ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 113-125.

УДК 517.9

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

М.Н. ПОПЦОВА, И.Т. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. В работе кратко обсуждается метод построения формального асимптотического решения системы линейных разностных уравнений в окрестности особого значения параметра. В том случае, когда линейная система представляет собой пару Лакса для некоторого нелинейного уравнения на квадратном графе, найденное формальное асимптотическое решение позволяет описать законы сохранения и высшие симметрии этого нелинейного уравнения. В работе дано полное описание серии законов сохранения и иерархии высших симметрий для дискретного потенциированного двухкомпонентного уравнения Кортевега-де Фриза.

Ключевые слова: интегрируемые динамические системы, уравнения на квадратном графе, симметрии, законы сохранения, пара Лакса.

Mathematics Subject Classification: 35Q53, 37K10

1. Введение

Изучению асимптотического поведения системы линейных дифференциальных уравнений вблизи особой точки посвящено значительное количество исследований (см., например, монографию [1]). Асимптотическое представление собственной функции операторов Лакса позволяет эффективно описывать интегралы движения, высшие симметрии и частные решения соответствующей нелинейной динамической системы [2, 3]. Метод формальной асимптотической диагонализации позволил авторам работы [4] установить глубокую связь между интегрируемыми системами и аффинными алгебрами Ли.

Алгоритм решения задачи об асимптотической диагонализации дискретного оператора в окрестности особой точки и ее приложения в теории интегрируемых нелинейных дискретных уравнений подробно обсуждаются в работах [5, 6, 7]. Интересные результаты по неавтономным дискретным динамическим системам получены с использованием метода формальной диагонализации в работах [8, 9]. Альтернативные подходы к проблеме построения асимптотического разложения собственной функции дискретного оператора Лакса предложены в работах [10, 11, 12].

В настоящей работе мы рассматриваем найденное в [13] двухкомпонентное дискретное потенциированное уравнение Кортевега-де Фриза (cdpKdV)

$$\begin{aligned}(u-u_{1,1})(v_{1,0}-v_{0,1})&=p^2-q^2,\\(v-v_{1,1})(u_{1,0}-u_{0,1})&=p^2-q^2.\end{aligned}$$

M.N. Poptsova, I.T. Habibullin, Symmetries and conservation laws for a two-component discrete potentiated Korteweg-de Vries equation.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

Поступила 22 января 2016 г.

Пара Лакса для этого уравнения была предъявлена в [13], отметим также, что в [14] для него построены явные частные решения. Напомним, что однокомпонентное дискретное потенциированное уравнение Кортевега-де Фриза

$$(u_{1,1}-u)(u_{1,0}-u_{0,1})=4c^2 \tag{1.1}$$

изучалось ранее во многих работах, начиная с [15, 16]. Оно известно также под названием уравнения H1 из списка Адлера-Бобенко-Суриса (см. [17]). Бесконечная серия законов сохранения для него была получена в работе [18], высшие симметрии построены в статьях [19, 20, 21, 22].

В представленной работе при помощи метода формальной асимтотической диагонализации пары Лакса описана бесконечная серия законов сохранения и построены высшие симметрии дискретного двухкомпонентного потенциированного уравнения Кортевега-де Фриза[1].

Поясним кратко структуру работы. Во втором разделе описывается класс дискретных линейных уравнений с особыми точками, в окрестности которых строится асимптотическое решение. На уровне примера иллюстритруется способ приведения линейной системы к удобному специальному виду. В третьем разделе обсуждается алгоритм приведения оператора Лакса к квазидиагональному виду. В четвертом излагается известный метод построения производящей функции законов сохранения, использующий условие коммутирования диагонализованных операторов Лакса. В пятом разделе – метод формальной диагонализации применяется к конкретной динамической системе cdpKdV (5.1), для которой предъявляется бесконечная серия законов сохранения. И, наконец, в шестом разделе доказано, что динамическая система cdpKdV (5.1) имеет бесконечную иерархию высших симметрий. Первые две симметрии построены явно, для остальных указан эффективный способ вычисления.

2. Особенности типа полюса дискретной линейной системы

Рассмотрим линейное дискретное уравнение вида

$$y(n+1,\lambda)=f(n,u(n),\lambda)y(n,\lambda), \tag{2.1}$$

где потенциал $f=f(n,u,\lambda)\in\mathbb{C}^{N\times N}$ зависит от целого $n\in(-\infty,+\infty)$, функционального параметра $u=u(n)$ и комплексного параметра λ. Потенциал является мероморфной функцией от λ в области $E\subset\mathbb{C}$ и предполагается, что $\det f$ не равен тождественному нулю.

Определим, что мы называем особой точкой. Назовем точку $\lambda=\lambda_0$ особой точкой уравнения (2.1), если хотя бы одна из функций $f(n,u,\lambda)$, $f^{-1}(n,u,\lambda)$ имеет в этой точке полюс. Мы предполагаем, что λ_0 не зависит от n.

Отметим, что некоторые особые точки можно устранить при помощи преобразования зависимой переменной $y(n)=r(n,\lambda)\tilde{y}(n)$, которое приводит уравнение (2.1) к тому же виду

$$\tilde{y}(n+1)=\tilde{f}(n,u,\lambda)\tilde{y}(n)$$

с новым потенциалом $\tilde{f}(n,u,\lambda)=r^{-1}(n+1,\lambda)f(n,u,\lambda)r(n,\lambda)$.

В качестве простого иллюстративного примера рассмотрим уравнение (2.1) с потенциалом

$$f=\begin{pmatrix}\lambda g_{11} & \lambda g_{12}\\ \lambda g_{21} & \lambda g_{22}\end{pmatrix},\quad g_{ij}=g_{ij}(n,u).$$

Это уравнение имеет две особые точки $\lambda=\infty$, $\lambda=0$. Обе особые точки удаляются преобразованием $y(n)=\lambda^n\tilde{y}(n)$. Действительно, $\tilde{f}=\lambda^{-1}f=\{g_{ij}\}$.

[1]Мы благодарим авторов работы [14], обративших наше внимание на эту задачу.

Менее тривиальный пример доставляет хорошо известное линейное уравнение, соответствующее в контексте интегрируемости уравнению (1.1). Его потенциал имеет вид

$$f(n,u,\lambda)=\begin{pmatrix} -u(n+1) & 1 \\ -\lambda^{-2}-u(n)u(n+1) & u(n) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Здесь $u(n)$ – произвольная функция. Уравнение (2.1), (2.2) имеет две особые точки $\lambda=0$, $\lambda=\infty$. Особая точка $\lambda=0$ удаляется преобразованием

$$y(n)=r(n,\lambda)\tilde{y}(n), \quad r(n,\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^{-n} & 0 \\ 0 & \lambda^{-n-1} \end{pmatrix}.$$

Действительно, в данном случае новый потенциал приобретает форму

$$\tilde{f}(n,\lambda)=\begin{pmatrix} -u(n+1)\lambda & 1 \\ -1-u(n)u(n+1)\lambda^2 & u(n)\lambda \end{pmatrix}$$

и имеет только одну особую точку $\lambda=\infty$.

Ключевым шагом алгоритма диагонализации является сведение исходной системы (2.1) к специальному виду

$$y(n+1,\lambda)=P(n,\lambda)Zy(n,\lambda) \tag{2.3}$$

в окрестности особой точки $\lambda=\lambda_0$. Здесь функции $P(n,\lambda)$ и $P^{-1}(n,\lambda)$ – аналитические в окрестности λ_0, главные миноры матрицы $P(n,\lambda)$ удовлетворяют условиям (3.8) ниже, а матрица Z имеет диагональный вид (3.7).

Если нам удается привести систему к указанному виду, тогда коэффициенты асимптотического ряда эффективно вычисляются. По известным коэффициентам ряда легко строятся законы сохранения и симметрии. Обсудим на примере уравнения

$$y(n+1,\lambda)=f(n,u(n),\lambda)y(n,\lambda), \quad f=\begin{pmatrix} \lambda & -u(n) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

один из способов приведения исходной системы к виду (2.3). Легко видеть, что уравнение (2.4) имеет единственную особую точку $\lambda=\infty$. Первоначально представим f в виде произведения $f(n,u(n),\lambda)=\alpha(n,u(n),\lambda)Z\beta(n,u(n),\lambda)$ трех матриц – диагональной Z и треугольных α и β:

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^{-1} & u(n) \end{pmatrix}, \; Z=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \; \beta=\begin{pmatrix} 1 & u(n)\lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Особо отметим, что $\alpha(n,\lambda)$ и $\beta(n,\lambda)$ являются аналитическими и невырожденными в окрестности $\lambda=\infty$. Далее после замены $\psi=\beta y$ уравнение (2.4) примет требуемый вид

$$\psi(n+1,\lambda)=P(n,u(n),\lambda)Z\psi(n,\lambda).$$

Здесь P определяется по формуле $P(n,u(n),\lambda)=\beta(n+1,u(n+1),\lambda)\alpha(n,u(n),\lambda)$, а именно

$$P(n,u(n),\lambda)=\begin{pmatrix} 1-u(n+1)\lambda^{-2} & -u(n)u(n+1)\lambda^{-2} \\ \lambda^{-1} & u(n) \end{pmatrix}.$$

При этом $P(\lambda)$ аналитична на бесконечности и главные миноры матрицы $P(\infty)$ отличны от нуля.

3. Асимптотическая диагонализация дискретного оператора в окрестности особой точки

Предположим, что $f(n,u,\lambda)$ имеет полюс при $\lambda=\lambda_0$. Тогда f раскладывается в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$f(n,u,\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^{-k}f_{(k)}(n)+(\lambda-\lambda_0)^{-k+1}f_{(k-1)}(n)+\cdots, k\geq 1. \tag{3.1}$$

Цель этого раздела состоит в обсуждении достаточных условий «диагонализуемости» уравнения (2.1) в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$. Согласно работе [6] уравнение (2.1) диагонализуется, если существуют формальные ряды

$$R(n,\lambda) = R_{(0)} + R_{(1)}(\lambda-\lambda_0) + R_{(2)}(\lambda-\lambda_0)^2 + \cdots, \tag{3.2}$$

$$h(n,\lambda) = h_{(0)} + h_{(1)}(\lambda-\lambda_0) + h_{(2)}(\lambda-\lambda_0)^2 + \cdots \tag{3.3}$$

с матричными коэффициентами $R_{(j)}, h_{(j)} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, где $h_{(j)}$ $\forall j$ диагональная (блочно-диагональная) матрица, такие, что формальная замена зависимой переменной $y = R\varphi$ приводит уравнение (2.1) к виду

$$\varphi_1 = hZ\varphi. \tag{3.4}$$

Здесь $Z = (\lambda-\lambda_0)^d$, d – диагональная матрица с целыми элементами. Предполагается, что $\det R_{(0)} \neq 0$, $\det h_{(0)} \neq 0$. Из формул (3.2)–(3.4) следует, что уравнение (2.1) обладает формальным решением, заданным следующим асимптотическим разложением

$$y(n,\lambda) = R(n,\lambda)e^{\sum_{s=n_0}^{n-1}\log h(s,\lambda)}Z^n \tag{3.5}$$

с «амплитудой» $A = R(n,\lambda)$ и «фазой» $\phi = n\log Z + \sum_{s=n_0}^{n-1}\log h(s,\lambda)$.

Предположим, что потенциал $f(n,\lambda)$ можно представить в следующем виде

$$f(n,u(n),\lambda) = \alpha(n,u(n),\lambda)Z\beta(n,u(n),\lambda), \tag{3.6}$$

где $\alpha(n,\lambda)$ и $\beta(n,\lambda)$ аналитические и невырожденные в окрестности $\lambda = \lambda_0$, Z – диагональная матрица вида

$$Z = \begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_0)^{\gamma_1}E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_0)^{\gamma_2}E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda-\lambda_0)^{\gamma_N}E_N \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где E_j единичные матрицы размера $e_j \times e_j$, показатели степени попарно различны $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_N$. Положим $P(n,u,\lambda) = \beta(n+1,u(n+1),\lambda)\alpha(n,u(n),\lambda)$ и допустим, что главные миноры матрицы $P(n,u,\lambda_0)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\det_j P(n,u,\lambda_0) \neq 0 \text{ for } j = e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, \ldots, N. \tag{3.8}$$

Теорема 1. *Предположим, что $\lambda = \lambda_0$ особая точка и потенциал $f(n,u(n),\lambda)$ удовлетворяет условиям (3.6), (3.8) в окрестности λ_0 и в области изменения $u(n)$. Тогда существуют формальные ряды, "диагонализующие" уравнение (2.1) в окрестности $\lambda = \lambda_0$, т.е. формальная замена $y = R\varphi$ сводит (2.1) к виду (3.4), где h имеет следующую блочно-диагональную структуру*

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{rr} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь h_{jj} квадратные матрицы размера $e_j \times e_j$. Коэффициенты $R_{(i)}$ и $h_{(i)}$ зависят от конечного, зависящего от i набора переменных из бесконечного множества $\{u(k)\}_{k=\overline{-\infty,\infty}}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [7]. Необходимо указать, что в процессе доказательства теоремы строится формальный ряд $T = \beta R$, удовлетворяющий уравнению

$$D_n(T)h = P(n,u(n),\lambda)\overline{T}, \quad \overline{T} = ZTZ^{-1}. \tag{3.10}$$

Следствие 1. *Линейное уравнение (2.1), переписанное в следующей специальной форме*

$$\psi(n+1,\lambda) = P(n,u(n),\lambda)Z\psi(n,\lambda)$$

сводится к блочно-диагональному виду

$$\varphi(n+1,\lambda) = h(n,\lambda)Z\varphi(n,\lambda)$$

преобразованием $\psi(n,\lambda) = T(n,\lambda)\varphi(n,\lambda)$, *если* $P = D_n(\beta)\alpha$, $f = \alpha Z\beta$ *и выполняются условия* (3.6), (3.8).

4. Асимптотическая диагонализация оператора Лакса и законы сохранения

Рассмотрим динамическую систему

$$F(D_mD_nv, D_mv, D_nv, v) = 0, \tag{4.1}$$

где искомый объект – векторнозначная функция $v = v(n,m)$ с координатами $v_j(n,m)$, $j = 1,\dots,N$, зависящими от целых n,m. Операторы сдвига D_n и D_m действуют по правилам $D_ny(n,m) = y(n+1,m)$ и $D_my(n,m) = y(n,m+1)$. Мы предполагаем, что (4.1) является условием совместности линейных уравнений

$$\begin{aligned} y(n+1,m) &= P(n,m,[v],\lambda)Zy(n,m),\\ y(n,m+1) &= R(n,m,[v],\lambda)y(n,m). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Выражение $[v]$ указывает на то, что функции P и R зависят от переменной v и конечного числа ее сдвигов D_n^kv, D_m^kv. Введем дискретные операторы $L = D_n^{-1}PZ$ и $M = D_m^{-1}R$. Тогда условие совместности системы (4.2) можно записать в следующем виде:

$$[L,M] = 0, \quad \text{где} \quad [L,M] = LM - ML. \tag{4.3}$$

Отметим, что первое уравнение (4.2) имеет вид (2.3). Предположим, что $P(n,m,[v],\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (P аналитична в окрестности $\lambda = \lambda_0$ для любых целых n, m и для всех значений $u = [v]$ из некоторой области, а главные миноры (3.8) отличны от нуля в этой области). Мы также предполагаем, что функция $R(n,m,[v],\lambda)$ мероморфна в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, когда u принимает значения в рассматриваемой области.

Из теоремы 1 следует, что дискретный оператор $L = D_n^{-1}PZ$ сводится к квазидиагональной форме $L_0 = D_n^{-1}hZ$ преобразованием $L \to T^{-1}LT = L_0$, где $T(n,\lambda) = \sum_{i\geq 0}^{\infty} T_{(i)}(\lambda-\lambda_0)^i$. Из (4.3) следует, что $[L_0, M_0] = 0$, где $M_0 := T^{-1}MT$. По построению и в силу предположения, сделанного выше, коэффициент S в формуле $M_0 = D_m^{-1}S$ есть формальный ряд вида $S = (\lambda-\lambda_0)^k\sum_{i=0}^{\infty} S_i(\lambda-\lambda_0)^{-i}$.

Теорема 2. *Коэффициенты S_i ряда S имеют ту же блочно-диагональную структуру, что и матрица h.*

В силу блочно-диагональной структуры S коммутирует с Z, и мы находим, что

$$D_n(S)h = D_m(h)S. \tag{4.4}$$

Переходя к блочному представлению $S = \{S_{ij}\}$, $h = \{h_{ij}\}$ в равенстве (4.4), получаем $D_n(S_{ii})h_{ii} = D_m(h_{ii})S_{ii}$. Теперь ясно, что уравнение

$$(D_n - 1)\log\det S_{ii} = (D_m - 1)\log\det h_{ii}, \qquad i = 1,2,\dots,N_0 \tag{4.5}$$

генерирует бесконечную последовательность законов сохранения для уравнения (4.1). Так как функция $\det S = \prod_{i=1}^{N_0}\det S_{ii}$ не равна нулю тождественно, логарифмы в (4.5) корректно определены.

5. Законы сохранения двухкомпонентного дискретного потенциированного уравнения Кортевега-де Фриза

Рассмотрим двухкомпонентное дискретное потенциированное уравнение Кортевега-де Фриза (cdpKdV)

$$\begin{aligned} (u_{n,m} - u_{n+1,m+1})(v_{n+1,m} - v_{n,m+1}) &= \delta^2 - \sigma^2,\\ (v_{n,m} - v_{n+1,m+1})(u_{n+1,m} - u_{n,m+1}) &= \delta^2 - \sigma^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

В данном параграфе мы опишем бесконечную последовательность законов сохранения и построим высшие симметрии для системы (5.1) при помощи метода асимптотической диагонализации операторов Лакса. Пара Лакса для (5.1) построена в работе [13] и задается системой уравнений

$$y_{n+1,m} = f y_{n,m}, \quad y_{n,m+1} = g y_{n,m}, \tag{5.2}$$

где потенциалы f и g записываются следующим образом

$$f = \begin{pmatrix} 0 & -u_{n+1,m} & 0 & 1 \\ -v_{n+1,m} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} - u_{n+1,m}v_{n,m} & 0 & v_{n,m} \\ -\lambda^{-1} - u_{n,m}v_{n+1,m} & 0 & u_{n,m} & 0 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -u_{n,m+1} & 0 & 1 \\ -v_{n,m+1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 - \delta^2 - \lambda^{-1} - u_{n,m+1}v_{n,m} & 0 & v_{n,m} \\ \sigma^2 - \delta^2 - \lambda^{-1} - u_{n,m}v_{n,m+1} & 0 & u_{n,m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Представим потенциалы f и g в виде $f = F\Omega$ и $g = G\Omega$ соответсвенно, где

$$F = \begin{pmatrix} -u_{n+1,m} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -v_{n+1,m} & 0 & 1 \\ -\lambda^{-1} - u_{n+1,m}v_{n,m} & 0 & v_{n,m} & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} - v_{n+1,m}u_{n,m} & 0 & u_{n,m} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -u_{n,m+1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -v_{n,m+1} & 0 & 1 \\ -\lambda^{-1} + \sigma^2 - \delta^2 - u_{n,m+1}v_{n,m} & 0 & v_{n,m} & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} + \sigma^2 - \delta^2 - v_{n,m+1}u_{n,m} & 0 & u_{n,m} \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{R}$ – кольцо матриц $X_{n\times n}$, удовлетворяющих условию $\sigma X \sigma^{-1} = X$, где $\sigma = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$. Легко видеть, что матрицы F и G принадлежат группе $\mathcal{G}$ обратимых элементов кольца $\mathcal{R}$.

Преобразуем систему (5.2) при помощи замены $\Omega^{n+m}\varphi_{n,m} = y_{n,m}$ к системе уравнений

$$\varphi_{n+1,m} = \tilde{F}\varphi_{n,m}, \quad \varphi_{n,m+1} = \tilde{G}\varphi_{n,m} \tag{5.3}$$

с новыми потенциалами

$$\tilde{F} = \Omega^{-(n+m+1)} F \Omega^{n+m+1} = \begin{pmatrix} -\tilde{p}_{n+1,m} & I \\ -\lambda^{-1}I - \tilde{p}_{n+1,m}\tilde{p}_{n,m} & \tilde{p}_{n,m} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{G} = \Omega^{-(n+m+1)} G \Omega^{n+m+1} = \begin{pmatrix} -\tilde{p}_{n,m+1} & I \\ -\lambda^{-1}I + (\sigma^2 - \delta^2)I - \tilde{p}_{n,m+1}\tilde{p}_{n,m} & \tilde{p}_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Здесь I обозначает единичный блок $\mathrm{diag}(1,1)$, переменная $\tilde{p}_{n,m}$ определена следующей формулой:

$$\tilde{p}_{n,m} = E^{-(n+m)} \begin{pmatrix} u_{n,m} & 0 \\ 0 & v_{n,m} \end{pmatrix} E^{n+m}, \tag{5.4}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь систему (5.1) можно рассматривать как условие коммутирования двух дискретных операторов $\tilde{\mathcal{L}} = D_n^{-1}\tilde{F}$ и $\tilde{\mathcal{M}} = D_m^{-1}\tilde{G}$.

Приведем уравнение $\varphi_{n+1,m} = \tilde{F}\varphi_{n,m}$ к специальному виду (2.3). Для этого представим потенциал $\tilde{F}$ в виде произведения $\tilde{F} = \tilde{\alpha} Z \tilde{\beta}$ трех матриц – блочной нижнетреугольной $\tilde{\alpha}$, блочно-диагольной Z и блочной верхнетреугольной $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \tilde{q_{n,m}} + \lambda^{-1}\tilde{p}_{n+1,m}^{-1} & -\tilde{p}_{n+1,m}^{-1} \end{pmatrix},$$
$$Z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} -\tilde{p}_{n+1,m} & I \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Тогда замена $\psi = \tilde{\beta}\varphi$ приводит первое уравнение (5.3) к виду $\psi_{n+1,m} = \tilde{P}\psi_{n,m}$, где $\tilde{P} = D_{n+1}(\tilde{\beta})\tilde{\alpha}$, а именно

$$\tilde{P}(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{n,m} - \tilde{p}_{n+1,m} & -\tilde{p}_{n+1,m}^{-1} \\ \tilde{q}_{n,m} & -\tilde{p}_{n+1,m}^{-1} \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p}_{n+1,m}^{-1} & 0 \\ \tilde{p}_{n+1,m}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней записи видно, что $\tilde{P} \in \mathcal{R}$. При этом миноры

$$\det(\tilde{q}_{n,m} - \tilde{p}_{n+1,m}), \quad \det \tilde{P}(\infty) \tag{5.5}$$

матрицы $\tilde{P}(\infty)$ отличны от нуля. Напомним, что $\tilde{q}_{n,m}$ и $\tilde{p}_{n+1,m}$ есть 2×2 блоки. В силу теоремы 1 существуют формальные ряды

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 + \tilde{T}_1\lambda^{-1} + \cdots, \quad \tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1\lambda^{-1} + \cdots$$

такие, что оператор $\tilde{L}_0 := \tilde{T}^{-1}\tilde{L}\tilde{T}$, где $\tilde{L} = D_n^{-1}\tilde{P}Z$ будет диагональным оператором вида $\tilde{L}_0 = D_n^{-1}\tilde{h}Z$. Найдем ряды $\tilde{T}$ и $\tilde{h}$ из уравнения

$$D_n(\tilde{T})\tilde{h} = \tilde{P}\tilde{\tilde{T}}, \quad \tilde{\tilde{T}} = Z\tilde{T}Z^{-1}. \tag{5.6}$$

Поскольку

$$Z\tilde{T}Z^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1,1} & \lambda\tilde{T}_{1,2} \\ \lambda^{-1}\tilde{T}_{2,1} & \tilde{T}_{2,2} \end{pmatrix},$$

то справедливы равенства

$$\lambda\tilde{T}_{1,2} = \tilde{\tilde{T}}_{1,2}, \quad \lambda^{-1}\tilde{T}_{2,1} = \tilde{\tilde{T}}_{2,1}, \quad \tilde{T}_{i,i} = \tilde{\tilde{T}}_{i,i}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя сюда формальные ряды

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 + \lambda^{-1}\tilde{T}_1 + \cdots, \quad \tilde{\tilde{T}} = \tilde{\tilde{T}}_0 + \lambda^{-1}\tilde{\tilde{T}}_1 + \cdots,$$

получим, что

$$\lambda\tilde{T}_{0,1,2} + \tilde{T}_{1,1,2} + \lambda^{-1}\tilde{T}_{2,1,2} + \cdots = \tilde{\tilde{T}}_{0,1,2} + \lambda^{-1}\tilde{\tilde{T}}_{1,1,2} + \lambda^{-2}\tilde{\tilde{T}}_{2,1,2} + \cdots,$$
$$\lambda^{-1}\tilde{T}_{0,2,1} + \lambda^{-2}\tilde{T}_{1,2,1} + \lambda^{-3}\tilde{T}_{2,2,1} + \cdots = \tilde{\tilde{T}}_{0,2,1} + \lambda^{-1}\tilde{\tilde{T}}_{1,2,1} + \lambda^{-2}\tilde{\tilde{T}}_{2,2,1} + \cdots,$$
$$\tilde{T}_{0,i,i} + \lambda^{-1}\tilde{T}_{1,i,i} + \cdots = \tilde{\tilde{T}}_{0,i,i} + \lambda^{-1}\tilde{\tilde{T}}_{1,i,i} + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Из последних равенств следует, что $\tilde{T}_{0,1,2} = 0$, $\tilde{\tilde{T}}_{0,2,1} = 0$, т.е. матрицы $\tilde{T}$ и $\tilde{\tilde{T}}$ являются блочными нижнетреугольной и верхнетреугольной соответсвенно, и справедливы равенства

$$\tilde{T}_{p+1,1,2} = \tilde{\tilde{T}}_{p,1,2}, \quad \tilde{T}_{p,2,1} = \tilde{\tilde{T}}_{p+1,2,1}, \quad \tilde{T}_{p,i,i} = \tilde{\tilde{T}}_{p,i,i}, \quad i = 1, 2. \tag{5.7}$$

Вернемся к уравнению (5.6) и перепишем его в виде

$$D_n(\tilde{T}_0 + \lambda^{-1}\tilde{T}_1 + \cdots)(\tilde{h}_0 + \lambda^{-1}\tilde{h}_1 + \cdots) = (\tilde{P}_0 + \lambda^{-1}\tilde{P}_1)(\tilde{\tilde{T}}_0 + \lambda^{-1}\tilde{\tilde{T}}_1 + \cdots) \tag{5.8}$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях λ, получаем следующую последовательность уравнений:

$$D_n(\tilde{T}_0)\tilde{h}_0 = \tilde{P}_0\tilde{\overline{T}}_0, \tag{5.9}$$

$$D_n(\tilde{T}_1)\tilde{h}_0 + D_n(\tilde{T}_0)\tilde{h}_1 - \tilde{P}_0\tilde{\overline{T}}_1 = \tilde{P}_1\tilde{\overline{T}}_0, \tag{5.10}$$

$$D_n(\tilde{T}_k)\tilde{h}_0 + D_n(\tilde{T}_0)\tilde{h}_k - \tilde{P}_0\tilde{\overline{T}}_k = \tilde{P}_1\tilde{\overline{T}}_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} D_n(\tilde{T}_{k-j})\tilde{h}_j, \qquad k \geq 2. \tag{5.11}$$

Уравнение (5.9) есть задача Гаусса о разложении матрицы $\tilde{P}_0$ в произведение трех матриц в группе $\mathcal{G}$ – блочной нижнетреугольной $D_n(\tilde{T}_0)$, блочно-диагональной $\tilde{h}_0$ и блочной верхнетреугольной $\tilde{\overline{T}}_0^{-1}$. Разрешимость этой задачи гарантируется условием регулярности (5.5). Единсвенность решения этой задачи обеспечиваем, задав диагональные блоки матрицы $\tilde{T}_0$ равными единичным матрицам размера 2×2. Поскольку задача Гаусса решается в группе $\mathcal{G}$, то мы получаем, что матрицы $\tilde{T}_0$, $\tilde{h}_0$ и $\tilde{\overline{T}}_0$ принадлежат группе $\mathcal{G}$.

Далее, полагаем, что диагональные блоки матриц $\tilde{T}_k$ и $\tilde{\overline{T}}_k$ для всех $k > 0$ являются нулевыми. Разложим каждую из матриц $\tilde{T}_k$ и $\tilde{\overline{T}}_k$ в сумму нижней блочно-треугольной и верхней блочно-треугольной матриц с нулевыми диагональными блоками:

$$\tilde{T}_k = \tilde{T}_{kL} + \tilde{T}_{kU}, \qquad \tilde{\overline{T}}_k = \tilde{\overline{T}}_{kL} + \tilde{\overline{T}}_{kU}. \tag{5.12}$$

Матрицы $\tilde{T}_{1U}$ и $\tilde{\overline{T}}_{1L}$ находятся легко, действительно, используя (5.7), имеем $\tilde{T}_{1,1,2} = \tilde{\overline{T}}_{0,1,2}$, $\tilde{\overline{T}}_{1,2,1} = \tilde{T}_{0,2,1}$. Т.е. эти элементы уже найдены на предыдущем шаге. Для нахождения неизвестных $\tilde{T}_{1L}$ и $\tilde{\overline{T}}_{1U}$ воспользуемся уравнением (5.10), записанным в следующем виде

$$\tilde{h}_1\tilde{h}_0^{-1} + D_n(\tilde{T}_0^{-1}\tilde{T}_{1L}) - \tilde{h}_0\tilde{\overline{T}}_0^{-1}\tilde{\overline{T}}_{1U}\tilde{h}_0^{-1} = H_1,$$

где правая часть $H_1 = D_n(\tilde{T}_0^{-1})\tilde{P}_1\tilde{\overline{T}}_0\tilde{h}_0^{-1} - D_n(\tilde{T}_0^{-1}\tilde{T}_{1U}) + \tilde{h}_0\tilde{\overline{T}}_0^{-1}\tilde{\overline{T}}_{1L}h_0^{-1}$ содержит уже известные матрицы. При этом $H_1 \in \mathcal{R}$. Для того чтобы найти неизвестные $\tilde{h}_1$, $\tilde{T}_{1L}$, $\tilde{\overline{T}}_{1U}$, нужно разложить H_1 в сумму трех слагаемых: блочно-диагональной $\tilde{h}_1\tilde{h}_0^{-1}$, блочной нижнетреугольной $D_n(\tilde{T}_0^{-1}\tilde{T}_{1L})$ и блочной верхнетреугольной $-h_0\overline{T}_0^{-1}\overline{T}_{1U}h_0^{-1}$. Ясно, что так как задача решается в кольце $\mathcal{R}$, то и искомые слагаемые будут принадлежать $\mathcal{R}$, а значит матрицы $\tilde{T}_1$ $\tilde{h}_1$ и $\tilde{\overline{T}}_1$ будут принадлежать $\mathcal{R}$. Продолжая процесс, находим все коэффициенты $\tilde{T}_k$ и $\tilde{h}_k$ из уравнения

$$\tilde{h}_k\tilde{h}_0^{-1} + D_n(\tilde{T}_0^{-1}\tilde{T}_{kL}) - \tilde{h}_0\tilde{\overline{T}}_0^{-1}\tilde{\overline{T}}_{kU}\tilde{h}_0^{-1} = H_k,$$

где член H_k содержит слагаемые, найденные на предыдущем шаге. Таким образом, доказано, что все коэффициенты ряда $\tilde{T}$ принадлежат кольцу $\mathcal{R}$.

Выпишем первые элементы формальных рядов $\tilde{T}$ и $\tilde{h}$ в явном виде:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{\tilde{p}_{n-1,m}}{\tilde{p}_{n+1,m}-\tilde{p}_{n-1,m}} & I \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\tilde{p}_{n+1,m}(\tilde{p}_{n+2,m}-\tilde{p}_{n,m})} \\ -\frac{\tilde{p}_{n+1,m}}{(\tilde{p}_{n+1,m}-\tilde{p}_{n-1,m})^2(\tilde{p}_{n,m}-\tilde{p}_{n-2,m})} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-1} + \cdots,$$

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n+2,m} & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{p}_{n+2,m}}{\tilde{p}_{n+1,m}(\tilde{p}_{n+2,m}-\tilde{p}_{n,m})} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{p}_{n+1,m}-\tilde{p}_{n-1,m}} & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+3,m}-\tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+1,m}+\tilde{p}_{n,m}\tilde{p}_{n+1,m}}{\tilde{p}^2_{n+1,m}(\tilde{p}_{n+3,m}-\tilde{p}_{n+1,m})(\tilde{p}_{n+2,m}-\tilde{p}_{n,m})^2} \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \cdots .$$

Отметим, что $\tilde{p}$ есть диагональная матрица 2×2, поэтому здесь использование знака деления (для обозначения операции взятия обратной матрицы в целях сокращения длины записи формул) не нарушает смысла выражения.

Оператор $\tilde{M} = D_m^{-1}\tilde{G}$ диагонализуется следующим образом: $\tilde{M}_0 = D_m^{-1}\tilde{S}$, где $\tilde{S} = D_m(\tilde{T}^{-1}\tilde{\beta})\tilde{G}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{T}$. Выпишем первые слагаемые ряда $\tilde{S}$ в явном виде:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta^2-\sigma^2}{\tilde{p}_{n,m+1}-\tilde{p}_{n+1,m}} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta^2-\sigma^2+\tilde{p}_{n,m}(\tilde{p}_{n,m+1}-\tilde{p}_{n+1,m})}{\tilde{p}_{n+1,m}} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{p}_{n+1,m}-\tilde{p}_{n-1,m}} & 0 \\ 0 & \frac{\delta^2-\sigma^2+\tilde{p}_{n,m+1}\tilde{p}_{n,m}+\tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+1,m}-\tilde{p}_{n+1,m}\tilde{p}_{n,m}}{\tilde{p}^2_{n+1,m}(\tilde{p}_{n,m}-\tilde{p}_{n+2,m})} \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \cdots .$$

Выпишем в явном виде три закона сохранения из бесконечной последовательности, получающейся в результате диагонализации

$$(D_n - 1)\log\frac{1}{\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n,m+1}} = (D_m - 1)\log(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n+2,m}),$$

$$(D_n - 1)\frac{\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n,m+1}}{(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m})(\delta^2 - \sigma^2)} = (D_m - 1)\frac{1}{(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m})(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n+2,m})},$$

$$(D_n - 1)\left[-\frac{\delta^2 - \sigma^2 + \tilde{p}_{n,m}(\tilde{p}_{n,m+1} - \tilde{p}_{n+1,m}) + \tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+1,m}}{\tilde{p}_{n+1,m}(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n+2,m})(\delta^2 - \sigma^2 + \tilde{p}_{n,m}(\tilde{p}_{n,m+1} - \tilde{p}_{n+1,m}))}\right] = \\ = (D_m - 1)\frac{\tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+3,m} - \tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+1,m} + \tilde{p}_{n+1,m}\tilde{p}_{n,m}}{\tilde{p}_{n+1,m}\tilde{p}_{n+2,m}(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n+2,m})(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n+3,m})}.$$

Переходя к исходным переменным u и v, получим

$$(D_n - 1)\log\frac{1}{(u_{0,1} - u_{1,0})(v_{0,1} - v_{1,0})} = (D_m - 1)\log(u - u_{2,0})(v - v_{2,0}),$$

$$(D_n - 1)\left[\frac{u_{0,1} - u_{1,0}}{(p^2 - q^2)(u_{-1,0} - u_{1,0})} + \frac{v_{0,1} - v_{1,0}}{(p^2 - q^2)(v_{-1,0} - v_{1,0})}\right] = \\ = (D_m - 1)\left[-\frac{(v - v_{2,0})(u_{-1,0} - u_{1,0})}{(u_{-1,0} - u_{1,0})(v - v_{2,0})} - \frac{(u - u_{2,0})(v_{-1,0} - v_{1,0})}{(v_{-1,0} - v_{1,0})(u - u_{2,0})}\right],$$

$$(D_n - 1)\left[-\frac{(p^2 - q^2 + u\nu + v_{1,0}u_{2,0})}{v_{1,0}\rho(p^2 - q^2 + u\nu)} - \frac{(p^2 - q^2 + v\mu + u_{1,0}v_{2,0})}{u_{1,0}\sigma(p^2 - q^2 + v\mu)}\right] = \\ = (D_m - 1)\left[\frac{v_{3,0}}{v_{1,0}\rho\sigma_{1,0}} + \frac{1}{u_{2,0}\sigma_{1,0}} + \frac{u_{3,0}}{u_{1,0}\sigma\rho_{1,0}} + \frac{1}{v_{2,0}\rho_{1,0}}\right].$$

Здесь используются обозначения $\rho = u - u_{2,0}$, $\sigma = v - v_{2,0}$, $\mu = u_{0,1} - u_{1,0}$, $\nu = v_{0,1} - v_{1,0}$.

Теперь перейдем к построению симметрий системы (5.1). Схема построения высших симметрий дискретной динамической системы при помощи алгоритма диагонализации подробно изложена в работе [6].

Вернемся к первому из линейных уравнений, образующих пару Лакса (5.3) для системы (5.1), и перепишем его, используя дискретный оператор
$\tilde{\mathcal{L}} = D_n^{-1}\tilde{F}$, в виде

$$\varphi = \tilde{\mathcal{L}}\varphi.$$

Как было показано выше, замена переменных $\psi = \tilde{\beta}\varphi$ приводит это уравнение к специальному виду

$$\psi = \tilde{L}\psi$$

с оператором $\tilde{L} = D_n^{-1}\tilde{P}Z$. Далее были найдены формальные ряды

$$\tilde{T} = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{T}_{(k)}\lambda^{-k}, \quad \tilde{h} = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{h}_{(k)}\lambda^{-k}, \tag{5.13}$$

«диагонализующие» указанное уравнение в окрестности $\lambda = \infty$, т.е. такие, что оператор $\tilde{L}_0 := \tilde{T}^{-1}\tilde{L}\tilde{T}$ является оператором с (блочно-) диагональными коэффициентами $\tilde{L}_0 = D_n^{-1}\tilde{h}Z$.

Следуя работе [6], построим формальный ряд

$$\tilde{B}_0 = \sum_{k=-M}^{\infty}(\tilde{B}_0)_{(k)}\lambda^{-k},$$

с коэффициентами $(\tilde{B}_0)_{(k)}$, имеющими ту же блочно-диагональную структуру, что и элементы ряда $\tilde{h}$, и не зависящими от n, и такой, что $[\tilde{L}_0, \tilde{B}_0] = 0$. В работе [6] доказано, что в этом случае формальный ряд $\tilde{B}' = \sum_{k=-M}^{\infty}\tilde{B}'_{(k)}\lambda^{-k}$, заданный формулой $\tilde{B}' = \tilde{T}\tilde{B}_0\tilde{T}^{-1}$, коммутирует с оператором $\tilde{L}$. Тогда формальный ряд $\tilde{B} = \sum_{k=-M}^{\infty}\tilde{B}_{(k)}\lambda^{-k}$, заданный формулой

$$\tilde{B} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{T}\tilde{B}_0(\tilde{\beta}^{-1}\tilde{T})^{-1}, \tag{5.14}$$

коммутирует с оператором $\tilde{\mathcal{L}}$.

Теорема 3. *Коэффициенты $\tilde{B}_{(k)}$ ряда* (5.14) *лежат в кольце $\mathcal{R}$, т.е. для любого k удовлетворяют соотношению $\sigma\tilde{B}_{(k)}\sigma^{-1} = \tilde{B}_{(k)}$, где $\sigma = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1)$.*

Выше было показано, что коэффициенты $\tilde{T}_{(k)}$ ряда $\tilde{T}$ для любого k лежат в кольце $\mathcal{R}$, $\tilde{\beta} \in \tilde{R}$ – по построению. Таким образом, доказательство Теоремы 3 следует из формулы (5.14).

Возьмем $\tilde{B}_0$ в виде

$$\tilde{B}_0 = \tilde{B}_{(-M)}\lambda^{-M}, \quad \tilde{B}_{(-M)} = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1), \tag{5.15}$$

тогда прямым вычислением доказывается, что для любого k коэффициенты $\tilde{B}_{(k)}$ ряда $\tilde{B}$ будут удовлетворять условию

$$\tilde{B}^k_{22} = -\tilde{B}^k_{11}.$$

Здесь через $\tilde{B}^k_{ij}$ обозначены 2×2 блоки матрицы $\tilde{B}_{(k)}$:

$$\tilde{B}_{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^k_{11} & \tilde{B}^k_{12} \\ \tilde{B}^k_{21} & \tilde{B}^k_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Далее разложим ряд $\tilde{B}$ в сумму $\tilde{B} = \tilde{A} + (\tilde{B} - \tilde{A})$, где $\tilde{A} = \sum_{k=1}^{M}\tilde{A}_{(k)}\lambda^k = \sum_{k=-M}^{-1}\tilde{B}_{(k)}\lambda^{-k}$. Тогда

$$[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{B}] = [\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{A}] + [\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{B} - \tilde{A}] = 0.$$

Потенциал $\tilde{F}$ первого из уравнений пары Лакса (5.3) является рациональной функцией вида $\tilde{F} = \lambda^{-1}\tilde{F}_1 + \tilde{F}_0$, где

$$\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_0 = \begin{pmatrix} -\tilde{p}_{n+1,m} & I \\ -\tilde{p}_{n+1,m}\tilde{p}_{n,m} & \tilde{p}_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Выясним какой вид имеет коммутатор $[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{A}]$:

$$[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{A}] = [D^{-1}\tilde{F}, \tilde{A}] =$$

$$= [D^{-1}(\lambda^{-1}\tilde{F}_1 + \tilde{F}_0), \sum_{k=1}^{M} \tilde{A}_{(k)}\lambda^k] = [D^{-1}\tilde{F}_1, \tilde{A}_{(1)}] + \sum_{k=1}^{M} a_k\lambda^k.$$

С другой стороны,

$$[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{A}] = -[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{B} - \tilde{A}] =$$

$$= -[D^{-1}(\lambda^{-1}\tilde{F}_1 + \tilde{F}_0), \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_{(k)}\lambda^{-k}] = -[D^{-1}\tilde{F}_0, \tilde{B}_{(0)}] + \sum_{k=0}^{\infty} a'_k\lambda^{-k}.$$

Из последних равенств следует, что

$$[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{A}] = R,$$

где

$$R = -[D_n^{-1}\tilde{F}_0, \tilde{B}_{(0)}] = [D_n^{-1}\tilde{F}_1, \tilde{A}_{(1)}]. \tag{5.17}$$

Из второго равенства (5.17) следует, что

$$D_n(R) = \tilde{F}_1\tilde{A}_{(1)} - D_n(\tilde{A}_{(1)})\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} -D_n\big(\tilde{A}^1_{12}\big) & 0 \\ \tilde{A}^1_{11} - D_n\big(\tilde{A}^1_{11}\big) & \tilde{A}^1_{12} \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Таким образом, $D_n(R)$ является (блочной) нижнетреугольной матрицей. Используя этот факт, из первого равенства (5.17) получим, что $D_n(R)$ имеет вид

$$D_n(R) = -\tilde{F}_0\tilde{B}_{(0)} + D_n\big(\tilde{B}_{(0)}\big)\tilde{F}_0 = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ -\tilde{p}_{n+1,m}R_{22} + \tilde{p}_{n,m}R_{11} & R_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Положим $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_n^{-1}\tilde{F} = R$ или $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{F}_0 = D_n(R)$. Это соотношение определяет дифференциально-разностное уравнение, действительно, левая часть имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n+1,m}}{\mathrm{d}t} & 0 \\ -\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n+1,m}}{\mathrm{d}t}\tilde{p}_{n,m} + \tilde{p}_{n+1,m}\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n,m}}{\mathrm{d}t}\right) & \frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n,m}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

и правая в силу (5.18) и (5.19):

$$D_n(R) = \begin{pmatrix} -D_n\big(\tilde{A}^1_{12}\big) & 0 \\ -\Big(\tilde{p}_{n+1,m}\tilde{A}^1_{12} + \tilde{p}_{n,m}D_n\big(\tilde{A}^1_{12}\big)\Big) & \tilde{A}^1_{12} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n,m}}{\mathrm{d}t} = \tilde{A}^1_{12}. \tag{5.20}$$

Ниже мы приведем в явном виде две высших симметрии. Выберем затравочный ряд $\tilde{B}_0$ в виде $\tilde{B}_0 = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)\lambda$. Теперь формальный ряд $\tilde{B}$ будет иметь вид

$$\tilde{B} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{T}\tilde{B}_0\tilde{T}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{B}_{(-1)}\lambda + \tilde{B}_{(0)} + \tilde{B}_{(1)}\lambda^{-1} + \cdots .$$

По построению формальный ряд $\tilde{A}$ состоит из элементов ряда $\tilde{B}$ по положительным степеням спектрального параметра и в данном случае имеет вид $\tilde{A} = \tilde{A}_{(1)}\lambda$, где $\tilde{A}_{(1)} = \tilde{B}_{(-1)} = \mathcal{A}$ и буквой $\mathcal{A}$ обозначена следующая матрица:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{p_{n+1,m}+p_{n-1,m}}{p_{n+1,m}-p_{n-1,m}} & -\frac{2}{p_{n+1,m}-p_{n-1,m}} \\ \frac{2p_{n-1,m}p_{n+1,m}}{p_{n+1,m}-p_{n-1,m}} & -\frac{p_{n+1,m}+p_{n-1,m}}{p_{n+1,m}-p_{n-1,m}} \end{pmatrix}.$$

Используя (5.20), выписываем симметрии

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n,m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m}},$$

переходя к исходным переменным u и v, получаем симметрии

$$\frac{\mathrm{d}u_{n,m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{v_{n+1,m} - v_{n-1,m}}, \quad \frac{\mathrm{d}v_{n,m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{u_{n+1,m} - u_{n-1,m}}$$

системы (5.1).

Далее для того чтобы найти симметрию следующего порядка, выберем затравочный ряд $\tilde{B}_0$ в виде $\tilde{B}_0 = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)\lambda^2$. Теперь искомый формальный ряд будет иметь вид

$$\tilde{B} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{T}\tilde{B}_0\tilde{T}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{B}_{(-2)}\lambda^2 + \tilde{B}_{(-1)}\lambda + \cdots .$$

Тогда формальный ряд $\tilde{A}$ будет иметь вид $\tilde{A} = \tilde{A}_{(2)}\lambda^2 + \tilde{A}_{(1)}\lambda$,
где $\tilde{A}_{(2)} = \tilde{B}_{(-2)} = \mathcal{A}$,

$$\tilde{A}_{(1)} = \tilde{B}_{(-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = \frac{2(\tilde{p}_{n+2,m}\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n,m}\tilde{p}_{n+1,m} + \tilde{p}_{n-1,m}\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n-1,m}\tilde{p}_{n-2,m})}{(\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}_{n,m})(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n-2,m})(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m})^2},$$

$$a_{12} = -\frac{2(\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}_{n-2,m})}{(\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}_{n,m})(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n-2,m})(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m})^2},$$

$$a_{21} = \frac{2(\tilde{p}^2_{n+1,m}\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}^2_{n+1,m}\tilde{p}_{n,m} + \tilde{p}^2_{n-1,m}\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}^2_{n-1,m}\tilde{p}_{n-2,m})}{(\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}_{n,m})(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m})^2(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n-2,m})}.$$

Используя (5.20), получаем

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_{n,m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2(\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}_{n-2,m})}{(\tilde{p}_{n+2,m} - \tilde{p}_{n,m})(\tilde{p}_{n,m} - \tilde{p}_{n-2,m})(\tilde{p}_{n+1,m} - \tilde{p}_{n-1,m})^2}$$

или в исходных переменных, записываем симметрии

$$\frac{\mathrm{d}u_{n,m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2(u_{n+2,m} - u_{n-2,m})}{(u_{n+2,m} - u_{n,m})(u_{n,m} - u_{n-2,m})(v_{n+1,m} - v_{n-1,m})^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{n,m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2(v_{n+2,m} - v_{n-2,m})}{(v_{n+2,m} - v_{n,m})(v_{n,m} - v_{n-2,m})(u_{n+1,m} - u_{n-1,m})^2}$$

системы (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Wasow *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* Dover: Dover Books on Advanced Mathematics, 1987. 374 p.
2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи* М.: Наука, 1980. 320 с.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов* М.: Наука, 1986. 528 с.
4. V.G. Drinfeld, V.V. Sokolov *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type* // Journal of Soviet Mathematics. 1985. V. 30. No. 2. P. 1975–2036.
5. Хабибуллин И.Т. *Дискретная система Захарова–Шабата и интегрируемые уравнения* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1985. Т. 146. С. 137–146. Англоязычная версия: Journal of Soviet Mathematics. 1988. V. 40. No. 1. P. 108–115.
6. Хабибуллин И.Т., Янгубаева М.В. *Формальная диагонализация дискретного оператора Лакса и законы сохранения и симметрии динамических систем* // ТМФ. 2013. Т. 177. № 3. С. 441–467.

7. I.T. Habibullin, M.N. Poptsova *Asymptotic diagonalization of the Discrete Lax pair around singularities and conservation laws for dynamical systems* J. Phys. A: Math. Theor. 48:11 (2015) 115203 (37pp)
8. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov *Integrable discrete nonautonomous quad-equations as Baecklund auto-transformations for known Volterra and Toda type semidiscrete equations* // Journal of Physics: Conference Series 621 (2015) 012005 (18pp).
9. R.N. Garifullin, I.T. Habibullin, R.I. Yamilov *Peculiar symmetry structure of some known discrete nonautonomous equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 235201 (27pp).
10. A.V. Mikhailov *Darboux transformations and symmetries of partial difference equations* // Geometric Structures in Integrable Systems, International Workshop, Moscow (Russia), October 30 - November 2, 2012.
11. Da-jun Zhang, Jun-wei Cheng, Ying-ying Sun *Deriving conservation laws for ABS lattice equations from Lax pairs* // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. V. 46. No. 26. id 265202.
12. Jun-wei Cheng, D-j Zhang *Conservation laws of some lattice equations* // Front. Math. China. 2013. V. 8. No.5. P. 1001-1016.
13. T. Bridgman, W. Hereman, G.R.W. Quispel and P.H. van der Kamp *Symbolic computation of Lax Pairs of partial difference equations using consistency around the cube* // Foundations of Computational Mathematics. 2013. V. 13. No. 4. P. 517–544.
14. Fu Wei, Zhang Da-Jun, Zhou Ru-Guang *A Class of Two-Component Adler–Bobenko–Suris Lattice Equations* // Chinese Phisics Letters. 2014. V. 31. No. 9. id 090202.
15. R. Hirota and S. Tsujimoto *Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations* // J. Phys. Soc. Jpn. 1995. V. 64. No. 9. P. 3125–3127.
16. F. Nijhoff and H. Capel *The discrete Korteweg-de Vries equation* // Acta Applicandae Mathematica. 1995. V. 39. No. 1–3. P. 133–158.
17. V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris *Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach* // Commun. Math. Phys. 2003. V. 233. No. 3. P. 513–543. arXiv: nlin.SI/0202024.
18. A.G. Rasin, J. Schiff *Infinitely many conservation laws for the discrete KdV equation* //J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. No. 17. 175205 (16 pp.)
19. D. Levi, M. Petrera *Continuous symmetries of the lattice potential KdV equation* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. No. 15. P. 4141–4159.
20. D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna *The lattice Schwarzian KdV equation and its symmetries* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. No. 42. P. 12753–12761.
21. O.G. Rasin and P.E. Hydon *Symmetries of Integrable Difference Equations on the Quad-Graph* // Stud. Appl. Math. 2007. V. 119. No. 3. P. 253—269.
22. A. Tongas, D. Tsoubelis, P. Xenitidis *Affine linear and D_4 symmetric lattice equations: symmetry analysis and reductions* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. No. 44. P. 13353–13384.

Мария Николаевна Попцова,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mnpoptsova@gmail.com

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com