ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 88-99.

УДК 517.9

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С МАТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Н.Б. УСКОВА

Аннотация. В работе получены асимптотические оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом и квазипериодическими граничными условиями. Матричный потенциал состоит из функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[0,1]$, и матрица из средних для функций имеет простые собственные значения. Рассмотрен также случай, когда матрица из средних есть матрица простой структуры.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, линейные операторы, спектральные проекторы

Mathematics Subject Classification: 35L75, 35Q53, 37K10, 37K35

1. Введение

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2[0,1]$ измеримых и интегрируемых с квадратом на отрезке $[0,1]$ функций. Пусть $\mathcal{H} = L_2([0,1],\mathbb{C}^m) = L_2^m[0,1] = \underbrace{L_2[0,1]\times\dots\times L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ — гильбертово пространство измеримых на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2^m[0,1]$ определяется формулой

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{m}(f_i,g_i), \quad f=(f_1,f_2,\dots,f_m)\in L_2^m[0,1], \quad g=(g_1,g_2,\dots,g_m)\in L_2^m[0,1],$$

$(f_i,g_i) = \int_0^1 f_i(x)\overline{g_i(x)}\,dx$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[0,1]$ комплексных функций, и норма

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 |f_k(x)|^2\,dx$$

порождается этим скалярным произведением.

В пространстве $L_2^m[0,1]$ рассмотрим дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$(Ly)(t) = -y''(t) + Q(t)y(t), \tag{1}$$

и квазипериодическими краевыми условиями

$$y'(1) = y'(0)e^{i\theta}, \quad y(1) = y(0)e^{i\theta}, \tag{2}$$

$\theta \in (0,2\pi)$, $\theta \neq \pi$, — оператор Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом $Q(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $i,j = 1,\dots,m$, и $b_{ij}\in L_2[0,1]$ — комплекснозначные функции. Символом $Q_0 = (b_{0ij})$, $i,j = 1,2,\dots,m$, обозначена матрица, составленная из средних значений функций b_{ij}, т. е. $b_{0ij} = \int_0^1 b_{ij}(t)\,\mathrm{d}t$. Ниже будут изучаться спектральные характеристики

N.B. Uskova, On spectral properties of Sturm-Liouville operator with matrix potential.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 14-21-00066.

Поступила 22 февраля 2015 г.

оператора L с суммируемыми с квадратом функциями b_{ij} в случае, когда Q_0 — нормальная матрица простой структуры.

Отметим, что в этом случае матрица Q_0 подобна матрице диагональной, у которой по диагонали стоят собственные значения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, и базисом в пространстве $\mathbb{C}^m$ являются соответствующие собственные векторы (ортогональные) матрицы Q_0. Поэтому изначально можно предполагать, без ограничения общности, что матрица Q_0 диагональна, и соответствующий базис составляют ее собственные нормированные векторы $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Пусть также числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ упорядочены по возрастанию, т. е. $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_m$.

Рассмотрим теперь оператор L_0, такой что $L_0 y = -y''$, область определения которого совпадает с областью определения оператора L. В дальнейшем оператор L_0 будет играть роль невозмущенного оператора. Известно, что его собственными значениями являются числа

$$\lambda_n = \lambda_{n,j} = (2\pi n + \theta)^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

а соответствующими собственными векторами — функции $e_{n,j}(t) = e^{i(2\pi n+\theta)t} f_j$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, кратность собственного значения равна m.

Операторы такого класса рассматривались О.А. Велиевым в [1], при условии $b_{ij} \in L_1[0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В этой же работе и при таких же ограничениях на θ была доказана базисность Рисса корневых функций оператора L в случае простых собственных значений матрицы Q_0, а также получены оценки на собственные значения и собственные векторы оператора L вида (см. [1, теорема 2])

$$\widetilde{\lambda}_{k,j} = (2\pi k + \theta)^2 + \mu_j + \mathcal{O}\left(\frac{\ln|k|}{k}\right),$$

$$\widetilde{e}_{k,j}(x) = \mathrm{e}^{i(2\pi k+\theta)x} f_j + \mathcal{O}\left(\frac{\ln|k|}{k}\right).$$

В рассматриваемом случае ($b_{ij} \in L_2[0,1]$) можно улучшить асимптотику собственных значений и собственных векторов оператора L, а также получить оценки равносходимости соответствующих спектральных разложений. Заметим, что в цитируемой работе [1] не рассматривались оценки взвешенного среднего в случае кратных собственных значений у матрицы Q_0, отклонения спектральных проекторов и вопрос равносходимости. Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует такое натуральное число l, что спектр $\sigma(L)$ оператора L представим в виде*

$$\sigma(L) = \widetilde{\sigma}_{(l)} \bigcup \left(\bigcup_{|k|>l} \widetilde{\sigma}_k \right), \tag{3}$$

где $\widetilde{\sigma}_{(l)}$ — конечное множество, с числом собственных значений, не превосходящим $2lm + m$, $\widetilde{\sigma}_k = \{\widetilde{\lambda}_{k,1}, \widetilde{\lambda}_{k,2}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{k,m}\}$, и в случае простых собственных значений μ_j матрицы Q_0 имеют место оценки ($|k| > l$)

$$\widetilde{\lambda}_{k,j} = (2\pi k + \theta)^2 - \mu_j + \mathcal{O}(|k|^{-1}), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

$$\widetilde{e}_{k,j} = \mathrm{e}^{i(2\pi k+\theta)x} f_j + \mathcal{O}(|k|^{-1}), \tag{5}$$

в случае полупростоты собственных значений μ_j имеет место формула

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\lambda}_{k,j} = (2\pi k + \theta)^2 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mu_j + \mathcal{O}(|k|^{-1}). \tag{6}$$

Для спектральных проекторов $P_k = P(\sigma_k, L_0)$ и $\widetilde{P}_k = P(\widetilde{\sigma}_k, L)$ справедливо асимптотическое представление ($|k| > l$)

$$\|\widetilde{P}_k - P_k\|_2 = \mathcal{O}(|k|^{-1}),$$

причем

$$\sum_{|k|>l} \|\widetilde{P}_k - P_k\|_2^2 < \infty. \tag{7}$$

Следствие 1. *Оператор L спектрален по Данфорду* [2] *относительно разложения (3).*

Теорема 2. *Имеет место оценка (равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений)*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \mathrm{const}\,\mathcal{O}(k_0^{-\frac{1}{2}}),$$

где $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$, $\Omega = \{i \in \mathbb{Z}, |i| > l\}$, $k_0 = \min\limits_{k\in\Omega} |k|$.

Заметим, что так как проекторы $P(\Omega)$ и $\widetilde{P}(\Omega)$ подобны, то ряд $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ безусловно сходится.

2. К методу подобных операторов

Введем сначала следующие пространства операторов. Через $\mathrm{End}\,\mathcal{H}$ обозначим банахову алгебру операторов, действующих в $\mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_\infty$. Всюду далее через A обозначается замкнутый линейный оператор, действующих в $\mathcal{H}$, и имеющий область определения $D(A)$, спектр $\sigma(A)$ и резольвентное множество $\rho(A)$. Оператор A играет роль невозмущенного оператора, спектральные свойства которого хорошо изучены. Символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначается пространство операторов, действующих в $\mathcal{H}$ и подчиненных оператору A, т. е. $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если $D(B) \supset D(A)$ и существует такая константа $C > 0$, что $\|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)$. Норма в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ задается формулой $\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$. Отметим, что $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ означает, что существует $\lambda_0 \in \rho(A)$, такое что $\|B(A - \lambda_0 I)^{-1}\|$ конечна. Для рассматриваемых операторов без ограничения общности можно считать $D(A) = D(B)$.

Определение 1 ([6]). *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$, такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2.*

Методом исследования оператора (1), (2) будет служить метод подобных операторов. Основные положения метода подобных операторов, в хронологическом порядке, изложены в работах [3] – [7]. Мы будем придерживаться работы [6]. Заметим, что с помощью метода подобных операторов исследовались спектральные свойства различных дифференциальных операторов, например, в работах [8]–[11], [16]. К оператору L с матричным потенциалом и квазипериодическими краевыми условиями метод ранее не применялся.

Оператор, действующий в пространстве операторов, будем, согласно терминологии М.Г. Крейна, называть трансформатором.

Одним из важных понятий метода подобных операторов является понятие допустимой тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий.

Определение 2 ([6]). *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ — линейное подпространство операторов и $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\Gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$, — трансформаторы. Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой для оператора A, а $\mathcal{M}$ — допустимым пространством возмущений, если выполняются следующие условия:*

1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_\mathcal{M}$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leqslant C\|X\|_\mathcal{M}$, для любого $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$;

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор, т. е. $J^2 = J$;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, $A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX$, $\forall X \in \mathcal{M}$, и $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma X)Y \in \mathcal{M}$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}$, *и существует такая постоянная* $\gamma > 0$, *что*

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \text{и} \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_{\mathcal{M}}, \|\Gamma XY\|_{\mathcal{M}}\} \leqslant \gamma \|X\|_{\mathcal{M}} \|Y\|_{\mathcal{M}};$$

5) для любого $X \in \mathcal{M}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ *такое, что* $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка. Возмутим оператор A некоторым оператором B из пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$.

Теорема 3 ([6]). *Пусть выполнено условие* $4\|B\|_{\mathcal{M}}\gamma < 1$. *Тогда операторы* $A - B$ *и* $A - JX$ *подобны, т. е.*

$$(A - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - JX),$$

где оператор $X \in \mathcal{M}$ *есть решение нелинейного операторного уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \tag{8}$$

и его можно найти методом последовательных приближений, используя в качестве первого приближения оператор B.

Иногда сразу трудно подобрать такое пространство допустимых возмущений $\mathcal{M}$, чтобы и оператор B сразу принадлежал $\mathcal{M}$ и это пространство было бы удобно для дальнейших исследований, поэтому бывает удобно сначала сделать предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathcal{M}$ $(B \notin \mathcal{M})$.

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространство $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, обозначаемые теми же символами, осуществляются следующим образом (см. [6]). Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, положим

$$JX = J(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}), \tag{9}$$

$$\Gamma X = \Gamma(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}). \tag{10}$$

Эти продолжения корректны, т. е. не зависят от выбора числа $\lambda_0 \in \rho(A)$. Если $x \in D(A)$, то из (9) и (10) следует, что операторы JX и ΓX на векторе x определяются так же, как и в определении 2 и использовались в теореме 3.

Такое преобразование возможно при выполнении следующего предположения [6], [12].

Предложение 1. *Операторы* ΓB, JB, B *удовлетворяют следующим условиям:*
1) $\Gamma B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ *и* $\|\Gamma B\| < 1$;
2) $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$ *и* $(A\Gamma B)x - (\Gamma BA)x = Bx - (JB)x$, $\forall x \in D(A)$;
3) $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB \in \mathcal{M}$;
4) для любого числа $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, *такое что* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon$.

Теорема 4 ([6], [12]). *Пусть выполнены условия предположения 1, тогда оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - \widetilde{B}$ *вида*

$$A - JB - (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB) = A - \widetilde{B},$$

и оператором преобразования оператора $A - B$ *в оператор* $A - \widetilde{B}$ *служит оператор* $I + \Gamma B$.

3. Построение допустимой тройки для оператора, близкого к L_0

Сначала сделаем следующее замечание. При $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$ собственные значения λ_n оператора L_0 имеют кратность m, но при $\theta \to 0$ и $\theta \to \pi$ расстояние между парой соответствующих собственных значений λ_n и λ_{-n} $(\theta \to 0)$ или λ_n и $\lambda_{-(n+1)}$ $(\theta \to \pi)$ стремится к нулю, поэтому, если рассматривать только случай простых собственных значений оператора L, то $\theta \in [\varepsilon_1, \pi - \varepsilon_2] \cup [\pi + \varepsilon_2, 2\pi - \varepsilon_3]$, где ε_1, ε_2, ε_3 — отличные от нуля малые величины. При выполнении этого условия все получаемые далее оценки имеют место равномерно для всех θ из рассматриваемого промежутка. В дальнейшем рассматривается случай только таких θ.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нормальный линейный неограниченный оператор, имеющий полупростые собственные значения

$$\lambda_{n,i} = (an+\theta)^2 + \mu_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где a, θ — константы, $\theta \in [\varepsilon_1, \pi-\varepsilon_2] \cup [\pi+\varepsilon_2, 2\pi-\varepsilon_3]$, $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_m$, и соответствующие собственные векторы $e_{n,i}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Пусть $P_n = P(\sigma_n, A)$ — проекторы Рисса, построенные по спектральному множеству $\sigma_n = \{\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nm}\}$ оператора A. Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие две матрицы: операторную $X = (X_{ij})$, где $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и числовую $X = (x_{n_i k_j})$, где $x_{n_i k_j} = (X e_{k_j}, e_{n_i})$, $n, k \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

Символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ обозначим идеал Гильберта-Шмидта операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Так как проекторы P_n, $n \in \mathbb{Z}$, являются ортопроекторами, то норму в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ можно задать формулой

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j} \|P_i X P_j\|_2^2, \quad \forall X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Далее также будет использоваться обозначение X_p для p-той диагонали операторной матрицы оператора X, т. е. $X_p = \sum\limits_{i-j=p} X_{ij}$, очевидно, что $\|X\|_2^2 = \sum\limits_p \|X_p\|_2^2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

В качестве пространства допустимых возмущений возьмем пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и возмутим оператор A оператором $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Определим семейство трансформаторов формулой

$$J_k X = Q_k X Q_k + \sum_{|i|>k} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

где $Q_k = \sum\limits_{|j|\leqslant k} P_j$ и $J_0 X = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} P_i X P_i$. Очевидно, что $\|J_k\| = 1$, так как

$$\|J_k X\|_2^2 \leqslant \|Q_k X Q_k\|_2^2 + \sum_{i \geqslant k} \|P_i X P_i\|_2^2 \leqslant \|X\|_2^2,$$

с другой стороны, если $X = \sum\limits_i P_i X P_i$, т. е. матрица оператора X диагональна, то $J_k X = X$ и $\|J_k X\|_2 = \|X\|_2$.

Перейдем к построению трансформатора $\Gamma_0 : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \operatorname{End}\mathcal{H}$. Определим сначала его на операторных блоках $X_{ij} = P_i X P_j$, где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (и $X_{ij} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$). Для каждого X_{ij}, $i \neq j$, примем $\Gamma_0 X_{ij} = Y_{ij}$, где Y_{ij} — есть решение уравнения

$$AY_{ij} - Y_{ij}A = X_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

и $Y_{ii} = 0$. Заметим, что последнее уравнение переписывается в виде

$$A_i Y_{ij} - Y_{ij} A_j = X_{ij}, \tag{11}$$

$A_i = A\big|_{\mathcal{H}_i}$, $\mathcal{H}_i = \operatorname{Ran} P_i$. Так как $\sigma(A_i) \cap \sigma(A_j) = \varnothing$, то уравнения (11) разрешимы [13], [14] и

$$\|Y_{ij}\|_2 \leqslant \frac{\mathrm{const}\|X_{ij}\|_2}{\operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j)},$$

из [15] следует, что const можно принять равной единице.

Соберем теперь оператор $\Gamma_0 X$ из операторных блоков $Y_{ij} = (\Gamma X)_{ij}$: $\Gamma_0 X = \sum\limits_{i,j} (\Gamma X)_{ij}$, и

$$\|\Gamma_0 X\|_2^2 = \sum_{i,j} \|(\Gamma X)_{ij}\|_2^2 \leqslant \sum_{i \neq j} \frac{\|X_{ij}\|_2^2}{\operatorname{dist}^2(\sigma_i, \sigma_j)} \leqslant d_0^{-2} \sum_{i \neq j} \|X_{ij}\|_2^2 \leqslant d_0^{-2} \|X\|_2^2.$$

Таким образом, оператор $\Gamma_0 X$ принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|\Gamma_0\| \leqslant d_0^{-1}$, где символом d_0 обозначена величина $\min\limits_{i \neq j} \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j)$.

Определим также семейство трансформаторов $\Gamma_k X$ с помощью формулы

$$\Gamma_k X = \Gamma_0 X - \Gamma_0(Q_k X Q_k) = \Gamma_0 X - Q_k \Gamma_0 X Q_k. \tag{12}$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$d_k = \operatorname{dist}(\sigma_k, \sigma_{k+1}) = |(a(k+1)+\theta)^2 + \mu_m - (ak+\theta)^2 - \mu_1| = \\ = |2a^2k + 2a\theta + \mu_m - \mu_1| = \mathcal{O}(k),$$

т. е.

$$\|\Gamma_k X\|_2^2 \leqslant \frac{\text{const}}{k^2}\|X\|_2^2. \tag{13}$$

Из вышесказанного следует выполнение п. 4 определения 2 с величиной γ, имеющей порядок k^{-1}.

Проверим выполнение остальных пунктов определения 2, относящихся к трансформатору Γ. Рассмотрим оператор $AQ_n\Gamma X A^{-1}$ и представим его в виде ($x \in \mathcal{H}$)

$$AQ_n\Gamma X A^{-1}x = Q_n\Gamma X x + Q_n(X - JX)A^{-1}x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Так как $Q_n\Gamma X \to \Gamma X x$, $Q_n(X-JX)A^{-1}x \to (X-JX)A^{-1}x$ при $n \to \infty$, то и $AQ_n\Gamma X A^{-1}x \to y_0 \in \mathcal{H}$. Пусть $Q_n\Gamma X A^{-1}x \to y_0 = \Gamma X A^{-1}x$, но тогда в силу замкнутости оператора A имеем $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$, где $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Выполнение условия 5) очевидно, так как

$$\|X(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2^2 \leqslant \|X\|_2^2 \cdot \|(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty,$$

причем первый сомножитель конечен, а второй можно сделать сколь угодно малым.

Итак, доказана

Теорема 5. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$ является при любом $k \geqslant 0$ допустимой для оператора A тройкой.*

Из теоремы 5 и оценки (13) следует

Теорема 6. *Существует такое число $l \geqslant 0$, что оператор $A - B$ подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$A - Q_l X Q_l - \sum_{|i|>l} P_i X P_i,$$

где X есть решение нелинейного операторного уравнения (8) с Γ_l и J_l; оператором преобразования является оператор $I + \Gamma_l X$ и первым приближением к решению X по методу итераций является оператор B.

Лемма 1. *Пусть $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда оператор $\Gamma_k X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ представим в виде $\Gamma_k X = YA^{-\frac{1}{2}} = A^{-\frac{1}{2}}Z$, где $Z, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Доказательство вытекает из матричного представления оператора $\Gamma_k X$, $k \geqslant 0$.

Оператор $A^{-\frac{1}{2}}$ в лемме 1 определяется на базисных векторах так: если $x = \sum\limits_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ k=1,\dots,m}} (x, e_{i,k})e_{i,k}$ и $Ae_{i,k} = \lambda_{i,k}e_{i,k}$, то $A^{-\frac{1}{2}}x = \sum\limits_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ k=1,\dots,m}} \lambda_{i,k}^{-\frac{1}{2}}(x, e_{i,k})e_{i,k}$.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы 6 оператор $X - B \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и*

$$\|P_i(X-B)P_i\| \leqslant \alpha_i i^{-1}, \quad i > l, \tag{14}$$

где $\{\alpha_i\} \in l_1$.

Доказательство. Из (8) имеем:

$$X - B = B\Gamma_l X - \Gamma_l X J_l B - \Gamma_l X J_l(B\Gamma_l X);$$

$$J_l(X - B) = J_l(B\Gamma_l X) = J_l(BYA^{-\frac{1}{2}})$$

и $J_l(X-B) \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, так как произведение двух операторов Гильберта-Шмидта есть ядерный оператор. Далее, $P_i(X-B)P_i = P_iBYA^{-\frac{1}{2}}P_i = Z_{ii}\lambda_i^{-\frac{1}{2}}$, где $Z = BY \in \mathfrak{S}_1$ и $Z_{ii} = P_iZP_i$. Лемма доказана. □

Пусть имеет место теорема 6. Тогда из подобия операторов $A - B$ и $A - J_lX$ следует $\sigma(A-B) = \sigma(A - J_lX) = \sigma(A_{(l)}) \cup \big(\cup_{|i|>l} A_i\big)$, где $A_{(l)} = (A - Q_lXQ_l)|\mathcal{H}_{(l)}$, $\mathcal{H}_{(l)} = \operatorname{Ran} Q_l$ и $A_i = (P_iA - P_iX)|\mathcal{H}_i$. Так как оператор X неизвестен, а известно лишь первое приближение к нему (второе приближение уже практически не используется ввиду его громоздкости), то $A_i = (P_iA - P_iB - P_i(X-B))|\mathcal{H}_i$, причем первые два оператора известны и выписываемы, а для третьего оператора известна оценка (14) из леммы 2.

Из подобия операторов $A - B$ и $A - J_lX$ получаем также, что верны следующие представления проекторов ($U = I + \Gamma_l X$)

$$\widetilde{Q}_l = U^{-1}Q_lU, \quad \widetilde{P}_i = U^{-1}P_iU,$$

где $\widetilde{Q}_l$ — проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_{(l)}$, а $\widetilde{P}_i$ — на $U^{-1}\mathcal{H}_i$. Отсюда сразу следуют формулы

$$\widetilde{Q}_l - Q_l = (\Gamma_l XQ_l - Q_l\Gamma_l X)U^{-1};$$

$$\widetilde{P}_i - P_i = (\Gamma_l XP_i - P_i\Gamma_l X)U^{-1}.$$

Из лемм 1 и 2 получаем при $|i| > l$

$$\|\widetilde{P}_i - P_i\|_2 \leqslant \text{const}\, \delta_i i^{-1},$$

где $\delta_i \in l_2$ и

$$\|P_i - \widetilde{P}_i - \Gamma_l BP_i - P_i\Gamma_l B\|_2 \leqslant \text{const}\, \delta_i' i^{-2},$$

где $\delta_i' \in l_2$.

4. Преобразование подобия оператора L

Вернемся теперь к исходному оператору (1), (2). Напомним, что в качестве невозмущенного оператора выступает оператор $(Ay)(t) = -y''(t)$, а в качестве возмущения — оператор умножения на матричный потенциал $(By)(t) = -Q(t)y(t)$. Очевидно, что операторная матрица возмущения состоит из элементов $P_iBP_j = B_{i-j} = (b_{lk\,i-j})$, $1 \leqslant l,k \leqslant m$, $i,j \in \mathbb{Z}$ (соответственно, числовая матрица имеет вид $(b_{lk\,i-j})$). У матрицы B_{ij} операторы, стоящие на диагоналях, параллельных главной, одинаковы, и на главной диагонали стоят блоки B_0, состоящие из матрицы $B_0 = (b_{lk0})$, $1 \leqslant l,k \leqslant m$, где $b_{lk0} = \int_0^1 b_{lk}(t)\,\mathrm{d}t$. Так как все функции b_{lk} из $L_2[0,1]$, то они имеют ряды Фурье вида $b_{lk}(t) = \sum\limits_m b_{lkm}e^{i2\pi mt}$, причем $\sum\limits_m |b_{lkm}|^2 < \infty$. Заметим, что сходимость рядов Фурье у возмущения не гарантирует условия $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Поэтому сначала надо сделать предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $\widetilde{A} - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определим трансформатор J_0B формулой

$$J_0B = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_nBP_n,$$

где ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} P_nBP_n$ сходится, и его сумма равна B_0, т. е. трансформатор J_0 определен корректно. Отметим, что $J_0B \notin \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Перейдем к оператору $\Gamma_0 B$. Используя свойство 1) предположения 1, определим сначала оператор $\Gamma_0 B_{ij} = \Gamma_0 P_i B P_j = P_i \Gamma_0 B P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, как решение $Y_{ij} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ операторного уравнения

$$AY_{ij} - Y_{ij}A = B_{ij} - J_0 B_{ij}, \tag{15}$$

удовлетворяющее условию $Y_{ii} = 0$. Уравнения (15) разрешимы, каждое имеет единственное решение [13], [14], и так как это уравнение переписывается в виде

$$A_i Y_{ij} - Y_{ij} A_j = B_{ij} - J_0 B_{ij},$$

где $A_i = A|\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_i = \operatorname{Ran} P_i$, $A_i P_i = \lambda_i P_i$, то ([13] – [15])

$$\|Y_{ij}\| \leqslant \frac{\mathrm{const}\|B_{ij}\|}{|\lambda_i - \lambda_j|}.$$

Соберем оператор $\Gamma_0 B$ из операторных блоков $\Gamma_0 B_{ij}$, $i \neq j$, и покажем, что $\Gamma_0 B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Действительно,

$$\|\Gamma_0 B_p\|_2^2 = \sum_{\substack{i-j=p \\ p\neq 0}} \|\Gamma_0 B_{ij}\|_2^2 = \sum_j \frac{\|B_p\|_2^2}{4\pi^2 p^2 (2\pi(p+2j)+2\theta)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|B_p\|_2^2}{4\pi^2 p^2} \sum_j \frac{1}{(2\pi(p+2j)+2\theta)^2},$$

где последний ряд сходится и $\|\Gamma_0 B_p\|_2^2 \leqslant \mathrm{const}\frac{\|B_p\|_2^2}{p^2}$;

$$\|\Gamma_0 B\|_2^2 = \sum_p \|\Gamma_0 B_p\|_2^2 = \mathrm{const} \sum_p \frac{\|B_p\|_2^2}{p^2} < \infty.$$

Таким образом, $\Gamma_0 B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Очевидно, что $\Gamma_0 B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ и $\Gamma_0 B$ можно представить в виде $C_0 A^{-\beta}$, где $\beta < \frac{1}{2}$, так как $\Gamma_0 B = \Gamma_0 B A^{\beta} A^{-\beta}$ и для оператора $C_0 = \Gamma_0 B A^{\beta}$, $\beta < \frac{1}{2}$, имеем

$$\|\Gamma_0 B A^{\beta}\|_2^2 = \sum_{p\neq 0} \frac{\|B_p\|_2^2}{p^2} \sum_j \frac{j^{2\beta}}{(p+2j)^2},$$

где внутренний ряд сходится, если $2\beta < 1$.

Рассмотрим теперь оператор $B\Gamma_0 B$:

$$\|B\Gamma_0 B\|_2^2 = \sum_p \Big\| \sum_k B_k (\Gamma_0 B)_{p-k} \Big\|_2^2 \leqslant \sum_p \left(\sum_k \|B_k\|_\infty \|\Gamma_0 B_{p-k}\|_2 \right)^2.$$

Рассмотрим две последовательности: последовательность $\xi_{1k} = \|B_k\|_\infty$, по условию $\xi_{1k} \in l_2$; последовательность $\xi_{2k} = \|\Gamma_0 B_p\|_2 \leqslant \frac{\|B_p\|_2}{p} (\sum\limits_j \frac{1}{(p+2j)^2})^{\frac{1}{2}} \in l_1$.

Свертка двух последовательностей ξ_{1k} из l_2 и ξ_{2k} из l_1 есть элемент l_2, т.е. $\sum\limits_p (\sum\limits_k \xi_{1k}\xi_{2(p-k)})^2 < \infty$. Таким образом, $B\Gamma_0 B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Рассмотрим оператор $(\Gamma_0 B) J_0 B$. Проводим аналогичные рассуждения:

$$\sum_p \|(\Gamma_0 B) J_0 B\|_2^2 \leqslant \sum_p \Big\| \sum_{k\neq 0} (\Gamma_0 B)_k (J_0 B)_{p-k} \Big\|_2^2 = \sum_{p\neq 0} \|(\Gamma_0 B)_p B_0\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|B_0\|_\infty^2 \sum_p \|(\Gamma_0 B)_p\|_2^2 < \infty,$$

т. е. $(\Gamma_0 B) J_0 B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Наряду с операторами Γ_0 и J_0 рассмотрим также операторы Γ_n и J_n, определяемые равенствами:

$$J_nB = J_0B - J_0(Q_nBQ_n) + Q_nBQ_n = J_0B - Q_nJ_0BQ_n + Q_nBQ_n = \\ = Q_nBQ_n + \sum_{|k|>n} P_kBP_k; \quad (16)$$

$$\Gamma_nB = \Gamma_0B - \Gamma_0(Q_nBQ_n) = \Gamma_0B - Q_n\Gamma_0BQ_n. \quad (17)$$

Из этих равенств следует, что $\Gamma_nB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для любого n. Более того,

$$\lim_{n\to\infty} \|\Gamma_nB\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|\Gamma_0B - \Gamma_0(Q_nBQ_n)\|_2^2 = 0,$$

поэтому можно выбрать число n достаточно большое, такое что $\|\Gamma_nB\|_2 < 1$.

Лемма 3. *Операторы Γ_nB, J_nB, B удовлетворяют условиям предположения 1.*

Доказательство. Выполнение условий 1 и 3 доказано выше. Рассмотрим условие 4. Так как $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и

$$\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| = \|BA^{-\frac{1}{2}}\| \cdot \|A^{\frac{1}{2}}(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|,$$

причем последний множитель можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора числа λ_ε.

Включение $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$ доказывается так же, как и в теореме 5. Лемма доказана. □

Теорема 7. *Существует такое число n, что оператор $A - B$ подобен оператору*

$$A - J_nB - (I + \Gamma_nB)^{-1}(B\Gamma_nB - \Gamma_nBJ_nB) = \widetilde{A} - \widetilde{B},$$

где $\widetilde{A} = A - J_0B$ и $\widetilde{B} = (I + \Gamma_nB)^{-1}(B\Gamma_nB - \Gamma_nBJ_nB) - J_0B + J_nB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператором преобразования оператора $A - B$ в оператор $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ служит оператор $I + \Gamma_nB$, где $\Gamma_nB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теперь в качестве невозмущенного оператора удобно брать оператор $\widetilde{A}$, а в качестве возмущения — оператор $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Заметим, что J_0B, $J_nB \notin \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и оператор $J_0B = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} B_0I_k$, где символом I_k обозначен оператор такой, что $P_kI_k = I_kP_k = P_k$, $I_kP_l = P_lI_k = 0$, при $l \neq k$, т. е. оператор J_0B состоит из блоков B_0 на главной диагонали, а все остальные элементы его операторной матрицы равны нулю. Оператор $J_nB - J_0B$ конечномерный, поэтому он принадлежит и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Более того, главная диагональ его операторной матрицы нулевая.

Применим теперь к оператору $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ теорему 6 и получим, что верна

Теорема 8. *Существует такое число $l \in \mathbb{Z}$ ($l \geqslant n$), что оператор $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ подобен оператору блочно-диагонального вида $\widetilde{A} - J_lX$, т. е.*

$$(\widetilde{A} - \widetilde{B})(I + \Gamma_lX) = (I + \Gamma_lX)(\widetilde{A} - J_lX),$$

где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение в пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ нелинейного операторного уравнения (8) с оператором-возмущением $\widetilde{B}$ и операторами Γ_l и J_l, определенными формулами (16) и (17).

Из теоремы 8 вытекает

Теорема 9. *Существуют такие натуральные числа n и l ($l > n$), что оператор L, определенный равенствами (1), (2), подобен оператору блочно-диагонального вида относительно системы проекторов P_k*

$$-\frac{d^2}{dt^2} - Q_nBQ_n - \sum_{|k|>n} P_kBP_k - Q_lXQ_l - \sum_{|k|>l} P_kXP_k, \tag{18}$$

где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного уравнения (8) с J_l и Γ_l, $X - \widetilde{B} \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, оператор $\widetilde{B}$ из теоремы 7 и $P_kBP_k = Q_0I_k$. Оператором, осуществляющим преобразование подобия, является оператор

$$V = I + \Gamma_nB + \Gamma_lX + \Gamma_nB\Gamma_lX = I + Y^{nl}, \tag{19}$$

где $Y^{nl} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 9 следует, что

$$\sigma(L) = \sigma(A - J_nB - J_lX) = \widetilde{\sigma}_{(l)} \bigcup \bigg(\bigcup_{|k|>l} \widetilde{\sigma}_k \bigg),$$

где $\widetilde{\sigma}_k = \sigma(AP_k - P_kB|_{\mathcal{H}_k} - P_kX|_{\mathcal{H}_k})$, $AP_k = \lambda_kP_k$ и $\sigma(P_kBP_k) = \sigma(B_0)$ — известен.

Представим оператор $\widetilde{B}$ в виде

$$\widetilde{B} = B\Gamma_nB - \Gamma_nBJ_nB + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Gamma_nB(B\Gamma_nB - \Gamma_nBJ_nB) = B\Gamma_nB - \Gamma_nBJ_nB + T_1,$$

где $T_1 \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, поэтому

$$J_l\widetilde{B} = \widetilde{J}_l(B\Gamma_nB) + J_lT_1 = \sum_{|k|>l} P_kB\Gamma_nBP_k + Q_lB\Gamma_nBQ_l + J_lT_1,$$

$$\|P_kB\Gamma_nBP_k\|_2 = \bigg\| \sum_{j\neq k} \frac{B_{kj}B_{jk}}{\lambda_k - \lambda_j} \bigg\|_2 \leqslant \bigg(\sum_{j\neq k} \|B_{kj}\|_2^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\sum_{j\neq k} \frac{\|B_{jk}\|_2^2}{(\lambda_k - \lambda_j)^2} \bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, |k|^{-1}, |k| > m.$$

Поэтому, в случае простоты собственных значений μ_i, $i = 1, 2, \dots, m$, матрицы Q_0 имеет место формула (4), а в случае полупростоты — формула (6).

Из подобия операторов L и $A - \widetilde{B}$ следует, что спектральные проекторы P_k оператора A и $\widetilde{P}_k$ оператора L подобны, и $\widetilde{P}_k$ допускает представление

$$\widetilde{P}_k = (I + Y^{nl})P_k(I + Y^{nl})^{-1},$$

или

$$\widetilde{P}_k - P_k = (Y^{nl}P_k - P_kY^{nl})(I + Y^{nl})^{-1}.$$

Очевидно, что $\widetilde{P}_k - P_k \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оценим теперь величины $Y^{nl}P_k$, P_kY^{nl}, по норме пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Учитывая, что $\Gamma_lX = YA^{-\frac{1}{2}}$, $\Gamma_nB\Gamma_lX = \Gamma_nBYA^{-\frac{1}{2}} = ZA^{-\frac{1}{2}}$, где $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $Z \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, имеем

$$\|(\Gamma_nB + \Gamma_lX + \Gamma_nB\Gamma_lX)P_k\|_2 \leqslant \|\Gamma_nBP_k\|_2 +$$
$$+ \bigg(\sum_{|l|\neq k} \frac{\|B_{lk}\|_2^2}{(\lambda_l - \lambda_k)^2} \bigg)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\bigg(\frac{1}{|k|}\bigg); \tag{20}$$

так как $B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, и $b_{ij} \in L_2[0,1]$, то величина $\sup\limits_l \sum \|B_{lk}\|_2^2 < \infty$, ограничена по k, и, следовательно, $\|Y^{nl} P_k\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|})$. Тогда

$$\|\widetilde{P}_k - P_k\|_2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|}\right),$$

т. е. имеет место формула (7).

Из подобия оператора $L = A - B$, определенного формулами (1), (2), оператору вида (18) следует равенство (в случае простых собственных значений матрицы Q_0)

$$\widetilde{e}_{k,j} = V e_{k,j} = e_{k,j} + Y^{nl} e_{k,j}, \quad |k| > l,$$

где оператор V определен формулой (19). Для доказательства равенства (5) осталось оценить величину $Y^{nl} e_{k,j}$, поэтому оценка (5) вытекает из оценки

$$\|\Gamma_n B e_{k,j}\|_2 = \left(\sum_{i \neq k} \frac{\|B_{ik}\|_2^2}{(\lambda_i - \lambda_k)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{|k|}\left(\sum_{i \neq k} \|B_{ik}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{const}\, |k|^{-1},$$

и представления $\Gamma_l X$ и $\Gamma_n B \Gamma_l X$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ в виде $Y A^{-\frac{1}{2}}$, $Z A^{-\frac{1}{2}}$, $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $Z \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Итак, теорема 1 доказана.

Напомним следующее

Определение 3 ([2]). *Пусть $C : D(C) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения*

$$\sigma(C) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k, \quad \mathbb{J} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}, \tag{21}$$

взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k, $k \in \mathbb{J}$. Пусть P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k. Оператор C называется спектральным относительно разложения (21) (или обобщенно спектральным), если ряд $P_k x$ безусловно сходится для любого вектора x из $\mathcal{H}$.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следствие 1.

Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы 1 имеет место формула

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (Y^{nl} P(\Omega) - P(\Omega) Y^{nl})(I + Y^{nl})^{-1},$$

поэтому

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant \mathrm{const}\, (\|Y^{nl} P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega) Y^{nl}\|_2).$$

Рассмотрим первую из норм. Так как

$$\begin{aligned}\|Y^{nl} P(\Omega)\|_2 = \|\Gamma_n B P(\Omega) + \Gamma_l X P(\Omega) + \Gamma_n B \Gamma_l X P(\Omega)\|_2 \leqslant \|\Gamma_n B P(\Omega)\|_2 + \\ + \|Y A^{-\frac{1}{2}} P(\Omega) + Z A^{-\frac{1}{2}} P(\Omega)\|_2 \leqslant \|\Gamma_n B P(\Omega)\|_2 + \mathcal{O}(|k_0|^{-\frac{1}{2}}),\end{aligned}$$

то необходимо оценить только величину $\|\Gamma_n B P(\Omega)\|$.

Повторяя рассуждения для (20), получаем $\|\Gamma_n B P(\Omega)\|_2 \leqslant \mathcal{O}(k_0^{-\frac{1}{2}})$. Для второй нормы оценка аналогична. Теорема доказана.

В заключении добавим, что в цитированной работе [1] не рассматривались оценки на спектральные проекторы (теоремы 1, 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Велиев О.А. *О несамосопряженных операторах Штурма-Лиувилля с матричными потенциалами* // Матем. заметки. 2007. Т. 81., №. 4. С. 496–506.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Спектральные операторы.* Т. III. М.: Мир. 1974. 663 с.
3. Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов* // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, №. 1. С. 21–39.
4. Баскаков А.Г. *Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, №. 4. С. 435–457.
5. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, №. 4. С. 3–32.
6. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом* // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75., №. 3. С. 3–28.
7. A.G. Baskakov, I.A. Krishtal *On completeness of spectral subspaces of linear relations and ordered pairs of linear operators* // J. Math. Anal. and Appl. 2013. V. 407. P. 157–178.
8. Ускова Н.Б. *Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов* // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41., №. 3. С. 712–721.
9. Ускова Н.Б. *О спектре некоторых классов дифференциальных операторов* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30., №. 2. С. 350–352.
10. Поляков Д.М. *Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами* // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56., №. 1. С. 165–184.
11. Карпикова А.В. *Асимптотика собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с периодическими краевыми условиями* // Уфимский матем. журн. 2014. Т. 6., №. 3. С. 28–34.
12. Азарнова Т.В., Ускова Н.Б. *О преобразовании подобия операторов* // Вестник ВГУ. Сер. Физ. Матем. 2007. №. 2. С. 121–126.
13. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука. 1970.
14. Баскаков А.Г., Юргелас В.В. *Индефинитная диссипативность и обратимость линейных диференциальных операторов* // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41., №. 12. С. 1613–1614.
15. R. Bhatia, P. Rosental *How and why to solve the operator equation* $AX - XB = Y$ // Bull. London. Math. 1997. 29. P. 1–21.
16. Баскаков А.Г. *Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений* // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 23–62.

Наталья Борисовна Ускова,
Воронежский государственный технический университет,
Московский пр-т, д. 14.
394016, г. Воронеж, Россия
E-mail: nat-uskova@mail.ru