ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 99-112.

УДК 517.956.25

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Р.Х. КАРИМОВ, Л.М. КОЖЕВНИКОВА, А.А. ХАДЖИ

Аннотация. Для некоторого класса эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями установлены оценки, характеризующие скорость убывания при $|x| \to \infty$ решений задачи Дирихле в неограниченных областях.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, нестепенные нелинейности, пространство Соболева-Орлича, неограниченная область.

Mathematics Subject Classification: 35J62

Введение

Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(x, u, \nabla u))_{x_\alpha} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{0.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{0.2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, \ldots, n$, измеримы по $x \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, s) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_{n+1}$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть существуют положительные числа $\widehat{a}, \widehat{A}$ и измеримые неотрицательные функции $\psi(x), \Psi(x)$, такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и $\mathbf{s} = (s_0, s), \mathbf{t} = (t_0, t) \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$ справедливы неравенства:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(x, s_0, s)s_\alpha \geq \overline{a} \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) - \psi(x); \tag{0.3}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{B}_\alpha(a_\alpha(x, s_0, s)) \leqslant \widehat{A} \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) + \Psi(x); \tag{0.4}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(a_\alpha(x, s_0, s) - a_\alpha(x, t_0, t))(s_\alpha - t_\alpha) > 0. \tag{0.5}$$

Здесь $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ — N-функции удовлетворяющие Δ_2–условию, а $\overline{B}_0(z), \overline{B}_1(z), ..., \overline{B}_n(z)$ — дополнительные к ним (см. §1).

R.Kh. Karimov, L.M. Kozhevnikova, A.A. Khadzhi, Behavior of solutions to elliptic equations with non-power nonlinearities in unbounded domains.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-31-50034/16).

Поступила 19 ноября 2015 г.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(B'_{\alpha}(u_{x_{\alpha}})+f_{\alpha}(x))_{x_{\alpha}}-B'_{0}(u)-f_{0}(x)=0 \qquad (0.6)$$

с непрерывно дифференцируемыми N-функциями $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ (см. лемму 4).

Начиная с 70-х гг. прошлого столетия (см. [1]–[4]) и по настоящее время ведутся интенсивные исследования качественных свойств решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями как второго, так и высокого порядков. Решения краевых задач для уравнений вида (0.1) с функциями $a_0(x,\mathbf{s}), a_1(x,\mathbf{s}),\ldots,a_n(x,\mathbf{s})$, имеющими не обязательно полиноминальный рост по переменным $s_0, s_1, \ldots, s_n$, рассматривались, в основном, в ограниченных областях. Так, в работе [5] в ограниченной области Ω исследовалась задача Дирихле для нелинейного эллиптического включения с вектор-функцией $\mathbf{a}(x,s)=(a_1(x,s),\ldots,a_n(x,s))$, удовлетворяющей нестандартным условиям роста, описанных в терминах N-функций, зависящих от x. Доказано существование ренормализованного решения, а при условии строгой монотонности установлена его единственность.

Краевые задачи в неограниченных областях для квазилинейных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями также исследовались в многочисленных работах [6], [7]. Следует отметить, что решение эллиптической задачи в неограниченной области с несуммируемыми данными принадлежит соответствующему пространству локально сумммируемых функций. Как правило, для обеспечения единственности решения соответствующей краевой задачи в неограниченной области необходимо наложить условие на рост решения на бесконечности, а для существования решения из выделенного класса единственности обычно требуются ограничения на рост входных данных [8].

В 1984 г. Х. Брезис [9] на примере полулинейного уравнения

$$-\Delta u+|u|^{p_0-2}u=f(x), \quad x\in\mathbb{R}_n, \quad p_0>2,$$

показал, что имеются эллиптические уравнения, для которых существуют единственные решения краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности. А именно, Х. Брезис установил существование и единственность обобщенного решения $u\in L_{p_0-1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ при $f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$. Обобщение результатов Х. Брезиса на уравнения высокого порядка было проведено Ф. Бернисом [10].

В работе [11] Ж.И. Диаз и О.А. Олейник, пользуясь методом интеграла энергии и устанавливая априорные оценки решения, доказали существование и единственность решения краевой задачи с однородными граничными условиями первого и второго типа (в частности задач Дирихле и Неймана) для полулинейных уравнений с переменными коэффициентами

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i}+a_0(x)|u|^{p_0-2}u=f(x), \quad x\in\Omega, \quad p_0>2, \qquad (0.7)$$

$a_{ij}(x)\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a_0(x)\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a_0(x)\geq a_0>0$, без условий на бесконечности. Кроме того, в [11] авторы исследовали асимптотическое поведение решения уравнения (0.7) на бесконечности. При условии, что $f(x)=0$, $x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}(r_0)$, $\overline{\Omega}(r_0)=\{x\in\Omega\,|\,|x|\leqslant r_0\}$, $r_0>0$, для решения уравнения (0.7) получена оценка:

$$|u(x)|\leqslant C_1|x|^{-2/(p_0-2)}, \quad x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}(r_0). \qquad (0.8)$$

А при дополнительном требовании на геометрию неограниченной области Ω установлено неравенство:

$$|u(x)|\leqslant C_2e^{-\alpha|x|}, \quad x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}(r_0), \quad \alpha>0. \qquad (0.9)$$

В работе [12] М.М. Бокало, Е.В. Доманская исследовали краевые задачи в неограниченных областях для эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейности. При этом корректность постановки краевых задач доказана без ограничений на рост решений и данных задач на бесконечности.

Авторам настоящей работы удалось выделить некоторый класс эллиптических уравнений, имеющих не обязательно степенные нелинейности, и получить результаты, близкие к процитированным выше. Так, в работе [13] Л.М. Кожевниковой, А.А. Хаджи для уравнения (0.1) с функциями $a_\alpha(x, \mathbf{s})$, удовлетворяющими условиям (0.3)–(0.5), установлено существование решений задачи Дирихле в неограниченных областях без ограничений на рост данных на бесконечности. А при дополнительных требованиях на структуру уравнения в [14] доказана единственность без ограничений на рост решений задачи (0.1), (0.2) на бесконечности.

Здесь получены оценки, характеризующие поведение решений задачи (0.1), (0.2) при $|x| \to \infty$ в неограниченных областях Ω. Оценка степенного характера установлена для решений анизотропных уравнений в произвольных неограниченных областях (теорема 2). А для «нешироких» неограниченных областей получена экспоненциальная оценка решений изотропных уравнений (теорема 3).

1. N-функции и пространства Соболева-Орлича

Приведем необходимые сведения из теории N-функций и пространств Соболева-Орлича [15]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z), z \in \mathbb{R}$, называется N-функцией, если она четна и $\lim\limits_{z\to 0} M(z)/z = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} M(z)/z = \infty$. Отметим, что $M(\epsilon z) \leqslant \epsilon M(z)$, при $0 < \epsilon \leqslant 1$. Для N-функции $M(z)$ имеет место интегральное представление $M(z) = \int_0^{|z|} m(\theta) d\theta$, где $m(\theta)$ — положительная при $\theta > 0$, не убывающая и непрерывная справа при $\theta \geq 0$ такая, что $m(0) = 0$, $\lim\limits_{\theta\to\infty} m(\theta) = \infty$.

Для N-функции $M(z)$ и дополнительной к ней N-функции

$$\overline{M}(z) = \sup_{y\geq 0}(y|z| - M(y))$$

справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leqslant M(z) + \overline{M}(y), \quad z, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

[15, гл. I, §2, неравенство (2.6)].

Для N-функций $P(z), M(z)$ записывают $P(z) \prec M(z)$, если существуют числа $l > 0, z_0 \geq 0$ такие, что

$$P(z) \leqslant M(lz), \quad |z| \geq z_0.$$

N-функции $P(z), M(z)$ называются сравнимыми, если имеет место одно из соотношений $P(z) \prec M(z)$ или $M(z) \prec P(z)$. N-функции $P(z)$ и $M(z)$ называются эквивалентными, если $P(z) \prec M(z)$ и $M(z) \prec P(z)$.

N-функция $P(z)$ растет медленнее N-функции $M(z)$ ($P(z) \prec\prec M(z)$), если для любого числа $l > 0$

$$\lim_{z\to\infty} P(z)/M(lz) = 0.$$

N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших значениях z, если существуют такие числа $c > 0$, $z_0 \geq 0$, что $M(2z) \leqslant cM(z)$ для любых $|z| \geq z_0$. Δ_2 – условие эквивалентно выполнению при $|z| \geq z_0$ неравенства

$$M(lz) \leqslant c(l)M(z), \tag{1.2}$$

где l — любое число больше единицы, $c(l) > 0$.

В каждом классе эквивалентных N-функций, подчиняющихся Δ_2-условию, имеются N-функции, удовлетворяющие неравенству (1.2) при всех z. В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2-условие для рассматриваемых N-функций выполняется при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 = 0$).

Для N-функции $M(z)$, ввиду выпуклости и оценки (1.2), справедливо неравенство

$$M(y+z) \leqslant cM(z) + cM(y), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Пусть Q – произвольная область пространства $\mathbb{R}_n$. Классом Орлича $K_M(Q)$, соответствующем N-функции $M(z)$, называется множество измеримых в Q функций v таких, что:

$$\int\limits_Q M(v(x))dx < \infty.$$

Пространством Орлича $L_M(Q)$ называется линейная оболочка $K_M(Q)$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_M(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_M(Q)} = \|v\|_{M,Q} = \inf\left\{k > 0 \;\middle|\; \int\limits_Q M\left(v(x)/k\right)dx \leqslant 1\right\}.$$

Класс Орлича $K_M(Q)$ совпадает с пространством Орлича $L_M(Q)$ тогда и только тогда, когда $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию [15, гл. II, §8, теорема 8.2].

Для функции $v \in L_M(Q)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{M,Q} \leqslant \int\limits_Q M(v)dx + 1 \tag{1.4}$$

[15, гл. II, §9, неравенство (9.12)]. Для функций $u \in L_M(Q)$, $v \in L_{\overline{M}}(Q)$ имеет место неравенство Гельдера [15, гл. II, §9, неравенства (9.24), (9.27)]:

$$\left|\int_Q u(x)v(x)dx\right| \leqslant 2\|u\|_{M,Q}\|v\|_{\overline{M},Q}. \tag{1.5}$$

Пусть $B_1(z), ..., B_n(z)$ – N-функции, определим пространство Соболева-Орлича $\mathring{H}^1_B(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_B(Q)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}.$$

Нормы в пространствах $L_1(Q)$, $L_\infty(Q)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$, соответственно.

Положим

$$h(t) = t^{-1/n}\left(\prod_{\alpha=1}^n B_\alpha^{-1}(t)\right)^{1/n}$$

и предположим, что интеграл $\int\limits_0^1 h(t)/tdt$ сходится. Тогда можно определить N-функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} h(t)/tdt.$$

Приведем теорему вложения А.Г. Королева [16], доказанную для ограниченных областей Q.

Лемма 1. *Пусть* $v \in \mathring{H}^1_B(Q)$.
1) Если

$$\int\limits_1^\infty h(t)/t dt = \infty, \tag{1.6}$$

то $\mathring{H}^1_B(Q) \subset L_{B^*}(Q)$ *и*

$$\|v\|_{B^*,Q} \leqslant A_1 \|v\|_{\mathring{H}^1_B(Q)};$$

2) если

$$\int\limits_1^\infty h(t)/t dt < \infty, \tag{1.7}$$

то $\mathring{H}^1_B(Q) \subset L_\infty(Q)$ *и*

$$\|v\|_{\infty,Q} \leqslant A_2 \|v\|_{\mathring{H}^1_B(Q)}.$$

Здесь $A_1 = \frac{n-1}{n}, A_2 = \int\limits_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt.$

Ввиду справедливости Δ_2-условия, сходимость по норме равносильна сходимости в среднем [15, гл. II, § 9, теорема 9.4]. Кроме того, в [17] доказана следующая

Лемма 2. *Если N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию,* $v(x)$, $v^i(x) \in L_M(Q)$, $i = 1, 2, \ldots,$ $v^i(x) \to v(x)$ *в* $L_M(Q)$, *то*

$$\int_Q |M(v^i) - M(v)| dx \to 0, \quad i \to \infty. \tag{1.8}$$

2. Формулировка теорем

Пусть N-функции $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ и дополнительные к ним N-функции $\overline{B}_0(z)$, $\overline{B}_1(z), ..., \overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию. Через $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{\overline{B}_0}(\Omega) \times L_{\overline{B}_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{\overline{B}_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega)} = \|g_0\|_{\overline{B}_0,\Omega} + \|g_1\|_{\overline{B}_1,\Omega} + \ldots + \|g_n\|_{\overline{B}_n,\Omega}, \quad \mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega).$$

Определим пространство Соболева-Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} = \|v\|_{B_0,\Omega} + \|v\|_{\mathring{H}^1_B(\Omega)}.$$

В случае выполнения условия (1.6), будем считать, что

$$B_0(z) \prec B^*(z), \tag{2.1}$$

а при выполнении (1.7) $B_0(z)$ — произвольная N-функция.

Определим $L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ как пространства, состоящие из функций $v(x)$, определенных в Ω, для которых при любой ограниченной $Q \subset \Omega$ найдется функция из пространства $L_1(\Omega)$, $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, соответственно, совпадающая с функцией $v(x)$ в Q. Будем считать, что неотрицательные функции $\psi(x), \Psi(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Аналогично определяется пространство $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Определим оператор $\mathbf{B} : \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \to L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ формулой:

$$\mathbf{B}(v) = B_0(v) + \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(v_{x_\alpha}), \quad v \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}).$$

Обозначим
$$\mathbf{a}(x,\mathbf{s}) = (a_0(x,\mathbf{s}), a_1(x,\mathbf{s}),\dots,a_n(x,\mathbf{s})).$$
Из условия (0.4), пользуясь (1.4), для $u \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ и любой ограниченной $Q \subset \Omega$ выводим оценку
$$\|\mathbf{a}(x,u,\nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)} = \sum_{\alpha=0}^{n} \|a_\alpha(x,u,\nabla u)\|_{\overline{B}_\alpha,Q} \leqslant \tag{2.2}$$
$$\leqslant \sum_{\alpha=0}^{n} \int\limits_Q \overline{B}_\alpha(a_\alpha(x,u,\nabla u))dx + n + 1 \leqslant \widehat{A}\|\mathbf{B}(u)\|_{1,Q} + \|\Psi\|_{1,Q} + n + 1.$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(x,u,\nabla u) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ для $v(x) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ с ограниченным носителем определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством:
$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = \int\limits_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha v_{x_\alpha} + a_0 v\right) dx. \tag{2.3}$$
Используя неравенство Гельдера (1.5), для функций $u(x) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $v(x) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ ($\mathrm{supp}\, v = \overline{Q}_v$) выводим неравенства:
$$|\langle \mathbf{A}(u), v\rangle| \leqslant 2\sum_{\alpha=1}^{n} \|a_\alpha\|_{\overline{B}_\alpha,Q_v} \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q_v} + 2\|a_0\|_{\overline{B}_0,Q_v}\|v\|_{B_0,Q_v} \leqslant \tag{2.4}$$
$$\leqslant 2\|\mathbf{a}(x,u,\nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q_v)} \|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}.$$
Таким образом, из оценок (2.2), (2.4) следует ограниченность функционала $\mathbf{A}(u)$ в пространстве функций $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ с ограниченными носителями.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (0.1), (0.2) *назовем функцию* $u(x) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*
$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = 0 \tag{2.5}$$
для любой функции $v(x) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ *с ограниченным носителем.*

Будем считать, что существует такое $0 < \epsilon < 1$, что выполнены условия
$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1,2,\dots,n. \tag{2.6}$$
В работе [13] доказано существование решения задачи (0.1), (0.2) в произвольных неограниченных областях Ω. А именно, установлена следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (0.3) – (0.5), (2.6), *тогда существует обобщенное решение* $u(x)$ *задачи* (0.1), (0.2).

Степенная оценка скорости убывания решения получена при условии, что:
$$B_\alpha(z) = c_\alpha|z|^{p_\alpha}, \quad |z| < 1, \quad p_\alpha > 1, \quad c_\alpha > 0, \quad \alpha = 0,1,\dots,n. \tag{2.7}$$
Заметим, что для произвольной N-функции $\widetilde{B}(z)$ такую N-функцию легко построить:
$$B(z) = \begin{cases} \widetilde{B}(1)|z|^p, \ |z| < 1; \\ \widetilde{B}(z), \ |z| \geq 1, \end{cases} \qquad p = \frac{\widetilde{B}'(1)}{\widetilde{B}(1)} > 1.$$
При этом функции $\widetilde{B}(z), B(z)$ эквивалентны.

Считаем, что показатели $p_\alpha,\ \alpha = 1,\dots,n$ упорядочены: $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ и подчиняются условиям:

$$p_0 > p_1, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} > 1. \tag{2.8}$$

Тогда числа $q_\alpha = \frac{p_0 p_\alpha}{p_0 - p_\alpha},\ \alpha = 1,\dots,n$, также упорядочены: $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$. Будем предполагать, что

$$q_n > n. \tag{2.9}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (0.3)–(0.5), (2.6)–(2.8). *Тогда существует положительное число $\mathcal{M}_1$ такое, что для обобщенного решения задачи* (0.1), (0.2) *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leqslant \mathcal{M}_1 \left(r^{n-q_n} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(r)}\right), \quad r \geq 1, \tag{2.10}$$

в которой $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$.

Условия теоремы 2 выполнены, например, для уравнения (0.6) с функциями

$$B_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{p_\alpha}, \ |z| < 1; \\ |z|^{p_\alpha - 1}(\ln|z| + 1), \ |z| \geq 1 \end{cases}$$

при подходящем выборе $p_\alpha > 2,\ \alpha = 0,1,\dots,n$ (см. пример 1).

Для неограниченных областей, расположенных вдоль выделенной оси, в терминах специальной геометрической характеристики в работах [17], [18] авторами установлены экспоненциальные оценки скорости убывания решения задачи (0.1), (0.2) с финитными данными. Здесь удалось получить экспоненциальную оценку для изотропного случая:

$$B_\alpha(z) = B(z), \quad \alpha = 1,2,\dots,n, \tag{2.11}$$

для неограниченных областей, подчиняющихся лишь условию

$$d(r) = \operatorname{diam}\gamma(r) \leqslant D, \quad D > 0, \quad \gamma(r) = \{x \in \Omega \mid |x| = r\}, \quad r \geq r_1. \tag{2.12}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (0.3)–(0.5), (2.6), (2.11), (2.12). *Тогда существуют положительные числа κ, $\mathcal{M}_2$, r_0 такие, что решение $u(x)$ задачи* (0.1), (0.2) *при всех $r \geq r_0$ подчиняется оценке*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leqslant \mathcal{M}_2 \left(\exp\left(-\kappa r\right) r^{n-1} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(2r)}\right). \tag{2.13}$$

Следует отметить, что полученные в работе оценки (2.10), (2.13), согласуются с результатами статьи [11].

3. Подготовительные сведения

Лемма 3. *Пусть N-функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ подчиняются условиям* (2.6), *тогда*

$$B_\alpha(z) \prec\prec B_0(z), \quad \alpha = 1,2,\dots,n. \tag{3.1}$$

Доказательство леммы см. [13, замечание 6].

Лемма 4. *Если функции $b_\alpha(s_\alpha) = B'_\alpha(s_\alpha),\ s_\alpha \geq 0,\ \alpha = 0,1,\dots,n$, непрерывны и строго монотонны, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то функции*

$$a_\alpha(x, s_\alpha) = B'_\alpha(s_\alpha) + f_\alpha(x) = b_\alpha(|s_\alpha|)\operatorname{sign} s_\alpha + f_\alpha(x), \quad \alpha = 0,\dots,n,$$

удовлетворяют условиям (0.3) – (0.5).

Доказательство леммы см. [13, замечание 5].

В этом параграфе и ниже через C_i будем обозначать положительные константы.

Лемма 5. *Пусть N-функции $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ подчиняются условиям (2.6), тогда для N-функций $T_\alpha(z) = B_\alpha\left(\overline{M}_\alpha(z)\right), (M_\alpha(z) = B_\alpha^{-1}(B_0(z))$ существуют числа $c > 0, \tau \geq q_n$ такие, что справедливы неравенства*

$$T_\alpha(z) \leqslant c|z|^\tau, \quad |z| \geq 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Доказательство леммы см. [14, лемма 3.3] .

Лемма 6. *Пусть N-функции $B_0(z), B_1(z), ..., B_n(z)$ подчиняются условиям (2.7), (2.8), тогда для N-функций $T_\alpha(z) = B_\alpha\left(\overline{M}_\alpha(z)\right)$ существует число $c > 0$ такое, что справедливы неравенства*

$$T_\alpha(z) \leqslant c|z|^{q_\alpha}, \quad |z| \leqslant 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Доказательство леммы см. [14, лемма 3.4] .

Лемма 7. *Пусть $\Sigma_{R,d}$ — сферический сегмент диаметра d на поверхности сферы радиуса R, $d \leqslant R/8$ в пространстве $\mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Если N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то существует число $c(n) > 0$ такое, что для функции $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $v\big|_{\Sigma_{R,d}} \in C_0^\infty(\Sigma_{R,d})$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Sigma_{R,d}} B(v)dS \leqslant c \int\limits_{\Sigma_{R,d}} B(d|\nabla v|)dS, \tag{3.4}$$

∇' — градиент по касательному направлению.

Доказательство леммы см. [19].

4. Доказательство теоремы 2

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно непрерывная неотрицательная функция с компактным носителем. Полагая в тождестве (2.5) $v = \xi^p u$, $p \geq \tau$ (см. лемму 5), получаем неравенство

$$\int\limits_\Omega \xi^p \left(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(x, u, \nabla u) u_{x_\alpha} + a_0(x, u, \nabla u) u\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant p \sum_{\alpha=1}^n \int\limits_\Omega |a_\alpha(x, u, \nabla u)||u||\xi_{x_\alpha}(x)|\xi^{p-1} dx = p \cdot J_1. \tag{4.1}$$

Применяя (1.1), для $\varepsilon \in (0, 1)$ выводим

$$J_1 \leqslant \sum_{\alpha=1}^n \int\limits_\Omega \xi^p \left(\overline{B}_\alpha(\varepsilon a_\alpha(x, u, \nabla u)) + B_\alpha\left(\frac{u}{\varepsilon}\frac{\xi_{x_\alpha}}{\xi}\right)\right) dx \leqslant \tag{4.2}$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^n \int\limits_\Omega \xi^p \varepsilon \overline{B}_\alpha(a_\alpha(x, u, \nabla u)) dx + \sum_{\alpha=1}^n \int\limits_\Omega \xi^p B_\alpha\left(\frac{u}{\varepsilon}\frac{\xi_{x_\alpha}}{\xi}\right) dx = J_{11} + J_{12}.$$

Оценим интеграл J_{12}. Поскольку, согласно лемме 3, имеют место соотношения (3.1), то справедливы представления N-функции $B_0(z) = B_\alpha(M_\alpha(z))$ в виде композиций двух N-функций $M_\alpha(z), B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Применяя (1.1), (1.3), устанавливаем

$$J_{12} \leqslant \sum_{\alpha=1}^n \int\limits_\Omega \xi^p B_\alpha \left\{M_\alpha(\varepsilon u) + \overline{M}_\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{|\nabla \xi|}{\xi}\right)\right\} dx \leqslant \tag{4.3}$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} \xi^p \left(\varepsilon C_1 B_0(u) + C_1 B_\alpha \left(\overline{M}_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) \right) \right) dx = C_1 \left(\varepsilon n \int_{\Omega} \xi^p B_0(u) dx + J_2 \right),$$

где

$$J_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} \xi^p T_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) dx, \quad T_\alpha(z) = B_\alpha \left(\overline{M}_\alpha(z) \right). \tag{4.4}$$

Далее, соединяя (4.2), (4.3), используя условие (0.4), выводим

$$J_1 \leqslant \int_{\Omega} \xi^p \varepsilon \left(\widehat{A} \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(u_{x_\alpha}) + (C_1 n + \widehat{A}) B_0(u) \right) dx +$$
$$+ \int_{\Omega} \xi^p \Psi dx + C_1 J_2 \leqslant \varepsilon C_2 \int_{\Omega} \xi^p \mathbf{B}(u) dx + \int_{\Omega} \xi^p \Psi dx + C_1 J_2. \tag{4.5}$$

Из (4.1), (4.5), применяя (0.3), получаем оценку

$$\overline{a} \int_{\Omega} \xi^p \mathbf{B}(u) dx \leqslant \varepsilon p C_2 \int_{\Omega} \xi^p \mathbf{B}(u) dx + p \int_{\Omega} \xi^p \{\Psi + \psi\} dx + C_1 p J_2.$$

Выбирая ε достаточно малым, имеем неравенство

$$\|\xi^p \mathbf{B}(u)\|_1 \leqslant C_3 \int_{\Omega} \xi^p \{\Psi + \psi\} dx + C_4 J_2. \tag{4.6}$$

Пусть r_0 — произвольное положительное число. Зафиксируем $r > r_0$, рассмотрим срезающую функцию $\xi(x) = \frac{1}{r}(r^2 - |x|^2)$ для $|x| < r$, $\xi(x) = 0$ для $|x| \geq r$. Обоснуем конечность интеграла J_2. Очевидно, что $|\nabla \xi| \leqslant 2$, применяя (3.2), (3.3), выводим неравенства

$$J_2 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega(r)} \xi^p T_\alpha \left(\frac{C_5}{\xi} \right) dx \leqslant C_6 \int_{\Omega(r) \cap \{x \,|\, C_5/\xi(x) < 1\}} \xi^{p - q_n} dx + C_7 \int_{\Omega(r) \cap \{x \,|\, C_5/\xi(x) \geq 1\}} \xi^{p-\tau} dx. \tag{4.7}$$

В итоге имеем

$$J_2 \leqslant C_8 r^{n - q_n + p}, \quad r \geq 1, \ r > r_0. \tag{4.8}$$

Очевидно, $\xi(x) \geq r - r_0$ при $|x| \leqslant r_0$, поэтому из (4.6), (4.8) выводим неравенство

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r_0)} \leqslant C_9 \left(\frac{r}{r - r_0} \right)^p \left(\|\Psi + \psi\|_{1, \Omega(r)} + r^{n - q_n} \right). \tag{4.9}$$

Полагая в (4.9) $r_0 = r/2$, устанавливаем оценку (2.10). □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (0.3)–(0.5) *с* $\psi = \Psi = 0$ *в* Ω, (2.6)–(2.9), *тогда обобщенное решение* $u(x)$ *задачи* (0.1), (0.2) $u = 0$ *в* Ω. *Действительно, полагая в* (4.9) $\psi(x) = \Psi(x) = 0$, $x \in \Omega$, *и устремляя* r *к бесконечности, устанавливаем, что* $\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r_0)} = 0$ *для любого* $r_0 > 0$. *Отсюда следует, что* $B_0(u) = 0$ *в* Ω, *поэтому* $u = 0$ *в* Ω.

5. Доказательство теоремы 3

Доказательство. Зафиксируем $r \geq \max(2r_1, r_2, 32D)$ (r_1 из условия (2.12), r_2 будет определено ниже). Пусть $\theta(x),\ x > 0,$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \leq r/2$, нулю при $x \geq 2r$, линейная при $x \in [r, 2r]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = -\delta\theta(x), \quad x \in (r/2, r), \tag{5.1}$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим

$$\theta(x) = \exp\left(-\delta(x - r/2)\right), \quad x \in (r/2, r),$$

тогда

$$\theta'(x) = \frac{\theta(r)}{r} = \frac{1}{r}\exp\left(-\delta r/2\right), \quad x \in (r, 2r). \tag{5.2}$$

Полагая в (4.1) $\xi(x) = \theta^p(|x|), p \geq \tau$, применяя (5.1), (5.2), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \theta^p \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(x, u, \nabla u)u_{x_\alpha} + a_0(x, u, \nabla u)u\right) dx \leqslant p\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)} |u||a_\alpha(x, u, \nabla u)|\delta\theta^p dx +$$

$$+p\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^{p-1}|u||a_\alpha(x, u, \nabla u)|\frac{\theta(r)}{r}dx = pI_1 + pI_2. \tag{5.3}$$

Далее, пользуясь (1.1), при помощи (0.4), (2.11), оценим первый интеграл ($\varepsilon_1 \in (0, 1)$)

$$I_1 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)} \theta^p \left(\overline{B}(\varepsilon_1 a_\alpha(x, u, \nabla u)) + B\left(u\frac{\delta}{\varepsilon_1}\right)\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)} \theta^p \left(\varepsilon_1 \widehat{A}\sum_{\alpha=1}^{n} B(u_{x_\alpha}) + \Psi\right) dx + I_{12}, \tag{5.4}$$

$$I_{12} = \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)} \theta^p B\left(u\frac{\delta}{\varepsilon_1}\right) dx.$$

Выберем $\varepsilon_1 \leqslant \frac{\overline{a}}{8\widehat{A}p}$, а также δ так, чтобы $\delta \leqslant \varepsilon_1$.

Ввиду вложения $\gamma(\rho) \subset \Sigma_{\rho,2d(\rho)}$ для $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$I_{12} \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon_1}\int\limits_{r/2}^{r} \theta^p(\rho) \int\limits_{\Sigma_{\rho,2d(\rho)}} B(u)dSd\rho.$$

Применяя неравенство (3.4) и условие (2.12), пользуясь (1.2), выводим

$$I_{12} \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon_1}c\int\limits_{r/2}^{r} \theta^p(\rho) \int\limits_{\Sigma_{\rho,2d(\rho)}} B(2d(\rho)|\nabla' u|)dSd\rho \leqslant C_1\frac{\delta}{\varepsilon_1}\int\limits_{r/2}^{r} \theta^p(\rho) \int\limits_{\gamma(\rho)} B(|\nabla u|)dSd\rho.$$

Далее, с помощью (1.3) устанавливаем неравенство

$$I_{12} \leqslant C_2\frac{\delta}{\varepsilon_1}\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)} \theta^p(|x|)B(u_{x_\alpha})dx. \tag{5.5}$$

Пользуясь леммой 2, выполняя предельный переход, выводим неравенство (5.5) для функции $u(x) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\Omega)$. Соединяя (5.4), (5.5), выбирая $\delta C_2 \leqslant \varepsilon_1 \frac{\overline{a}}{8p}$, получим

$$I_1 \leqslant \frac{\overline{a}}{4p} \int\limits_{\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)} \theta^p \mathbf{B}(u)dx + \|\Psi\|_{1,\Omega(r)\setminus\Omega(r/2)}. \tag{5.6}$$

Оценим интеграл I_2. Применяя (1.1), для $\varepsilon_2 \in (0,1)$ выводим

$$I_2 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p \overline{B}(\varepsilon_2 a_\alpha(x,u,\nabla u))dx + n \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p B\left(\frac{u}{\varepsilon_2}\frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right)dx = I_{21} + I_{22}. \tag{5.7}$$

Оценим интеграл I_{22}. Поскольку имеют место соотношения (3.1), то справедливо представление N-функции $B_0(z) = B(M(z))$ в виде композиций двух N-функций $M(z), B(z)$. Далее, применяя (1.1), (1.3), устанавливаем

$$I_{22} \leqslant n \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p B\left\{M(\varepsilon_2 u) + \overline{M}\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right)\right\}dx \leqslant \tag{5.8}$$

$$\leqslant n \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p \left(\varepsilon_2 C_3 B_0(u) + C_3 B\left(\overline{M}\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right)\right)\right)dx = C_3 n\left(\varepsilon_2 \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p B_0(u)dx + I_3\right),$$

где

$$I_3 = \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p T\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\frac{\theta(r)}{r\theta(|x|)}\right)dx, \quad T(z) = B\left(\overline{M}(z)\right). \tag{5.9}$$

Далее, соединяя (5.7), (5.8), используя условие (0.4), выводим

$$I_2 \leqslant \varepsilon_2 \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p \left(\widehat{A}\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(u_{x_\alpha}) + (nC_3 + \widehat{A})B_0(u)\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p \Psi dx + nC_3 I_3 \leqslant \varepsilon_2 C_4 \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p \mathbf{B}(u)dx + \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \Psi dx + C_4 I_3. \tag{5.10}$$

Выберем $\varepsilon_2 \leqslant \frac{\overline{a}}{4C_4 p}$, в итоге получим

$$I_2 \leqslant \frac{\overline{a}}{2} \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p \mathbf{B}(u)dx + \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \Psi dx + C_4 I_3. \tag{5.11}$$

Подставляя в (5.3) оценки (5.6), (5.11), применяя условие (0.3), выводим

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leqslant C_5 \int\limits_{\Omega(2r)} \{\Psi + \psi\}\, dx + C_5 I_3. \tag{5.12}$$

Оценим интеграл I_3. Положим $r_2 = 1/\varepsilon_2^2$, тогда при $r \geq r_2$, ввиду выпуклости функции $T(z)$, справедливо неравенство

$$I_3 \leqslant \frac{r_2}{r} \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^p T\left(\frac{\theta(r)}{\theta(|x|)}\right)dx.$$

При $|x| \in (r, 2r)$ имеет место неравенство $\theta(|x|) \leqslant \theta(r)$, поэтому, применяя лемму 5, получаем оценку
$$I_3 \leqslant \frac{C_6}{r} \int\limits_{\Omega(2r)\setminus\Omega(r)} \theta^{p-\tau}(|x|)\theta^{\tau}(r)dx \leqslant C_7 r^{n-1} \exp\left(-\delta p r/2\right). \tag{5.13}$$
Соединяя (5.12), (5.13) выводим (2.13). □

6. Примеры

Пример 1. *Пусть* $n = 3,\ p_1 = 11/3,\ p_2 = 11/4,\ p_3 = 11/5,$
$$B_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{p_\alpha}, & |z| < 1 \\ |z|^{p_\alpha - 1}\left(\ln|z| + 1\right), & |z| \geq 1, \end{cases}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$
Поскольку $|z|^{p_\alpha-1} \leqslant B_\alpha(z) \leqslant |z|^{p_\alpha}$ *при* $|z| \geq 1$, *то* $t^{1/(p_\alpha-1)} \geq B_\alpha^{-1}(t) \geq t^{1/p_\alpha}$ *при* $t \geq 1$, $\alpha = 1, 2, 3$. *Отсюда получаем*
$$h(t) = t^{1/33},\ 0 < t < 1, \quad \int_0^1 t^{-1}h(t)dt < \infty,$$
$$t^{131/504} \geq h(t) \geq t^{1/33},\ t \geq 1, \quad \int_1^\infty t^{-1}h(t)dt = \infty,$$
поэтому можно определить функции $(B^*)^{-1}(t),\ B^*(z)$, *при этом справедливы неравенства:*
$$(B^*)^{-1}(t) = 33t^{1/33},\ 0 < t < 1, \quad 504/131 t^{131/504} \geq (B^*)^{-1}(t) \geq 33t^{1/33},\ t \geq 1,$$
$$B^*(z) = \left(|z|/33\right)^{33},\ |z| < 33, \quad (131/504|z|)^{504/131} \leqslant B^*(|z|) \leqslant \left(|z|/33\right)^{33},\ |z| \geq 33.$$
Возьмем $B_0(z) = |z|^{42/11}$, *такой выбор функций* $B_\alpha(z),\ \alpha = 0, 1, 2, 3$, *обеспечивает выполнение условий* (2.1), (2.6).

Рассмотрим функции $a_0(x, z) = |z|^{20/11}z + f_0(x)$,
$$a_\alpha(x, z) = f_\alpha(x) + B'_\alpha(z) = f_\alpha(x) + \begin{cases} p_\alpha |z|^{p_\alpha-2}z, & |z| < 1 \\ |z|^{p_\alpha-3}z\left((p_\alpha - 1)\ln|z| + p_\alpha\right), & |z| \geq 1 \end{cases},$$
$f_\alpha \in L_{\overline{B}_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ \alpha = 0, 1, 2, 3$. *Согласно лемме 4, выполнены условия* (0.3)–(0.5). *Таким образом, по теореме 1, существует обобщенное решение задачи* (0.1), (0.2).

Поскольку $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 12/11 > 1$, $q_3 = \frac{p_0 p_3}{p_0 - p_3} = 462/89 > 3$, *то условия* (2.8), (2.9) *также выполнены. Согласно теореме 2, обобщенное решение задачи* (0.1), (0.2) *подчиняется оценке*
$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leqslant M\left(r^{-195/89} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(r)}\right), \quad r \geq 1. \tag{6.1}$$

Пример 2. *Пусть* $n > 2,\ 2 < p < n$,
$$B(z) = \begin{cases} |z|^{p-1}\left(-\ln|z| + \frac{p+1}{p-1}\right), & |z| < 1 \\ \frac{2}{p-1} + |z|^{p-1}\left(\ln|z| + 1\right), & |z| \geq 1. \end{cases}$$
Поскольку $B(z) \geq \frac{p+1}{p-1}|z|^{p-1}$ *при* $|z| < 1$, *то* $B^{-1}(t) \leqslant \left(\frac{p-1}{p+1}t\right)^{1/(p-1)}$ *при* $0 < t < \frac{p+1}{p-1}$. *Кроме того,* $|z|^{p-1} \leqslant B(z) \leqslant \frac{p+1}{p-1}|z|^p$ *при* $|z| \geq 1$, *поэтому* $\left(\frac{p-1}{p+1}t\right)^{1/p} \leqslant B^{-1}(t) \leqslant t^{1/(p-1)}$ *при* $t \geq \frac{p+1}{p-1}$. *Отсюда получаем*
$$h(t) \leqslant C_1 t^{\frac{n-p+1}{n(p-1)}},\ 0 < t < \frac{p+1}{p-1}, \quad \int_0^1 t^{-1}h(t)dt < \infty,$$

$$C_2 t^{\frac{n-p}{np}} \leqslant h(t) \leqslant t^{\frac{n-p+1}{n(p-1)}},\ t \geq \frac{p+1}{p-1}, \quad \int_1^{\infty} t^{-1} h(t) dt = \infty,$$

можно определить функции $(B^*)^{-1}(t)$, $B^*(z)$, *при этом справедливы неравенства:*

$$C_3 |z|^{\frac{n-p}{np}} \leqslant (B^*)^{-1}(z) \leqslant C_4 |z|^{\frac{n-p+1}{n(p-1)}},\ |z| \geq \frac{p+1}{p-1},$$

$$C_5 |z|^{\frac{n(p-1)}{n-p+1}} \leqslant B^*(z) \leqslant C_6 |z|^{\frac{np}{n-p}},\ |z| \geq C_7.$$

Возьмем $p_0 = \frac{n(p-1)}{n-p+1}$,

$$B_0(z) = \begin{cases} |z|^{p_0-1}\left(-\ln|z| + \frac{p_0+1}{p_0-1}\right), & |z| < 1 \\ \frac{2}{p_0-1} + |z|^{p_0-1}(\ln|z|+1), & |z| \geq 1. \end{cases}$$

такой выбор функций $B_0(z), B(z)$ *при* $p > (1+\sqrt{1+4n})/2$ *обеспечивает выполнение условий* (2.1), (2.6).

Рассмотрим функции

$$a_\alpha(x,z) = f_\alpha(x) + B'(z) = f_\alpha(x) + |z|^{p-3} z\,((p-1)|\ln|z|| + p)\,,\ \alpha = 1, \ldots, n,$$

$a_0(x,z) = f_0(x) + B_0'(z) = |z|^{p_0-3} z\,((p_0-1)|\ln|z|| + p_0)$. *Согласно лемме 4, выполнены условия* (0.3)–(0.5). *Таким образом, по теореме 1, существует обобщенное решение задачи* (0.1), (0.2).

Согласно теореме 3, обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) *в областях, удовлетворяющих условию* (2.12), *подчиняется оценке*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leqslant \mathcal{M}_2\left(\exp(-\kappa r)\, r^{n-1} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(2r)}\right), \quad r \geq r_0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Donaldson *№nlinear elliptic boundari value problems in Orlicz-Sobolev spaces* // J. Diff. Eq. 1971. V. 10. № 3. P. 507–528.
2. Климов В.С. *Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам* // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. С. 334–348.
3. A. Fougeres *Operateurs elliptiques du calcul des variations a coefficients tres fortement №n lineaires* // C. R. Acad. Sei. Paris Ser. A-B. 1972. V. 274. P. 763–766.
4. J.P. Gossez *№nlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients* // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 190. P. 163–206.
5. P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, A. Zimmermann *Re№rmalized solutions of №nlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces*. PhD programme: Mathematical methods in natural sciences (MMNS). 2011. Preprint №. 2011-013. 32 p.
6. Кожевникова Л.М., Каримов Р.Х. *Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 53–66.
7. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1. С. 90–96.
8. Гладков А.Л. *Задача Дирихле для некоторых вырожденных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 267–273.
9. H. Brezis *Semilinear equations in R_N without condition at infnity* // Appl. Math. Optim. 1984. V. 12. № 3. P. 271–282.
10. F. Bernis *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infnity* // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 106. № 3. P. 217–241.

11. J.I. Diaz, O.A. Oleinik *№nlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution* // C. R. Acad, Sci. Paris Ser. I Math. 1992. V. 315. № 1. P. 787–792.
12. M. Bokalo, O. Domanska *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces* // Mathematychni Studii. 2007. V. 28. № 1. P. 77–91.
13. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 8. С. 99–126.
14. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Единственность решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Проблемы математического анализа. 2016. № 85. С. 153-163.
15. Рутицкий Я.Б., Красносельский М.А. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* М.: Физматлит. 1958. 587 с.
16. Королев А.Г. *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлича* // Вестн. Моск. унив. 1983. Сер. 1. № 1. С. 32–37.
17. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. № 19. С. 44–62.
18. Кожевникова Л.М., Каримов Р.Х., Хаджи А.А. *О поведении решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. № 9. С. 13–17.
19. Хаджи А.А. *О неравенстве типа Фридрихса* // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 9. С. 30-33

Руслан Халикович Каримов,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: ruslan7k7@mail.ru

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
Елабужский институт Казанского федерального университета,
ул. Казанская, 89,423600, г. Елабуга, Россия,
E-mail: kosul@mail.ru

Анна Александровна Хаджи,
Тюменский государственный университет,
ул. Володарского, 6, Тюмень,
625003, г. Тюмень, Россия
E-mail: anna_5955@mail.ru