$;

3) $C_1 x_1 \le u(x) \le C_2 x_1$ *при* $x_1 \ge x_1^{(0)} = \mathrm{const} > 0$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}, C_1 C_2 > 0$.

Доказательство. Согласно лемме 6 существует такое $A > 0$, что любое решение (1)-(2), не удовлетворяющее условию 2), удовлетворяет неравенству $|u(x)| \le c_0 x_1$ при $x_1 \ge 1$, $c_0 = \mathrm{const}$. Для такого решения из (5) следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{t \to \infty} P(t,u)$. Тогда для решения (1)-(2) $w \equiv u - p_1 U$, где U – линейно растущее решение (1)-(2) из теоремы 3, $p_1 = \mathrm{const}$, получим $\lim\limits_{t \to \infty} P(t,w) = 0$. Согласно лемме 7 функция w ограничена в Ω. Таким образом, получаем, что $u = w + p_1 U$ удовлетворяет либо условию 1) при $p_1 = 0$, либо условию 3) при $p_1 \ne 0$. Теорема доказана.

В заключение покажем, что для предельной постоянной C ограниченного решения в случае быстрого убывания младшего члена уравнения можно указать явную формулу, выражающую C через значения решения на основании цилиндра S_0.

Теорема 5. *Пусть функция* $q(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда для предельной постоянной* C *ограниченного в* Ω *решения* (1)-(2) $u(x)$ *справедливо представление*

$$C = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_{\Omega(0,h)} u \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \, dx,$$

где $U(x)$ – линейно растущее решение (1)-(2) из теоремы 3, удовлетворяющее условию $P(t,U)\to p_0=1$, $t\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\Phi_{h,N}=\Phi_{h,N}(x_1)$ – непрерывная функция, $\Phi_{h,N}(x_1)=1$ при $h\le x_1\le N$, $\Phi_{h,N}(0)=\Phi_{h,N}(N+1)=0$, $\Phi_{h,N}$ – линейная при $0\le x_1\le h$ и $N\le x_1\le N+1$. Полагая в интегральном тождестве (3) для $U(x)$ $v=u\Phi_{h,N}$, получим

$$\int_{\Omega(0,N+1)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Phi_{h,N}\,dx=-\int_{\Omega(0,N+1)}quU\Phi_{h,N}\,dx+$$
$$+\int_{\Omega_N}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx-h^{-1}\int_{\Omega(0,h)}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx.$$

Пусть функция $\Phi_N(x_1)=1$ при $0\le x_1\le N$, $\Phi_N(x_1)=N+1-x_1$ при $N\le x_1\le N+1$. Полагая в интегральном тождестве (3) для u пробную функцию $v=U\Phi_N$, получим

$$\int_{\Omega(0,N+1)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\Phi_N\,dx=-\int_{\Omega(0,N+1)}quU\Phi_N\,dx+\int_{\Omega_N}U\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx.$$

Из двух последних равенств, учитывая симмметричность матрицы a_{ij}, получим

$$\int_{\Omega_N}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx=\int_{\Omega_N}U\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx+h^{-1}\int_{\Omega(0,h)}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx+$$
$$+\int_{\Omega(0,h)}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}+quU\right)(\Phi_{h,N}-1)\,dx.$$

Устремляя h к нулю, получаем

$$\int_{\Omega_N}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx=\int_{\Omega_N}U\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx+\lim_{h\to0}h^{-1}\int_{\Omega(0,h)}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx.$$

Отсюда

$$\overline{u}(N)\int_N^{N+1}P(t,U)\,dt=\overline{U}(N)\int_N^{N+1}P(t,u)dt+\lim_{h\to0}h^{-1}\int_{\Omega(0,h)}u\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx+$$
$$+\int_{\Omega_N}\sum_{i=1}^n a_{i1}\left((U-\overline{U}(N))\frac{\partial u}{\partial x_i}-(u-\overline{u}(N))\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)dx. \tag{19}$$

Левая часть (19) стремится к C при $N\to\infty$. Так как для ограниченного решения $u(x)$ имеем $\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx<\infty$, то из (5) получим, что $P(t,u)\to0$, $t\to\infty$ и $P(t,u)=-\int_{\Omega(t,\infty)}qu\,dx$. Тогда $|P(t,u)|\le c_0\int_{\Omega(t,\infty)}q\,dx\le c_0t^{-1}\int_{\Omega(t,\infty)}x_1q\,dx=o(t^{-1})$, $t\to\infty$, здесь и далее $c_i=\mathrm{const}>0$. Тогда первое слагаемое в правой части (19) стремится к нулю при $N\to\infty$.

Так как $\int_{\Omega(0,N)}|\nabla U|^2\,dx\le c_1N$, то существует последовательность $N_k\to\infty$, $k\to\infty$, для которой $\int_{\Omega_{N_k}}|\nabla U|^2\,dx\le c_2$. Применяя неравенства Коши-Буняковского и Пуанкаре, получим с учетом леммы 3, что

$$\left|\int_{\Omega_{N_k}}\sum_{i=1}^n a_{i1}\left((U-\overline{U}(N_k))\frac{\partial u}{\partial x_i}-(u-\overline{u}(N_k))\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)dx\right|\le$$
$$\le c_3\left(\int_{\Omega_{N_k}}|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_{N_k}}|\nabla U|^2\,dx\right)^{1/2}\to0,\qquad k\to\infty.$$

Таким образом, из (19) получаем утверждение теоремы.

Заметим, что полученное выражение для предельной постоянной C зависит только от значений функции $u(x)$ на S_0. Действительно, для функций u_1 и u_2, таких, что $(u_1-u_2)|_{S_0}=0$, имеем

$$h^{-1}\left|\int_{\Omega(0,h)}(u_1-u_2)\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,dx\right|\leq$$
$$\leq c\biggl(\int_{\Omega(0,h)}|\nabla(u_1-u_2)|^2\,dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{\Omega(0,h)}|\nabla U|^2\,dx\biggr)^{1/2}\to 0,\qquad h\to 0.$$

Очевидно, что для классического решения предельная постоянная C явно определяется через интеграл по S_0:

$$C=\int_{S_0}u\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\frac{\partial U}{\partial x_i}\,d\widehat{x}.$$

В простейшем случае оператора Лапласа $L=\Delta$ имеем $U=m_0^{-1}x_1$, $C=m_0^{-1}\int_{S_0}u\,d\widehat{x}$, что очевидно следует и из того, что $\int_{S_t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\widehat{x}=\mathrm{const}$, причем для ограниченного решения эта константа равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. *Об одном варианте теоремы типа Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной*// Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1979. **5**, С. 105–136.
2. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей*// Матем. сб. 1980. **112**. № 4. С. 588–610.
3. O.A. Oleinik, G.A. Yosifian *On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity*// Archive Rat.Mech. and Analysis. 1982. **78**. №1. P. 29–53.
4. Неклюдов А. В. *О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру*// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1991. **16**. С. 191–217.
5. Пятницкий А.Л. *О поведении на бесконечности решения эллиптического уравнения второго порядка, заданного в цилиндре*// УМН. 1982. **37**. №2. С. 231–232.
6. Неклюдов А. В. *О решениях недивергентных эллиптических уравнений второго порядка, определенных в неограниченной области*// Вестник Московского университета, сер. 1. Матем. Мех. 1989. № 1. С. 93–95.
7. Кондратьев В.А. *О положительных решениях слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях*// Тр. МИАН. **250**. 2005. С. 183–191.
8. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1964. 540 с.
9. Лахтуров С.С., *Об асимптотике решений второй краевой задачи в неограниченных областях*// УМН. 1980. **35**. №4. С. 195–196.
10. Неклюдов А. В. *Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu=e^u$ в бесконечном цилиндре*// Матем. заметки. 2009. **85**. № 3. С. 408–420.
11. Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.* М.: Издательство иностранной литературы. 1954. 216 с.

Алексей Владимирович Неклюдов,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Рубцовская наб., д. 2/18,
г.Москва, 105005, Россия,
E-mail: nekl5@yandex.ru