ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 8-22.

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

О 2-ПОРОЖДЕННОСТИ СЛАБО ЛОКАЛИЗУЕМЫХ ПОДМОДУЛЕЙ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. В работе рассматривается топологический модуль целых функций $\mathcal{P}(a;b)$ – изоморфный образ при преобразовании Фурье-Лапласа пространства Шварца распределений с компактными носителями в конечном или бесконечном интервале $(a;b)\subset\mathbb{R}$. Доказывается, что каждый слабо локализуемый подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ либо порожден двумя своими элементами, либо равен замыканию суммы двух подмодулей специального вида. Также приводятся двойственные результаты об инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространствах пространства $C^\infty(a;b)$.

Ключевые слова: целые функции, субгармонические функции, преобразование Фурье-Лапласа, конечно порожденные подмодули, локальное описание подмодулей, инвариантные подпространства, спектральный синтез.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30H99, 42A38, 47E05

1. Введение

Пусть $[a_1;b_1]\Subset[a_2;b_2]\Subset\ldots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a;b)$ вещественной прямой, P_k – банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k\exp(b_ky^+-a_ky^-)},\quad y^\pm=\max\{0,\pm y\},\quad z=x+\mathrm{i}y. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathcal{P}(a;b)$ индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. Каждое из вложений $P_k\subset P_{k+1}$ вполне непрерывно, следовательно, $\mathcal{P}(a;b)$ есть локально-выпуклое пространство типа (LN^*) (см. [1]). Известно (см., например, [2, §16.1]), что всякий элемент φ пространства $\mathcal{P}(a;b)$ является целой функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $\mathrm{i}[c_\varphi;d_\varphi]\subset\mathrm{i}(a;b)$.

Через $\mathcal{P}_0(a;b)$ будем обозначать линейное подпространство пространства $\mathcal{P}(a;b)$, состоящее из всех функций φ, которые быстро убывают на вещественной прямой:

$$|\varphi(x)|=o(|x|^n),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

В пространстве $\mathcal{P}(a;b)$ операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}(a;b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Для краткости всюду ниже, если не оговорено противное, будем пользоваться термином *«подмодуль»*, имея в виду замкнутый подмодуль модуля $\mathcal{P}(a;b)$, то есть замкнутое подпространство, инвариантное относительно умножения на z.

N.F. Abuzyarova, On 2-generateness of weakly localizable submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis.

Работа выполнена при поддержке гранта 01201456408 Минобрнауки РФ.

Поступила 31 мая 2016 г.

Обозначим $\mathcal{J}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}$ подмодуль, *порожденный функциями* $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in \mathcal{P}(a;b)$ (иначе, *m-порожденный*):

$$\mathcal{J}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m} = \overline{\{p_1\varphi_1 + \cdots + p_m\varphi_m, \quad p_1,\ldots,p_m \in \mathbb{C}[z]\}}, \tag{1.2}$$

Функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ называются *образующими* подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}$. Подмодуль с одной образующей называется *главным.*

Ниже приводятся определения понятий, характеризующих свойства подмодулей и использующихся в вопросах локального описания (см. [3] – [6]).

Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ положим $c_{\mathcal{J}} = \inf\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} c_\varphi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} d_\varphi$. Множество $[c_{\mathcal{J}};d_{\mathcal{J}}]$ называется *индикаторным отрезком* подмодуля $\mathcal{J}$.

Дивизор функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$n_\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если} \quad \lambda \text{ – нуль} \quad \varphi \quad \text{кратности} \quad m, \end{cases}$$

а *дивизор подмодуля* $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ – формулой $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} n_\varphi(\lambda)$. Далее, определяем *нулевое множество* Λ_φ *функции* φ:

$$\Lambda_\varphi = \{(\lambda_k;m_k):\ n_\varphi(\lambda_k) = m_k > 0\},$$

и *нулевое множество* $\Lambda_{\mathcal{J}}$ *подмодуля* $\mathcal{J}$:

$$\Lambda_{\mathcal{J}} = \{(\lambda_k;m_k):\ n_{\mathcal{J}}(\lambda_k) = m_k > 0\}.$$

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\varphi(z) \geq n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}};d_{\mathcal{J}}]$. В случае, если $c_{\mathcal{J}} = a$ и $d_{\mathcal{J}} = b$, слабая локализуемость $\mathcal{J}$ означает, что этот подмодуль *локализуемый* (*обильный*).

Пусть $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, $c,\ d \in \overline{\mathbb{R}}$ и

$$a \leq c \leq c_\varphi \leq d_\varphi \leq d \leq b.$$

Обозначим $\mathcal{J}(\varphi,\langle c;d\rangle)$ подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$, состоящий из всех функций $\psi \in \mathcal{P}(a;b)$ с множеством нулей $\Lambda_\psi \supset \Lambda_\varphi$ и индикаторной диаграммой $\mathrm{i}[c_\psi;d_\psi] \subset \mathrm{i}\langle c;d\rangle$ (здесь и всюду в дальнейшем символ «$\langle$» обозначает скобку «[» или «(», в зависимости от того, какое из соотношений $a = c$ или $a < c$ имеет место, так же следует понимать скобку «$\rangle$»). Ясно, что подмодуль $\mathcal{J}(\varphi,\langle c;d\rangle)$ слабо локализуем. Для подмодуля $\mathcal{J}(\varphi,[c_\varphi;d_\varphi])$ будем использовать более короткое обозначение $\mathcal{J}(\varphi)$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если выполнение условий $\varphi \in \mathcal{J}$ и $n_\varphi(\lambda) > n_{\mathcal{J}}(\lambda)$ влечет включение $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{J}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *устойчив*, если он устойчив в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$.

Легко видеть, что *устойчивость подмодуля $\mathcal{J}$ является необходимым условием его слабой локализуемости.* Однако, не всякий устойчивый подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ слабо локализуем. Действительно, из результатов работы [7, § 4] следует, что каждый главный подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ устойчив. Это также можно проверить непосредственно, используя определение устойчивости и описание топологии в $\mathcal{P}(a;b)$. С другой стороны, пример, построенный в работе [8], а также теорема 3 работы [9], показывают, что в модуле $\mathcal{P}(a;b)$ не все главные подмодули слабо локализуемы. Таким образом, утверждение о том, что всякий устойчивый конечно порожденный подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ слабо локализуем, не верно.

В данной работе мы доказываем, что обратное утверждение имеет место: каждый слабо локализуемый подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ либо порожден двумя (быть может, совпадающими) своими элементами, либо равен замыканию суммы двух (быть может, совпадающих) подмодулей вида $\mathcal{J}(\varphi,\langle c;d\rangle)$. В [3, теоремы 4 и 5] нами были анонсированы менее общие утверждения.

Вопрос о 2-порожденности в широком смысле ранее исследовался для локализуемых (обильных) подмодулей в модуле целых функций конечного порядка, определяемом ограничениями на индикатор [10], [11], для локализуемых (обильных) подмодулей в абстрактных весовых модулях голоморфных функций [12], для подмодулей с конечным нулевым множеством в модуле $\mathcal{P}(a;b)$ [4]. Один из результатов работы [12] – это теорема о том, что локализуемые (обильные) подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$ порождаются двумя подмодулями вида $\mathcal{J}(\varphi,\,(a;b))$. Отметим, что из абстрактной части статьи [12] можно вывести п. 1) теоремы 1 настоящей работы для частного случая, когда $c_{\mathcal{J}}=a$ или (и) $d_{\mathcal{J}}=b$. Другие утверждения о 2-порожденности слабо локализуемых подмодулей в $\mathcal{P}(a;b)$, доказываемые здесь: п. 2) теоремы 1, теорема 3 и п. 1) теоремы 1 в общей формулировке – не могут быть получены при помощи результатов работы [12].

Дальнейшее изложение ведется следующим образом: второй параграф содержит теоремы о 2-порожденности в широком смысле произвольного слабо локализуемого подмодуля $\mathcal{J}$ в $\mathcal{P}(a;b)$ (теоремы 1 и 3), в третьем параграфе из этих теорем выводятся двойственные утверждения о структуре инвариантных относительно оператора дифференцирования замкнутых подпространств пространства $C^\infty(a;b)$.

2. Структура слабо локализуемых подмодулей

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{J}\subset\mathcal{P}(a;b)$ – слабо локализуемый подмодуль.*

1) Если $\mathcal{J}$ содержит функции из $\mathcal{P}_0(a;b)$, то для любой функции $\varphi_1\in\mathcal{J}\bigcap\mathcal{P}_0(a;b)$ существует бесконечно много функций $\varphi_2\in\mathcal{J}\bigcap\mathcal{P}_0(a;b)$ со свойством:

$$\mathcal{J}=\overline{\mathcal{J}\left(\varphi_1,\langle c_{\mathcal{J}};d_{\mathcal{J}}\rangle\right)+\mathcal{J}\left(\varphi_2,\langle c_{\mathcal{J}};d_{\mathcal{J}}\rangle\right)}.\tag{2.1}$$

2) Если $\mathcal{J}\bigcap\mathcal{P}_0(a;b)=\emptyset$, то существует функция $\varphi_0\in\mathcal{J}$ такая, что

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_{\varphi_0}=\{p\varphi_0,\quad p\in\mathbb{C}[z]\}.\tag{2.2}$$

Доказательство. 1) Первое из сформулированных утверждений доказывается по той же схеме, что и теорема 2 в работе [4], где были рассмотрены устойчивые подмодули с конечным множеством нулей.

Без ограничения общности можем считать, что $0t\in\Lambda_{\mathcal{J}}$ и $\varphi_1(0)=1$. Пусть $\Lambda_{\varphi_1}=\{\lambda_j\}$, $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots$, каждый нуль выписан столько раз, какова его кратность.

Выберем и зафиксируем два числа a', $b'\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям

$$a\le a'<c_{\varphi_1}\le d_{\varphi_1}<b'\le b,\quad a'\le c_{\mathcal{J}},\quad d_{\mathcal{J}}\le b',$$

где $c_{\varphi_1}=h_{\varphi_1}(-\pi/2)$, $d_{\varphi_1}=h_{\varphi_1}(\pi/2)$, h_{φ_1} – индикатор функции φ_1. Также выберем и зафиксируем какую-нибудь последовательность $\widetilde{\Gamma}=\{\tilde\gamma_k\}$, $0t\in\widetilde{\Gamma}$ столь близкую к Λ_{φ_1}, что для последовательностей Λ_{φ_1} и $\widetilde{\Gamma}$ выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\lambda_j-\tilde\gamma_j|}{1+|\operatorname{Im}\lambda_j|+|\operatorname{Im}\tilde\gamma_j|}<+\infty.\tag{2.3}$$

Положим

$$\widetilde{C}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\lambda_j-\tilde\gamma_j|}{1+|\operatorname{Im}\lambda_j|},\qquad \widetilde{A}_m=e^{2\widetilde{C}}\|s_1^{(m+1)}\|_{L^1(a';b')},$$

где $s_1\in C_0^\infty(a';b')$ – прообраз при преобразовании Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ функции φ_1. Сходимость ряда в определении величины $\widetilde{C}$ следует из условия (2.3) (см. доказательство теоремы 5.1.2 в [13]).

Рассмотрим произвольную последовательность $\Gamma=\{\gamma_k\}$, $0t\in\Gamma$, для которой

$$|\gamma_k-\lambda_k|\le|\tilde\gamma_k-\lambda_k|,\quad k=1,2,\ldots\tag{2.4}$$

Согласно предложению 3 и замечанию 1 из работы [4] функция φ_2, определенная по функции φ_1 и последовательности Γ равенством

$$\varphi_2(z) = e^{-icz} \lim_{R\to\infty} \prod_{|\gamma_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\gamma_k}\right), \quad \text{где} \quad c = \frac{c_{\varphi_1} + d_{\varphi_1}}{2}, \tag{2.5}$$

есть преобразование Фурье-Лапласа некоторой функции $s_2 \in C_0^\infty(a'; b') \subset C_0^\infty(a; b)$, причем $\operatorname{ch}\operatorname{supp} s_2 = [c_{\varphi_1}; d_{\varphi_1}]$ и

$$|s_2^{(m)}(t)| \le \tilde{A}_m, \quad t \in (a; b), \quad m = 0, 1, \dots \tag{2.6}$$

Здесь $\operatorname{ch}\operatorname{supp} s_2$ – замыкание выпуклой оболочки носителя функции s_2.

Пусть $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ – возрастающая последовательность вещественных чисел, больших 2, такая, что

$$|\varphi_1(x)| \le |x|^{-k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x| \ge r_k. \tag{2.7}$$

Положим

$$R_k = \max\{r_k, \tilde{A}_{k+1}(b' - a')\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.8}$$

Для функции φ_2, в силу соотношения $\varphi_2 = \mathcal{F}(s_2)$, $s_2 \in C_0^\infty(a'; b')$, и оценок (2.6), имеем

$$|\varphi_2(x)| \le \frac{\tilde{A}_{k+1}(b' - a')}{|x|^{k+1}} \le \frac{1}{|x|^k}, \quad |x| \ge R_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.9}$$

Заметим, что последние оценки справедливы *для всех* функций φ_2, определенных формулой (2.5) по функции φ_1 и последовательности Γ, если только Γ удовлетворяет (2.4).

Последовательности Λ и Γ имеют одинаковую плотность, обозначим ее Δ_0. Для произвольных фиксированных чисел $\Delta > \Delta_0$, $\delta > 0$ положим $R_j^* = \mu(\delta/\Delta)\max\{|\lambda_j|, |\gamma_j|\}$, где функция $\mu(\chi)$ – обратная к функции

$$\chi(\mu) = \frac{1}{\mu}\ln(1+\mu) + \ln\left(1 + \frac{1}{\mu}\right). \tag{2.10}$$

Воспользуемся следующим утверждением, справедливым для функций φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{F}(C_0^\infty(a; b))$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1, \qquad h_{\varphi_1}(\theta) = h_{\varphi_2}(\theta), \quad \theta \in [0; 2\pi).$$

Теорема A [4, теорема 1]. *Предположим, что для некоторых чисел $\Delta > \Delta_0$, $\delta > 0$ и возрастающей последовательности $R_k \ge 2$, $k = 1, 2, \dots$, такой, что*

$$|\varphi(x)| \le \frac{1}{|x|^k}, \quad |\psi(x)| \le \frac{1}{|x|^k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x| \ge R_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

верно соотношение

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{S_{k+1}}}{\max\{R_k, R_k^*\}} > \delta, \tag{2.11}$$

где

$$S_k = \sum_{j \ge k} \left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\gamma_j} \right|.$$

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$, порожденный функциями φ_1 и φ_2 в модуле $\mathcal{P}(a; b)$, устойчив.

Фиксируем *любую* последовательность Γ, подчиненную, кроме (2.4), дополнительным требованиям: пересечение $\Gamma \bigcap \Lambda$ есть $\Lambda_{\mathcal{J}}$ и для последовательностей Λ и Γ выполнено соотношение (2.11). Так как $\mathcal{J}$ – слабо локализуемый подмодуль, функция φ_2, задаваемая формулой (2.5) по такой последовательности Γ, содержится в $\mathcal{J}$. Соотношения (2.7), (2.9) и (2.11) означают, что выполнены условия теоремы A с числами R_k, определенными формулой (2.8). Поэтому, согласно этой теореме, 2-порожденный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ устойчив или, что в нашем случае эквивалентно (см. [7, предложение 4.9]), *тождественный нуль* *можно аппроксимировать в топологии $\mathcal{P}(a;b)$ функциями вида $(p\varphi_1 - q\varphi_2)$, где p, q – многочлены и* $p(0)=q(0)=1$. Этот факт, в силу [7, предложение 4.8], является достаточным условием для устойчивости подмодуля

$$\widetilde{\mathcal{J}} := \overline{\mathcal{J}\left(\varphi_1, \langle c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}\rangle\right) + \mathcal{J}\left(\varphi_2, \langle c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}\rangle\right)}.$$

Устойчивый подмодуль $\widetilde{\mathcal{J}}$ содержит слабо локализуемый подмодуль $\mathcal{J}(\varphi_1)$. Теорема 1 из [3] утверждает, что тогда $\widetilde{\mathcal{J}}$ – слабо локализуемый подмодуль. Учитывая, что подмодули $\mathcal{J}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}$ имеют одинаковые индикаторные отрезки и нулевые множества, заключаем, что $\mathcal{J} = \widetilde{\mathcal{J}}$.

2) Нетрудно проверить, что если подмодуль $\mathcal{J}$ не содержит функций из подпространства $\mathcal{P}_0(a;b)$, то $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \subset (a;b)$ и $2\rho_{\Lambda_{\mathcal{J}}} = d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}}$. Кроме того, в этом случае для любой функции $\psi \in \mathcal{J}$ множество $\Lambda_\psi \setminus \Lambda_{\mathcal{J}}$ конечно. Действительно, если это не так, то, полагая

$$\omega(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right),$$

где последовательность $\{\mu_j\} \subset \Lambda_\psi \setminus \Lambda_{\mathcal{J}}$ – «редкая», то есть $\lim\limits_{j\to\infty} |\mu_{j+1}|/|\mu_j| = +\infty$, получим, что $\frac{\psi}{\omega} \in \mathcal{J} \bigcap \mathcal{P}_0(a;b)$.

Из вышесказанного следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$ функция

$$\varphi_0(z) = e^{\mathrm{i}cz} \lim_{R\to+\infty} \prod_{\lambda_j \in \Lambda_{\mathcal{J}}, |\lambda_j|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)$$

содержится в $\mathcal{J}$ и порождает этот помодуль, точнее, выполняется соотношение (2.2).

□

В оставшейся части настоящего параграфа будет доказан следующий факт: если индикаторный отрезок слабо локализуемого подмодуля $\mathcal{J}$ есть собственное подмножество интервала $(a;b)$, то этот подмодуль либо главный, либо 2-порожденный в смысле (1.2).

Пусть функция $\Phi \in \mathcal{P}(a;b)$ такова, что

$$\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{J}_\Phi = \{p\Phi, \quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.12}$$

Тогда $\mathcal{J}_\Phi$ – слабо локализуемый подмодуль и, согласно теореме 2 [9], $\Phi t \in \mathcal{P}_0(a;b)$. Как будет видно ниже, в доказательстве теоремы 3, функция с такими свойствами имеется в каждом слабо локализуемом подмодуле.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{\mu_j\} \subset \Lambda_\Phi \setminus \{0\}$, для которой

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{|\mu_{j+1}|}{|\mu_j|} = \alpha_0 > 1. \tag{2.13}$$

Определим функции

$$\omega(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \qquad \varphi = \frac{\Phi}{\omega}.$$

Для $z \in \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$ символом $\operatorname{dist}(z, M)$ обозначаем расстояние от точки z до множества M.

Теорема 2. *Функция $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$ и порождает слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. *1) Для каждого натурального числа n существует представление функции ω в виде произведения двух целых функций $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$, таких, что при всех z, $\operatorname{dist}(z, \Lambda_\omega) \geq \delta > 0$, справедливо неравенство*

$$\bigl|\ln|\omega_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\omega(z)|\bigr| \leq A\ln(e + |z|), \tag{2.14}$$

где A – положительная постоянная, зависящая только от функции ω и величиины δ, $\Lambda_\omega = \{\mu_j\}$ – нулевое множество функции ω.

2) Имеется подпоследовательность $\{\omega_{2,n_k}\varphi\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$ к функции $\widetilde{\Phi}$, причем $\left(\Phi/\widetilde{\Phi}\right)$ – многочлен.

Доказательство. 1) Положим

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \{\mu_j \in \Lambda_\omega : \ |\operatorname{Im}\mu_j| < 1\}, \quad \widehat{\mathcal{M}} = \Lambda_\omega \setminus \widetilde{\mathcal{M}},$$

$$\tilde{\omega}(z) = \prod_{\mu_j \in \widetilde{\mathcal{M}}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \qquad \hat{\omega}(z) = \prod_{\mu_j \in \widehat{\mathcal{M}}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right).$$

Ясно, что $\omega = \tilde{\omega}\hat{\omega}$.

Для получения представления $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{1,n}\tilde{\omega}_{2,n}$ воспользуемся следующей теоремой.

Теорема B [15, теорема 2]. *Пусть $\{z_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ – нули целой функции v, пронумерованные в порядке возрастания $\operatorname{Re} z_k$, причем*

$$\operatorname{Re} z_0 = \min_k\{\operatorname{Re} z_k, \ \operatorname{Re} z_k \geq 0\}.$$

Если все точки z_k лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1$, причем $|\operatorname{Re} z_k| > 1$, и в каждом квадрате

$$\Pi_j = \{z : \ \ |\operatorname{Im} z| < 1, \ 2j - 1 \leq \operatorname{Re} z < 2j + 1\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

находится не более одной точки z_k, то функция v представима в виде произведения целых функций v_1, v_2 так, что

$$|\ln|v_1(z)| - \ln|v_2(z)|| \leq C_1\ln^+|z| + C_2\ln^+\frac{1}{d(z)} + C_3,$$

где $d(z)$ – расстояние от точки z до множества нулей функции v, а $C_i > 0$ – абсолютные постоянные (не зависящие от функции v).

Отбрасывая, если необходимо, конечное число нулей функции $\tilde{\omega}$, а затем перенумеровав оставшиеся нули в порядке возрастания их вещественных частей, видим, что последовательность $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{\mu}_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет условиям теоремы B. Согласно этой теореме, при всех z, $\operatorname{dist}(z, \widetilde{\mathcal{M}}) \geq \delta > 0$, функция

$$\tilde{\omega}_{1,n}(z) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(1 - \frac{z}{\tilde{\mu}_{2^{n+1}k}}\right)\left(1 - \frac{z}{\tilde{\mu}_{2^{n+1}k+1}}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

удовлетворяет соотношению

$$\bigl|\ln|\tilde{\omega}_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\tilde{\omega}(z)|\bigr| \leq \tilde{A}\ln(e + |z|), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$

где постоянная $\tilde{A} > 0$ зависит только от δ; а выбор индексов $2^{n+1}k$, $2^{n+1}k + 1$ в формуле (2.15) произведен согласно рассуждениям, проводимым при доказательстве теоремы B [15, теорема 2]. Аналогичное утверждение для функции $\hat{\omega}$ получим, используя еще один результат работы [15]. Для этого напомним необходимые обозначения. Пусть

$$P_k = \{z : \ 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2^k + 1, \ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2^k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда разность $P_k \setminus P_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, состоит из трех квадратов, конгруэнтных P_{k-1}. Символами P_k^m, $m = 1, 2, \ldots, 12$, обозначены эти три квадрата, а также симметричные им относительно обеих осей и начала координат. Принадлежность граничных отрезков и вершин определяется таким образом, чтобы квадраты P_k^m попарно не пересекались и покрывали все множество $\{z: \ |\mathrm{Im}\, z| \geq 1\}$.

Теорема C [15, теорема 3]. *Пусть $\{z_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ – нули целой функции v, пронумерованные в порядке возрастания $|z_k|$. Предположим, что $|\mathrm{Im}\, z| \geq 1$, и в каждом квадрате P_k^m лежит не более одного нуля функции v. Тогда функция v представляется в виде произведения целых функций v_1, v_2 так, что*

$$|\ln |v_1(z)| - \ln |v_2(z)|| \leq C_1 \ln^+ |z| + C_2 \ln^+ \frac{1}{d(z)} + C_3,$$

где $d(z)$ – расстояние от точки z до множества нулей функции v, а C_i – абсолютные постоянные (не зависящие от функции v).

Фиксируем число $\alpha \in (1; \alpha_0)$. Отбрасывая, если необходимо, конечное число нулей $\hat{\mu}_k$ функции $\hat{\omega}$, а затем, перенумеровав оставшиеся нули в порядке возрастания $|\hat{\mu}_k|$, с учетом условия (2.13), будем иметь

$$|\hat{\mu}_{k+1}| > \alpha |\hat{\mu}_k|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Положим

$$m = \left[\log_\alpha \sqrt{5}\right] + 1.$$

Нетрудно проверить, что все функции

$$\hat{\omega}_j(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\hat{\mu}_{mk+j}}\right), \quad j = 1, \ldots, m,$$

удовлетворяют условиям теоремы C. Применив к каждой функции $\hat{\omega}_j$, $j = 1, \ldots, m$, эту теорему n раз, получим представление

$$\hat{\omega}_j = \hat{\omega}_{j,1,n} \hat{\omega}_{j,2,n},$$

причем

$$\left| \ln |\hat{\omega}_{j,1,n}(z)| - 2^{-n} \ln |\hat{\omega}_j(z)| \right| \leq \widehat{A} \ln (e + |z|), \quad \mathrm{dist}(z, \widehat{\mathcal{M}}) \geq \delta, \tag{2.17}$$

где постоянная $\widehat{A} > 0$ зависит только от δ и ω. Полагая

$$\hat{\omega}_{1,n} = \hat{\omega}_{1,1,n} \ldots \hat{\omega}_{m,1,n}, \quad \hat{\omega}_{2,n} = \frac{\hat{\omega}}{\hat{\omega}_{1,n}},$$

получим нужную факторизацию

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_{1,n} \hat{\omega}_{2,n}.$$

Из оценок (2.16), (2.17) видим, что для функций

$$\omega_{1,n} = \tilde{\omega}_{1,n} \hat{\omega}_{1,n}, \quad \omega_{2,n} = \frac{\omega}{\omega_{1,n}}$$

справедливо первое утверждение леммы.

2) Из соотношений $\omega = \omega_{1,n} \omega_{2,n}$ и (2.14) следует, что для всех натуральных n и всех $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{dist}(z, \Lambda_\omega) \geq \delta$, верны оценки

$$|\omega_{2,n}(z) \varphi(z)| \leq (e + |z|)^{[A]+1} |\Phi(z)|.$$

В силу топологических свойств пространства $\mathcal{P}(a; b)$ последовательность $\{\omega_{2,n}\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна в этом пространстве. И значит, существует подпоследовательность $\{\omega_{2,n_k}\varphi\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся в топологии $\mathcal{P}(a; b)$ к некоторой функции $\widetilde{\Phi}$, причем индикатор этой функции совпадает с равными между собой индикаторами функций Φ и φ. Соответствующая подпоследовательность целых функций минимального типа при порядке 1

$$\omega_{1,n_k} = \frac{\Phi}{\omega_{2,n_k} \varphi}$$

сходится к целой функции $(\Phi/\widetilde{\Phi})$, которая имеет минимальный тип при порядке 1. Из оценок (2.14) предельным переходом получаем полиномиальную оценку сверху для $|\Phi/\widetilde{\Phi}|$ на вещественной прямой. Применяя следствие из теоремы Фрагмена-Линделефа [2, §6.1], заключаем, что $(\Phi/\widetilde{\Phi})$ – многочлен.

□

Пусть $n(r) = \sum\limits_{|\mu_j|<r} 1$ – считающая функция последовательности Λ_ω, $N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |\omega(z)|$, $m(r) = \min\limits_{|z|=r} |\omega(z)|$.

Из условия (2.13) на последовательность Λ_ω следует, что

$$n(r) = C_0 \ln(1+r), \quad r \geq 0, \tag{2.18}$$

где C_0 – положительная постоянная. Из леммы 3.5.8 монографии [22], с учетом (2.18) и формулы Йенсена (см., например, [22, §1.2]) получаем двойное неравенство

$$N(r) \leq M(r) \leq N(r) + C_0 \ln(1+r). \tag{2.19}$$

Лемма 2. *1) При всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место оценка сверху*

$$\ln|\omega(z)| \leq N(|z|) + C_0 \ln(1+|z|). \tag{2.20}$$

2) Для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{dist}(z, \Lambda_\omega) \geq \delta$, верна оценка снизу

$$\ln|\omega(z)| \geq (1-\varepsilon)N(|z|) - C_1 \ln(1+|z|) - C_{2,\varepsilon}, \tag{2.21}$$

где постоянная $C_{2,\varepsilon} > 0$ зависит от Λ_ω, δ и ε, а постоянная $C_1 > 0$ – только от Λ_ω.

Доказательство. 1) Нужная оценка (2.20) следует из правого неравенства в (2.19).
2) Известно, что для целой функции, нулевое множество которой удовлетворяет условию (2.18), соотношение $\ln m(r) \sim \ln M(r)$ выполняется, когда $r \to \infty$ по множеству единичной относительной меры [22, теорема 3.6.1]. Исключительное множество значений r может быть покрыто счетным множеством непересекающихся, в силу (2.13), интервалов, центрированных с множеством $\{|\mu_j|\}$ (то есть каждый интервал содержит ровно одну точку $|\mu_j|$). Это множество интервалов имеет нулевую относительную длину. Не ограничивая общности рассуждений можем считать, что существует убывающая последовательность положительных чисел δ_j, j=1,2,..., такая что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\ln m(r) \geq (1-\varepsilon)\ln M(r), \quad r > r_\varepsilon, \quad rt \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \left((1-\delta_j)|\mu_j|; (1+\delta_j)|\mu_j|\right).$$

Из (2.13) и (2.18) нетрудно вывести, что

$$N(r) \leq N((1-\delta_j)r) + (C_0 \ln 2 + 1)\ln(1+r) + \tilde{C}_{2,\varepsilon}, \quad r > 0,$$

где постоянная $\tilde{C}_{2,\varepsilon} > 0$ зависит только от Λ_ω, δ и ε.

Требуемая оценка снизу (2.21) получается стандартными методами из последних двух оценок и левого неравенства в (2.19). □

Лемма 3. *Для каждого натурального n функция $\omega_{2,n}\varphi$ содержится в подмодуле $\mathcal{J}_\varphi$.*

Доказательство. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ имеем, в силу (2.14),

$$\ln|\omega_{2,n}(z)| \leq (1-2^{-n})\ln|\omega(z)| + A\ln(e+|z|), \quad \operatorname{dist}(z, \Lambda_\omega) \geq \delta. \tag{2.22}$$

С учетом (2.13) и (2.20), отсюда получаем оценку

$$\ln|\omega_{2,n}(z)| \leq (1-2^{-n})N(|z|) + \tilde{A}\ln(e+|z|), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим весовую функцию $\widetilde{V}(x) = (e+|x|)^{\tilde{A}+1} \exp\left((1-2^{-n})N(|x|)\right) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Эта функция четная, выпуклая по $\ln|x|$, для любого $k = 0, 1, \ldots$ верно соотношение

$$|x|^k = o(\widetilde{V}(x)), \quad |x| \to +\infty.$$

Для функции $\omega_{2,n}$ из оценки (2.23) следует, что

$$\frac{|\omega_{2,n}(x)|}{\widetilde{V}(x)} \to 0, \quad |x| \to +\infty.$$

Рассуждая точно также, как при доказательстве леммы 3 в работе [9], выводим, что существует последовательность многочленов $\{p_j\}$, сходящаяся к функции $\omega_{2,n}$ в весовой норме $\|\cdot\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\cdot|}{V(x)}$, где $V(x) = (1+|x|)^2\widetilde{V}(x)$.

Положим $v(x) = \ln V(x)$,

$$P_v(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau)}{(\tau-x)^2+y^2} \mathrm{d}\,\tau$$

– интеграл Пуассона от функции v, $z = x + \mathrm{i}y$. Из условия (2.13) нетрудно вывести, что функция v принадлежит классу *медленно меняющихся канонических весов*, введенных в монографии [19, §1.3]. Поэтому (см. [19, §1.4]) функция P_v гармонична в верхней и нижней полуплоскостях, непрерывна и субгармонична во всей комплексной плоскости, удовлетворяет оценке

$$P_v(z) \geq v(|z|), \quad z \in \mathbb{R},$$

и соотношению

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{P_v(z)}{v(|z|)} = 1. \tag{2.24}$$

Так как $\mathcal{P}(a;b)$ – локально-выпуклое пространство типа (LN^*), для того, чтобы последовательность $p_j\varphi$ была ограничена в нем, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена по одной из норм (1.1) (см. [1]). Принимая во внимание оценку (2.21), определение веса V, соотношение (2.24) и свойства функции $N(r)$, вытекающие из условия (2.13), и используя теорему Фрагмена-Линделефа, устанавливаем, что

$$|p_j(z)\varphi(z)| \leq (e+|z|)^{\mathrm{const}} \exp(d_\varphi y^+ - c_\varphi y^-),$$

где d_φ (c_φ) – значение индикатора функции φ в точке $\pi/2$ (соответственно, в точке $-\pi/2$). Последняя оценка эквивалентна ограниченности последовательности $\{p_j\varphi\}$ по одной из норм (1.1).

Из этого факта, опять используя свойства локально-выпуклых пространств типа (LN^*) (см. [1]), выводим, что найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в $\mathcal{P}(a;b)$ к функции $\omega_{2,n}\varphi$.

$\square$

Доказательство теоремы 2.

Включение $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$ очевидно. Из п. 2) леммы 1 и леммы 3 следует, что

$$\Phi \in \mathcal{J}_\varphi. \tag{2.25}$$

В силу (2.12) имеем $\mathcal{J}(\Phi) \subset \mathcal{J}_\varphi$. Как утверждается в теореме 1 работы [3], это соотношение, с учетом устойчивости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, эквивалентно слабой локализуемости $\mathcal{J}_\varphi$.

Теорема 3. *Пусть подмодуль $\mathcal{J}$ слабо локализуем и $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] \subset (a;b)$. Тогда либо $\mathcal{J}$ – главный подмодуль, либо $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$, где $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{J} \bigcap P_0(a;b)$.*

Доказательство. Если $\mathcal{J} \bigcap \mathcal{P}_0(a;b) = \emptyset$, то, как доказано в п. 2) теоремы 1, $\mathcal{J}$ – главный подмодуль. Поэтому дальнейшие рассуждения будем вести в предположении, что $\mathcal{J} \bigcap \mathcal{P}_0(a;b) \neq \emptyset$.

Сначала покажем, что в подмодуле $\mathcal{J}$ существует функция $\varphi_1 \in \mathcal{P}_0(a;b)$ со свойствами: $c_{\varphi_1} = c_\mathcal{J}$, $d_{\varphi_1} = d_\mathcal{J}$, главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1}$ слабо локализуем.

Для этого рассмотрим произвольную функцию $\tilde{\varphi} \in \mathcal{J} \bigcap \mathcal{P}_0(a;b)$ и положим

$$\varphi = \left(e^{\mathrm{i}(c_{\tilde{\varphi}}-c_\mathcal{J})z} + e^{\mathrm{i}(d_\mathcal{J}-d_{\tilde{\varphi}})z}\right)\tilde{\varphi}.$$

Ясно, что функция φ принадлежит множеству $\mathcal{J}\bigcap\mathcal{P}_0(a;b)$, и ее индикаторная диаграмма есть $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}};d_{\mathcal{J}}]$. Если главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем, то полагаем $\varphi_1=\varphi$. В противном случае рассмотрим наибольшую субгармоническую миноранту $v(z)$ функции $(H(z)-\ln|\varphi(z)|)$, где $H(z)=d_{\mathcal{J}}(\operatorname{Im}z)^+-c_{\mathcal{J}}(\operatorname{Im}z)^-$.

Для функции v справедливо соотношение $vt\equiv-\infty$. Действительно, в силу включения $\varphi\in\mathcal{P}_0(a;b)$, для любого $k=0,1,2,\dots$, имеем $M_k=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)x^k|<+\infty$, а также

$$\varphi(z)=\int\limits_a^b s(t)e^{-\mathrm{i}tz}\mathrm{d}\,t,\quad s\in C_0^\infty(a;b).$$

Класс $\mathcal{C}_{(a;b)}(\{M_k\})$ (см., например, [21, §IV.A]) содержит ненулевую функцию s, и значит, не является квазианалитическим. Это эквивалентно, согласно критерию Карлемана, соотношению

$$\int\limits^{\infty}\frac{\ln T(r)}{1+r^2}\mathrm{d}\,r<+\infty,$$

где $T(r)=\sup\limits_{k\geq0}\frac{r^k}{M_k}$ – функция следа последовательности $\{M_k\}$, (см., например, [21, §IV.A]). Таким образом, $\ln T(e^t)$ – конечная функция, выпуклая по $t\in\mathbb{R}$. Следовательно, функция $u(z)=\ln T(|z|)t\equiv-\infty$ субгармонична в $\mathbb{C}$ [23, теорема 2.1.2]. Из определения u вытекает оценка

$$u(x)+\ln|\varphi(x)|\leq0,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{2.26}$$

Функция φ, как и все элементы пространства $\mathcal{P}(a;b)$, имеет вполне регулярный рост во всей плоскости, а функция u зависит только от $|z|$. Применяя теорему о сложении индикаторов [24, теорема 1], из (2.26) выводим, что u имеет минимальный тип при порядке 1. Из этого факта, оценки (2.26), теоремы Фрагмена-Линделефа для субгармонических функций [2, §7.3], следует оценка

$$u(z)+\ln|\varphi(z)|\leq H(z),\quad z\in\mathbb{C},$$

а из нее – неравенство $u(z)\leq v(z)$, $z\in\mathbb{C}$. И значит, $vt\equiv-\infty$.

Пусть ω – целая функция (минимального экспоненциального типа), удовлетворяющая соотношению

$$|\ln|\omega(z)|-v(z)|\leq C\ln(1+|z|),\quad zt\in E,\tag{2.27}$$

с некоторой постоянной $C>0$, исключительное множество E может быть покрыто счетным объединением кружков с конечной суммой радиусов. Существование такой функции следует из теоремы 5 работы [14]. Положим $\Phi=\omega\varphi$. Ясно, что $\Phi\in\mathcal{J}$. Из того, что функция v – *наибольшая* субгармоническая миноранта функции $(H-\ln|\varphi|)$, и оценки (2.27) следует выполненение соотношений (2.12) для функции Φ. Выберем последовательность $\{\mu_j\}\subset\Lambda_\Phi\setminus\Lambda_{\mathcal{J}}$, удовлетворяющую условиям (2.13), $\mu_j\neq0$. Положим

$$\varphi_1=\frac{\Phi}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\mu_j}\right)}.$$

Для этой функции справедлива теорема 2, и значит, J_{φ_1} – слабо локализуемый подмодуль.

Теперь рассуждаем так же, как при доказательстве п. 1) теоремы 1. Определим функцию φ_2 по формуле (2.5), где последовательность Γ удовлетворяет условию $\Gamma\bigcap\Lambda_{\varphi_1}=\Lambda_{\mathcal{J}}$ и столь близка к последовательности Λ_{φ_1}, что подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ устойчив. Кроме того, этот устойчивый подмодуль содержит слабо локализуемый подмодуль $\mathcal{J}(\Phi)$. Теорема 1 из работы [3] утверждает, что тогда подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ слабо локализуем. Индикаторный отрезок и нулевое множество подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ такие же, как у исходного подмодуля $\mathcal{J}$. Следовательно, $\mathcal{J}=\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$.

□

3. Представление инвариантных подпространств, допускающих слабый спектральный синтез

Рассмотрим пространство Шварца $\mathcal{E}(a;b) = C^\infty(a;b)$, наделенное метризуемой топологией проективного предела банаховых пространств $C^k[a_k;b_k]$, где $[a_1;b_1] \Subset [a_2;b_2] \Subset \ldots$ – какая-нибудь последовательность отрезков, исчерпывающая интервал $(a;b)$. Известно, что $\mathcal{E}(a;b)$ – рефлексивное пространство Фреше. Обозначим через W – замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$ (короче, *D-инвариантное*) подпространство этого пространства. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только замкнутые подпространства в $\mathcal{E}(a;b)$.

Пусть $\operatorname{Exp} W$ – запас всех корневых элементов оператора D (экспоненциальных одночленов $t^j e^{-\mathrm{i}\lambda t}$), содержащихся в W. Для нетривиального (не совпадающего со всем пространством $\mathcal{E}(a;b)$) подпространства W множество $\operatorname{Exp} W$ не более, чем счетно.

Положим
$$W_I = \{f \in \mathcal{E}: \quad f^{(k)}(t) = 0, \ t \in I, \ k = 0, 1, 2, \dots\}, \tag{3.1}$$
где $I \subset (a;b)$ – относительно замкнутый непустой промежуток, и обозначим I_W минимальный относительно замкнутый в $(a;b)$ непустой промежуток, удовлетворяющий условию $W_I \subset W$ (существование такого промежутка следует из теоремы 4.1 [16]).

Преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$, действующее в сильном сопряженном пространстве $\mathcal{E}'(a;b)$ по правилу
$$\mathcal{F}(S)(z) = (S, e^{-itz}), \quad S \in (C^\infty(a;b))',$$
есть линейный топологический изоморфизм пространств $(C^\infty(a;b))'$ и $\mathcal{P}(a;b)$ [17, теорема 7.3.1]. Имеет место следующий

принцип двойственности *между совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ слабо локализуемых подмодулей модуля $\mathcal{P}(a;b)$ и совокупностью $\{W\}$ D-инвариантых подпространств пространства $\mathcal{E}(a;b)$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу: $\mathcal{J} \longleftrightarrow W$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, где замкнутое подпространство $W^0 \subset \mathcal{E}'(a;b)$ состоит из всех распределений $S \in \mathcal{E}'(a;b)$, аннулирующих W, при этом*
$$\overline{I}_W = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}], \quad \operatorname{Exp} W = \{t^j e^{-\mathrm{i}\lambda_k t}, \ j = 0, \dots m_k - 1, \quad (\lambda_k, m_k) \in \Lambda_{\mathcal{J}}\},$$
где $\Lambda_{\mathcal{J}}$ – множество нулей подмодуля $\mathcal{J}$ ([3, принцип двойственности], [4, предложение 1]).

Известно (см. [16, теорема 2.1]), что для нетривиального D-инвариантного подпространства W спектр σ_W оператора $D: W \to W$ либо совпадает со всей комплексной плоскостью, либо дискретен; во втором случае $\sigma_W = \Lambda_{\mathcal{J}}$, согласно **принципу двойственности**.

Нетривиальное D-инвариантное подпространство допускает *слабый спектральный синтез*, если
$$W = \overline{W_{I_W} + \mathcal{L}(\operatorname{Exp} W)}, \qquad \mathcal{L}(\ \cdot\ ) - \quad \text{линейная оболочка множества} \quad (\ \cdot\ ). \tag{3.2}$$

Ясно, что D-инвариантное подпространство W, допускающее слабый спектральный синтез, является минимальным среди всех D-инвариантых подпространств $\widetilde{W}$, для которых
$$I_{\widetilde{W}} = I_W, \quad \operatorname{Exp} \widetilde{W} = \operatorname{Exp} W.$$
В силу **принципа двойственности**, *аннуляторный подмодуль* $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ такого подпространства является максимальным среди всех замкнутых подмодулей $\widetilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{P}(a;b)$, с нулевым множеством и индикаторным отрезком, удовлетворяющими условиям:
$$\Lambda_{\widetilde{\mathcal{J}}} = \Lambda_{\mathcal{J}}, \quad [c_{\widetilde{\mathcal{J}}}; d_{\widetilde{\mathcal{J}}}] = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}].$$
Следовательно, $\mathcal{J}$ – слабо локализуемый подмодуль. Ясно, что верно и обратное: если аннуляторный подмодуль D-инвариантного подпространства слабо локализуем, то это подпространство допускает слабый спектральный синтез.

Напомним, что *радиус полноты* $\rho(\Lambda)$ последовательности кратных точек $\Lambda = \{(\lambda_j, m_j)\}$ определяется равным инфимуму радиусов (открытых) интервалов $I \subset \mathbb{R}$, для которых система экспоненциальных одночленов $\{t^k e^{-\mathrm{i}\lambda_j t},\quad k=0,\dots,m_j-1,\quad j\in\mathbb{N}\}$, не полна в пространствах $\mathcal{E}(I)$, $C(I)$, $L^p(I)$, $1\le p<\infty$ (см. [18]).

Для произвольных подмножеств $A,\ B\subset\mathbb{R}$ обозначим через $A\dot{-}B$ их *геометрическую разность*, т.е. множество всех $x\in\mathbb{R}$, для которых $x+B\subset A$. Пусть $S\in\mathcal{E}'(a;b)$ и $h\in(a;b)\dot{-}\operatorname{ch}\operatorname{supp}S$, где $\operatorname{ch}\operatorname{supp}S$ – выпуклая оболочка $\operatorname{supp}S$. Определим функционал $S_h\in\mathcal{E}'(a;b)$ формулой

$$(S_h,f)=(S,f(t+h)),\quad f\in\mathcal{E}(a;b).$$

Для распределения $S\in\mathcal{E}'(a;b)$ и непустого относительно замкнутого в $(a;b)$ промежутка $\langle c;d\rangle$, удовлетворяющего условию

$$\operatorname{ch}\operatorname{supp}S\Subset\langle c;d\rangle, \tag{3.3}$$

положим

$$W(S,\langle c;d\rangle)=\{f\in\mathcal{E}(a;b):\ (S*f)(h)=(S_h,f)=0,\ \forall h\in\langle c;d\rangle\ \dot{-}\operatorname{ch}\operatorname{supp}S\}.$$

Ясно, что $W(S,\langle c;d\rangle)$ – D-инвариантное подпространство.

Лемма 4. *D-инвариантное подпространство $W(S,\langle c;d\rangle)$ допускает слабый спектральный синтез, его аннуляторный подмодуль есть $\mathcal{J}(\varphi,\langle c;d\rangle)$, где $\varphi=\mathcal{F}(S)$.*

Доказательство. Из рассуждений, приведеных после **принципа двойственности**, видно, что первое утверждение леммы следует из второго. Обозначим $\mathcal{J}_1$ аннуляторный подмодуль подпространства $W(S,\langle c;d\rangle)$. Согласно **принципу двойственности** имеем включение

$$\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}(\varphi,\langle c;d\rangle).$$

Так как нулевое множество $\Lambda_{\mathcal{J}_1}$ подмодуля $\mathcal{J}_1$ совпадает с нулевым множеством Λ_φ функции φ, а индикаторный отрезок этого подмодуля равен $[c;d]$, из (3.3) следует, что величина $\rho(\Lambda_{\mathcal{J}_1})$ меньше половины длины отрезка $[c;d]$. Пункт 3) теоремы 2 из работы [3] утверждает, что в этом случае подмодуль $\mathcal{J}_1$ будет слабо локализуемым, если только он устойчив.

Как уже отмечалось нами ранее [4, Введение], модуль $\mathcal{P}(a;b)$ является борнологическим и b-устойчивым пространством (последнее понятие введено в работе [5]). Поэтому он относится к классу топологических модулей, для которых в работе [7] (предложение 4.2 и замечание 1 в конце п.1 §4) доказано, что устойчивость подмодуля $\mathcal{J}\subset\mathcal{P}(a;b)$ в каждой точке $\lambda\in\mathbb{C}$ следует из его устойчивости в какой-нибудь одной точке. Таким образом, для доказательства равенства

$$\mathcal{J}_1=\mathcal{J}(\varphi,\langle c;d\rangle)$$

(эквивалентного слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_1$) достаточно проверить устойчивость подмодуля $\mathcal{J}_1$ в какой-нибудь одной точке $\mu t\in\Lambda_\varphi$. Без ограничения общности рассуждений можем считать, что $\mu=0$, $\varphi(0)=1$.

Пусть $\psi\in\mathcal{J}_1$, $\psi(0)=0$. Функция ψ есть предел в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$ обобщенной последовательности функций вида $(a_1e^{\mathrm{i}h_1z}+\dots+a_me^{\mathrm{i}h_mz})\varphi$, где $h_j\in\langle c;d\rangle\ \dot{-}[c_\varphi;d_\varphi]$, $j=1,\dots,m$; $\mathrm{i}[c_\varphi;d_\varphi]$ – индикаторная диаграмма функции φ (по теореме Пэли-Винера-Шварца совпадающая с $\operatorname{ch}\operatorname{supp}S$). Так как, очевидно, $e^{\mathrm{i}h'z}\varphi\to e^{\mathrm{i}hz}\varphi$ при $h'\to h$ в топологии $\mathcal{P}(a;b)$, можем считать, что

$$h_j\in(c;d)\dot{-}[c_\varphi;d_\varphi],\quad j=1,\dots,m. \tag{3.4}$$

Из определения топологии в $\mathcal{P}(a;b)$ нетрудно вывести, что обобщенная последовательность

$$\left(a_1\frac{e^{\mathrm{i}h_1z}-1}{z}+\dots+a_m\frac{e^{\mathrm{i}h_mz}-1}{z}\right)\varphi \tag{3.5}$$

сходится к функции $\frac{\psi}{z}$.

В силу включений (3.4) каждый элемент обобщенной последовательности (3.5) принадлежит *локализуемому* подмодулю $\mathcal{J}(\varphi,(c;d))$ модуля $\mathcal{P}(c;d)$. Этот подмодуль, в силу принципа двойственности и хорошо известного результата о спектральном синтезе в ядре оператора свертки (см., например, [20, теорема 16.4.1]), совпадает с аннуляторным подмодулем $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{P}(c;d)$ D-инвариантного подпространства $W(S,(c;d)) \subset \mathcal{E}(c;d)$, где

$$W(S,(c;d)) = \{f \in \mathcal{E}(c;d): \ (S*f)(h) = (S_h, f) = 0, \ \forall h \in (c;d) \ \dot{-} \operatorname{ch}\operatorname{supp} S\}.$$

Из всего сказанного выше выводим, что каждая функция обобщенной последовательности (3.5) принадлежит подмодулю $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}(\varphi,(c;d))$, который, в свою очередь, содержится в $\mathcal{J}_1$. И значит, для предельной функции $\frac{\psi}{z}$ обобщенной последовательности (3.5) также верно включение $\frac{\psi}{z} \in \mathcal{J}_1$, то есть подмодуль $\mathcal{J}_1$ устойчив в точке 0. Из этого факта следует, что справедливы оба утверждения доказываемой леммы.

□

Замечание 1. Заметим, что доказанная лемма верна при замене условия (3.3) на более слабое требование: длина отрезка $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S$ меньше, чем величина $(d-c)$ (последняя может равняться и $+\infty$).

Теорема 4. *Всякое D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W, удовлетворяющим условию $2\rho(\sigma_W) < |I_W|$, где $|I_W| \leq +\infty$ – длина промежутка I_W, может быть представлено в виде совокупности решений двух (быть может, совпадающих) однородных уравнений свертки:*

$$f \in W \iff \begin{cases} (S_1 * f)(h) = 0 \quad h \in I_W \dot{-} ch\, supp\, S_1, \\ (S_2 * f)(h) = 0, \quad h \in I_W \dot{-} ch\, supp\, S_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Доказательство. Следствие 2 из работы [3] утверждает, что D-инвариантное подпространство W, удовлетворяющее условиям доказываемой теоремы, допускает слабый спектральный синтез, и его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J}$ слабо локализуем. Легко видеть, что в этом подмодуле имеется функция φ_1 из $\mathcal{P}_0(a;b)$ с индикаторной диаграммой, компактно принадлежащей промежутку $\mathrm{i}I_W$. И значит, согласно п.1) теоремы 1 и принципу двойственности

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}(\varphi_1, I_W) + \mathcal{J}(\varphi_2, I_W)},$$

где функция $\varphi_2 \in \mathcal{J} \bigcap \mathcal{P}_0(a;b)$ имеет ту же индикаторную диаграмму, что и функция φ_1. Применяя лемму 4, с учетом рефлексивности пространства $\mathcal{E}(a;b)$, получим соотношение (3.6) с $S_1 = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_1)$, $S_2 = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_2)$. □

Теорема 5. *Если D-инвариантное подпространство W допускает слабый спектральный синтез и $\overline{I}_W \subset (a;b)$, то существуют распределения S_1, $S_2 \in W^0$ (возможно, $S_1 = S_2$) такие, что*

$$f \in W \iff \begin{cases} (S_1, D^j f) = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots, \\ (S_2, D^j f) = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.7}$$

Доказательство. Аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ слабо локализуем и удовлетворяет условию теоремы 3. Следовательно, либо $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\varphi$, либо $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$. Отсюда, принимая во внимание принцип двойственности и рефлексивность пространства $\mathcal{E}(a;b)$, заключаем, что имеет место (3.7) с $S_1 = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_1)$, $S_2 = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_2)$ (при этом $S_1 = S_2$, если $\mathcal{J}$ – главный подмодуль). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях* // Математика. Сб. переводов инстранных статей. 1957. 1:1. С. 60–77.
2. B.Y. Levin (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). *Lectures on entire functions* (Rev. Edition). AMS. Providence. Rhode Island, 1996. 254 p.
3. Абузярова Н.Ф. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.

4. Абузярова Н.Ф. *Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 3–18.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I* // Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сборник. 1972. Т. 87 (129). № 4. С. 459–489.
7. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II* // Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 309–341.
8. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation* // Journal of Functional Analysis. 2015. V. 268. Pp. 2421–2439.
9. Абузярова Н.Ф. *Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. 2016. Т. 8, № 1. С. 3–14.
10. Абузярова Н.Ф. *Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез* // Матем. сборник. 1999. Т. 190. № 4. С. 3–22.
11. Абузярова Н.Ф. *Конечно порожденные подмодули в модуле целых функций, определяемом ограничениями на индикатор* // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 3–17.
12. Хабибуллин Б.Н. *Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими* // Функц. анализ и его приложения. 2004. Т. 38. Вып. 1. С. 65–80.
13. Седлецкий А.М. *Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации. I* // Совр.матем. Фунд. направления. 2003. Т. 5. С. 3–152.
14. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Anal. Math. 1985. V. 11. Pp. 257–282.
15. Юлмухаметов Р.С. *Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации* // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 4. С. 123–157.
16. A. Aleman, B. Korenblum *Derivation-Invariant Subspaces of C^∞* // Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8. № 2. Pp. 493–512.
17. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир, 1986. 462 с.
18. A. Beurling, P. Malliavin *On the closure of characters and the zeros of entire functions* // Acta Math. 1967. V. 118. № 1-4. Pp. 79–93.
19. Абанин А.В. *Ультра-дифференцируемые функции и ультра-распределения.* М.: Наука, 2007. 222 с.
20. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Мир, 1986. 455 с.
21. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge Univ. Press. 1998. 606 pp.
22. R.P. Boas, Jr. *Entire functions.* Acad. Press. Publ. Inc. New-York. 1954. 276 pp.
23. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* Москва: Наука. 1971. 430 с.
24. Фаворов С.Ю. *О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных* // Матем. сб. 1978. Т.105(147). № 1. С. 128–140.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `abnatf@gmail.com`