ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 2 (2015). С. 73-108.

О ФОРМУЛАХ ЛЕФШЕЦА ДЛЯ ПОТОКОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ СО СЛОЕНИЕМ

Ю.А. КОРДЮКОВ, В.А. ПАВЛЕНКО

Аннотация. Работа посвящена формулам Лефшеца для потоков на компактных многообразиях, сохраняющих слоение коразмерности один и имеющих неподвижные точки. Мы разрабатываем подход к формулам Лефшеца, основанный на понятии регуляризованного следа на некоторой алгебре сингулярных интегральных операторов, введенном в предыдущей работе. Формула Лефшеца доказана в случае, когда поток сохраняет слоение, задаваемое слоями расслоения над окружностью. Для конкретного примера потока на двумерном торе, сохраняющего слоение типа Риба, мы доказали аналог формулы Маккина-Зингера для сглаженных регуляризованных функций Лефшеца.

Ключевые слова: формула Лефшеца, поток, замкнутые орбиты, неподвижные точки, многообразие со слоением, регуляризованный след.

Mathematics Subject Classification: 58J22, 37C25, 58J42

1. Введение

Данная работа посвящена формулам Лефшеца для потоков на компактных многообразиях, сохраняющих слоение коразмерности один. Здесь под формулами Лефшеца для потока мы понимаем такие количественные соотношения, которые связывают некоторые глобальные инварианты потока с его замкнутыми орбитами (см., например, [2, 6, 7] и имеющиеся в них ссылки по поводу общей информации о формулах Лефшеца для потоков). Недавний интерес к формулам типа Лефшеца для потоков, сохраняющих слоение, связан с подходом к доказательству гипотезы Римана, предложенным Денингером в пленарном докладе на Международном конгрессе математиков в Берлине в 1998 г. [3]. Этот подход основан на аналогии некоторых формул Лефшеца для потоков, сохраняющих слоение, с явными формулами следов в теории чисел (по поводу более подробной информации см. работы [4, 5, 11] и имеющиеся в них ссылки). В частности, Денингер предложил в качестве гипотезы формулу Лефшеца для потоков, сохраняющих слоение. В случае, когда поток не имеет неподвижных точек, такая формула доказана первым автором совместно с Х. Альваресом Лопесом в работе [1]. Опишем вкратце эту формулу.

Пусть X — компактное многообразие размерности n и $\mathcal{F}$ — гладкое слоение коразмерности один на X. Предположим, что $T = \{T_t : X \to X : t \in \mathbb{R}\}$ — поток на X, удовлетворяющий следующим условиям:

(P1) Для любого $t \in \mathbb{R}$ диффеоморфизм T_t отображает каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в какой-либо (возможно, другой) слой.

(P2) Орбиты потока T трансверсальны к слоям слоения $\mathcal{F}$: т.е. для любого $x \in M$

$$T_xX = \mathbb{R}\,V(x) \oplus T_x\mathcal{F},$$

Yu.A. Kordyukov, V.A. Pavlenko, On Lefschetz formulas for flows on foliated manifolds.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00519-а).

Поступила 17 марта 2015 г.

где $V \in C^\infty(X, TX)$ — инфинитезимальный генератор потока.

В частности, поток T не имеет неподвижных точек.

Рассмотрим послойный комплекс де Рама $(\Omega(\mathcal{F}), d_\mathcal{F})$, задаваемый пространством $\Omega(\mathcal{F}) = C^\infty(X, \Lambda T^*\mathcal{F})$ гладких послойных дифференциальных форм на X и послойным дифференциалом де Рама $d_\mathcal{F} : \Omega(\mathcal{F}) \to \Omega(\mathcal{F})$. Пусть g — риманова метрика на X. Обозначим через $\delta_\mathcal{F} = d_\mathcal{F}^*$ соответствующий послойный кодифференциал де Рама и через $\Delta_\mathcal{F} = d_\mathcal{F}\delta_\mathcal{F} + \delta_\mathcal{F} d_\mathcal{F}$ послойный оператор Лапласа. Для любого $u = 0, \dots, n-1$ обозначим через $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ ортогональный проектор в пространстве $L^2\Omega^u(\mathcal{F})$ на подпространство $\mathcal{H}^u(\mathcal{F}) = \ker \Delta_\mathcal{F}^u$ послойных гармонических u-форм.

Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим оператор T_f в пространстве $\Omega(\mathcal{F})$ по формуле

$$T_f = \int_\mathbb{R} T_t^* \cdot f(t)\, dt\ ,$$

где T_t^* — оператор в $\Omega(\mathcal{F})$, индуцированный действием потока T_t.

Функция Лефшеца потока T определяется как обобщенная функция $L(T)$ на вещественной оси по формуле:

$$\langle L(T), f\rangle = \sum_{u=0}^{n-1} (-1)^u \operatorname{Tr}(T_f \circ P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Теорема 1 ([1]). *В некоторой окрестности* 0 *в* $\mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$L(T) = \chi_\Lambda(\mathcal{F}) \cdot \delta_0\ .$$

Здесь $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ — дельта-функция в 0 и $\chi_\Lambda(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ — эйлерова L^2-характеристика слоения $\mathcal{F}$, введенная Конном. Отметим, что в работе [1] функция $L(T)$ обозначается через $\chi_{\mathrm{dis}}(\mathcal{F})$ и называется обобщенной эйлеровой характеристикой слоения $\mathcal{F}$.

Напомним, что множество $O_x = \{T_t(x) \in X : t \in \mathbb{R}\} \subset X$ называется траекторией или орбитой потока T, проходящей через точку $x \in X$. Точка x называется неподвижной точкой потока T, если $T_t(x) = x$ для любого $t \in \mathbb{R}$. В этом случае $O_x = \{x\}$. Орбита O_x называется замкнутой (или периодической), если существует такое $\tau \in \mathbb{R}$ (период), что $T_\tau(x) = x$, и $O_x \neq \{x\}$. Наименьший положительный период замкнутой орбиты называется примитивным периодом.

Замкнутая орбита O_x потока T называется простой, если

$$\det(id - dT_\tau(x) : T_x\mathcal{F}^* \to T_x\mathcal{F}^*) \neq 0$$

для любого периода τ. Положим

$$\varepsilon(\tau) = \operatorname{sgn}\, \det\left(id - dT_\tau(x) : T_x\mathcal{F}^* \to T_x\mathcal{F}^*\right).$$

Теорема 2 ([1]). *Предположим, что все замкнутые орбиты потока* T *просты. Тогда*

$$L(T) = \sum_c \tau(c) \sum_{k\neq 0} \varepsilon(k\tau(c)) \cdot \delta_{k\tau(c)}$$

на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *где* c *пробегает множество всех замкнутых орбит потока* T, $\tau(c)$ *обозначает примитивный период орбиты* c, *и* x *— произвольная точка на* c.

Формулу Лефшеца работы [1] можно рассматривать как теорему об индексе для некоторого дифференциального оператора, трансверсально-эллиптического по отношению к потоку (см. [9] по поводу связей с трансверсальной теорией индекса на многообразиях со слоением). Существенную роль в работе [1] играет следующий аналитический результат. Пусть K — послойно сглаживающий оператор на X, то есть оператор в пространстве $C^\infty(X)$, задающийся семейством собственных интегральных операторов с гладким ядром, действующих вдоль слоев слоения. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор $T_f \circ K$ является интегральным оператором с гладким ядром. Этот факт позволяет определить обобщенную функцию $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{Tr} T_f \circ K$ на $\mathbb{R}$, где Tr обозначает след оператора $T_f \circ K$ как ядерного оператора в гильбертовом пространстве $L^2(X)$.

Рассуждения, приведенные в работах [3, 4], показывают, что если мы хотим интерпретировать явную формулу следов для дзета-функции Римана как формулу Лефшеца для некоторого потока, сохраняющего слоение, то этот поток обязательно должен иметь неподвижные точки. В данной работе мы интересуемся обобщениями формулы Лефшеца для потока на компактном многообразии со слоением коразмерности один на случай, когда поток имеет неподвижные точки. Точнее, мы рассматриваем поток T на компактном многообразии X размерности n со слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один, удовлетворяющий условию (P1), а также следующим условиям:

(P3) Поток T имеет конечное число неподвижных точек, являющихся простыми.

(P4) Орбиты потока T трансверсальны ко всем слоям слоения, кроме тех слоев, которые содержат неподвижные точки потока.

Напомним, что неподвижная точка x потока T называется простой, если для любого $t > 0$

$$\det(Id - dT_t(x) : T_xX \to T_xX) \neq 0.$$

Данная работа является частью совместного проекта с Х. Альваресом Лопесом и Э. Лейчтнамом, в котором предлагается новый подход к формулам Лефшеца для потоков, удовлетворяющих условиям (P1), (P3), (P4). Этот подход заключается в следующем. Прежде всего, отметим, что при условиях (P1), (P3), (P4) оператор вида $T_f \circ K$, где K — послойно сглаживающий оператор, вообще говоря, не является оператором с гладким ядром, поскольку его ядро может иметь особенности вблизи слоев, содержащих неподвижные точки потока. Идея состоит в том, чтобы продолжить функционал следа, определенный на операторах с гладким ядром, до функционала r-Tr, называемого регуляризованным следом, определенного на более широком классе интегральных операторов, включающем операторы вида $T_f \circ K$. К сожалению, проекторы $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ не всегда являются хорошими послойно сглаживающими операторами. Однако, если это так, и регуляризованный след оператора вида $T_f \circ P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ корректно определен, то мы можем определить аналог функции Лефшеца потока T, регуляризованную функцию Лефшеца $L(T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, по формуле

$$\langle L(T), f\rangle = \sum_{u=0}^{n-1} (-1)^u \operatorname{r-Tr}(T_f \circ P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{2}$$

В общем случае можно пытаться использовать хорошо разработанные методы теории индекса, заменяя $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ оператором вида $\psi(t\Delta_{\mathcal{F}})$, где ψ — достаточно хорошая функция на вещественной оси и $t > 0$, например, оператором $e^{-t\Delta_{\mathcal{F}}}$.

Функционал регуляризованного следа r-Tr и соответствующая алгебра сингулярных интегральных операторов $\mathcal{K}(X, X^0)$ на произвольном компактном многообразии X, имеющих особенности на некотором гладком подмногообразии коразмерности один X^0, были построены в работе [10], используя идеи работ Мельроуза [12, 13, 14], в частности, предложенный в них геометрический подход к построению и исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов. Следует отметить, что функционал r-Tr не обладает следовым свойством, но имеет место формула для регуляризованного следа коммутатора операторов в терминах некоторых интегральных операторов с гладким ядром на X^0.

Целью данной работы является реализация упомянутого выше подхода для потока T, удовлетворяющего условиям (P1), (P3), (P4), в двух случаях.

Прежде всего, мы рассматриваем случай, когда слоение $\mathcal{F}$ задается слоями некоторого расслоения над окружностью S^1. В этом случае показано, что для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и для любого послойно сглаживающего оператора K оператор $T_f \circ K$ принадлежит алгебре $\mathcal{K}(X, X^0)$, где X^0 — объединение всех слоев, содержащих неподвижные точки потока. Более того, оператор $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ является послойно сглаживающим оператором. Эти факты позволяют нам определить регуляризованную функцию Лефшеца $L(T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ по формуле (2). Явно вычисляя регуляризованный след оператора $T_f \circ K$, мы получаем следующую формулу Лефшеца (см. теорему 7 по поводу более детальной формулировки).

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$L(T) = C\chi(F)\delta_0,$$

где $\chi(F)$ — эйлерова характеристика слоя F и C — некоторая постоянная, зависящая только от потока.

Затем мы рассматриваем простейший конкретный пример слоения $\mathcal{F}$, которое не задается слоями некоторого расслоения. А именно, мы рассматриваем слоение $\mathcal{F}$ на двумерном торе $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, подъем которого на $\mathbb{R}^2$ при естественном отображении $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}^2$, слоение $\widetilde{\mathcal{F}}$ на $\mathbb{R}^2$, задается множествами уровня отображения $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(y,z) = e^z \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)$. Данное слоение имеет один компактный слой $X^0 = \{(y,z) \in \mathbb{T}^2 : y = 1\}$, все другие слои некомпактны и наматываются на него. Отметим, что слоение $\mathcal{F}$ не является трансверсально ориентируемым. Можно явно построить класс потоков на X, удовлетворяющих условиям (P1), (P3), (P4). Неподвижные точки каждого такого потока принадлежат X^0.

В этом случае также можно доказать, что для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и для любого послойно сглаживающего оператора K оператор $T_f \circ K$ принадлежит алгебре $\mathcal{K}(X, X^0)$, где X^0 — объединение всех слоев, содержащих неподвижные точки потока, и потому определен его регуляризованный след. Однако явное вычисление регуляризованного следа оператора $T_f \circ K$ представляется достаточно сложной задачей.

Другая проблема состоит в том, что в данном случае проектор $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$, вообще говоря, не является послойно сглаживающим оператором. Поэтому, мы рассматриваем вместо него оператор $\psi(t\Delta_\mathcal{F})^2$, где ψ — достаточно хорошая функция на вещественной оси и $t > 0$, и соответствующую сглаженную регуляризованную функцию Лефшеца $L_{t,\psi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, задаваемую формулой (в данном случае $n = 2$)

$$\langle L_{t,\psi}, f\rangle = \sum_{u=0}^{n-1} (-1)^u \operatorname{r-Tr}(T_f \circ \psi(t\Delta^u_\mathcal{F})^2). \tag{3}$$

Важным фактом при доказательстве формулы Лефшеца в работе [1] является то, что сглаженная функция Лефшеца $L_{t,\psi}$ (определяемая при помощи обычного следа) не зависит от t (аналог хорошо известной формулы Маккина-Зингера). Этот факт существенно использует следовое свойства следа Tr. Поскольку r-Tr не обладает следовым свойством, сглаженная регуляризованная функция Лефшеца $C_{t,\psi,f}$, вообще говоря, зависит от t. Используя формулу для регуляризованного следа коммутатора, полученную в работе [10], мы доказываем в предложении 6 формулу для производной функции $C_{t,\psi,f}$ по t в терминах следов некоторых интегральных операторов на окружности. Более явная формула для $\frac{d}{dt}C_{t,\psi,f}$ получена в случае, когда $\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, то есть, когда $\psi(t\Delta^u_\mathcal{F})^2 = e^{-t\Delta^u_\mathcal{F}}$ (см. ниже теорему 8). Следующим естественным шагом является исследование асимптотического поведения функции $C_{t,\psi,f}$ при $t \to 0$ и при $t \to +\infty$, что является достаточно непростой задачей и не будет обсуждаться в данной работе.

План статьи следующий. Во втором параграфе мы напоминаем некоторые необходимые факты из работы [10]. В третьем параграфе мы рассматриваем случай, когда слоение $\mathcal{F}$ задается слоями некоторого расслоения над окружностью S^1. Четвертый параграф посвящен исследованию потока на слоении Риба. В конце четвертого параграфа мы обсуждаем аналог формулы Маккина-Зингера для примера, рассмотренного в третьем параграфе.

Авторы благодарны Х. Альваресу Лопесу и Э. Лейчтнаму за многочисленные полезные обсуждения и замечания.

2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы напомним основные необходимые понятия из работы [10].

2.1. Алгебра $\mathcal{K}(X, X^0; E)$. Пусть X — гладкое компактное многообразие размерности n, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, E — эрмитово векторное расслоение на X. Предположим, что на X задана риманова метрика g_X и $N(X^0)$ ориентировано.

Мы будем рассматривать операторы, действующие на полуплотностях. Обозначим через $\Omega_X^{\frac{1}{2}}$ расслоение полуплотностей на X. Рассмотрим оператор $A : C_0^\infty(X \setminus X^0, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X \setminus X^0, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ с ядром

$$k_A \in C^\infty \left((X \times X) \setminus (\{X^0 \times X\} \cup \{X \times X^0\}), \mathcal{L}(E) \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times X}\right),$$

где $\mathcal{L}(E)$ — векторное расслоение на $X \times X$, слой которого в точке $(p_1, p_2) \in X \times X$ состоит из линейных отображений из E_{p_2} в E_{p_1}. Действие оператора A на полуплотность $\mu \in C_0^\infty(X \setminus X^0, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ задается формулой:

$$A\mu = \int\limits_X k_A \mu. \tag{4}$$

Всюду в дальнейшем $|dx^0|$ — фиксированная гладкая положительная плотность на X^0.

Нам понадобятся некоторые специальные координаты на X, определенные вблизи X^0. Пусть $\exp : N(X^0) := TX/TX^0 \cong (TX^0)^\perp \to X$ — экспоненциальное отображение римановой метрики g_X для подмногообразия X^0. Будем отождествлять X^0 с нулевым сечением расслоения $N(X^0)$, что позволяет рассматривать его как подмногообразие в $N(X^0)$. Хорошо известно, что существует такая окрестность $U \supset X^0$ в $N(X^0)$, что ограничение $\exp|_U$ на U является диффеоморфизмом U на некоторую окрестность $\exp(U) =: V$ подмногообразия X^0 в X, называемую трубчатой окрестностью подмногообразия X^0. Каждой точке $p \in V$ можно поставить в соответствие пару $(x, x^0) \in N(X^0)$, где $x^0 \in X^0$ и $x \in N_{x^0}(X^0)$, $\exp(x) = p$. Поскольку нормальное расслоение $N(X^0)$ ориентировано, риманова метрика задает изоморфизм $N_{x^0}(X^0) \cong \mathbb{R}$ и можно считать, что $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, точка p однозначно задается парой (x, x^0), где $x \in \mathbb{R}$, $x^0 \in X^0$. Без потери общности можно считать, что $p \in V$ тогда и только тогда, когда $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Мы будем называть отображение $V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ нормальной системой координат около X^0.

Если E — эрмитово векторное расслоение на X, то мы можем предполагать, что имеет место изоморфизм $E_{(x,x^0)} \cong E_{(0,x^0)} = E^0_{x^0}$ для любого $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, где E^0 — ограничение расслоения E на X^0. В таком случае мы будем говорить, что на $\exp(U)$ задана адаптированная тривиализация расслоения E.

Возьмем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ и адаптированную тривиализацию расслоения E в трубчатой окрестности V подмногообразия X^0. Пусть (x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) — соответствующие координаты на $V \times V$. Ядро k_A записывается в виде

$$k_A = K_A(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) \left| \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} dx_1^0 dx_2^0 \right|^{\frac{1}{2}},$$

где $K_A(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$ — линейное отображение из $E_{(x_2,x_2^0)} \cong E^0_{x_2^0}$ в $E_{(x_1,x_1^0)} \cong E^0_{x_1^0}$ для любого (x_1, x_2, x_1^0, x_2^0). На множестве $(V \setminus X^0) \times (V \setminus X^0)$ введем систему координат $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in ((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$ по формулам

$$x = x_1, \quad s = \frac{x_1}{x_2}. \tag{5}$$

В локальной системе координат (x, s, x_1^0, x_2^0) ядро k_A записывается в виде:

$$k_A = \widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0)\left|\frac{dx}{x}\frac{ds}{s}dx_1^0dx_2^0\right|^{\frac{1}{2}},$$

где для любого $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$

$$\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0) : E^0_{x_2^0} \to E^0_{x_1^0}. \tag{6}$$

Пусть $\mu \in C_0^\infty(X, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}})$, $\operatorname{supp}\mu \subset V$. Запишем $\mu = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^{\frac{1}{2}}$, где $u \in C_0^\infty(V, E) \cong C_0^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0, E^0)$. Тогда

$$A\mu\Big|_V = \left(\int_{X^0}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0)u\left(\frac{x}{s}, x_2^0\right)\frac{ds}{s}dx_2^0\right)\left|\frac{dx}{x}dx_1^0\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 1. *Скажем, что $A \in \mathcal{K}(X, X^0, E)$, если выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что, если $\varrho(x, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(y, X^0) < \delta$ или $\varrho(y, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(x, X^0) < \delta$, то $k_A(x, y) = 0$ (здесь ϱ — геодезическое расстояние, определенное метрикой g_X).*
2. *Функция $\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0)$, определяемая формулой (6), является гладкой на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$.*
3. *Существуют такие m, M, $0 < m < M < \infty$, что носитель функции $\widetilde{K}_A$ содержится в множестве всех $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in ((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$ таких, что $m < |s| < M$.*

Множество $\mathcal{K}(X, X^0, E)$ является алгеброй.

2.2. Регуляризованный след. Операторы из $\mathcal{K}(X, X^0, E)$, вообще говоря, не являются ядерными. В данном параграфе мы введем некоторый функционал на $\mathcal{K}(X, X^0, E)$, называемый функционалом регуляризованного следа, который совпадает с функционалом следа на ядерных операторах.

Пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, E — эрмитово векторное расслоение на X, g_X — риманова метрика на X. Плотность μ на X называется гладкой относительной плотностью, если в нормальной системе координат около X^0 она записывается в виде:

$$\mu = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|, \quad (x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0, \tag{7}$$

где $|dx^0|$ — фиксированная гладкая плотность на X^0 и u — гладкая функция на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$. Для гладкой относительной плотности μ определим плотность $\mu\,|_{X^0}$ на X^0 следующим образом. Если записать μ в виде (7), то

$$\mu\,|_{X^0} = u(0, x^0)|dx^0|.$$

Определим непрерывную функцию r на X по формуле $r(p) = \varrho(p, X^0)$, где ϱ — геодезическое расстояние от точки p до подмногообразия X^0.

Определение 2. *Регуляризованный интеграл гладкой относительной плотности μ по X определяется формулой*

$$\int_X^r \mu = \lim_{\varepsilon \to 0}\Bigg(\int\limits_{\substack{X\\ r(p) > \varepsilon}}\mu + 2\ln\varepsilon\int_{X^0}\mu\,|_{X^0}\Bigg). \tag{8}$$

Для ядра k_A оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0; E)$ естественно определяется его ограничение на диагональ $\Delta = \{(p,p) \in X \times X : p \in X\} \cong X$ как матричнозначная плотность $k_A|_\Delta \in C^\infty(X \setminus X^0, \mathcal{L}(E) \otimes \Omega_X)$ на $X \setminus X^0$. Можно доказать, что ее поточечный след $\operatorname{tr} k_A|_\Delta \in C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X)$ является гладкой относительной плотностью на X, что позволяет дать следующее определение.

Определение 3. *Регуляризованный след оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0, E)$ с ядром k_A определяется по формуле*

$$\text{r-Tr}(A) = \int\limits_X^r \operatorname{tr} k_A|_\Delta \,.$$

Как было сказано выше, имеет место формула для регуляризованного следа коммутатора операторов $A, B \in \mathcal{K}(X, X^0; E)$ в терминах некоторых семейств интегральных операторов с гладким ядром на X^0, ассоциированных с A и B.

Пусть $A \in \mathcal{K}(X, X^0; E)$ и $\widetilde{K}_A$ определяется формулой (6). Тогда существует предел

$$\lim_{x\to 0} \widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) =: \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) : E^0_{x_2^0} \to E^0_{x_1^0}. \tag{9}$$

Определение 4. *Определяющим оператором, ассоциированным с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0, E)$, называется оператор $I(A)$, действие которого на полуплотность $\mu \in C_0^\infty((\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times X^0, \pi_2^* E^0 \otimes \Omega^{\frac12}_{(R\setminus\{0\})\times X^0})$ вида $\mu = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x} dx^0\right|^{\frac12}$ задается формулой:*

$$I(A)\mu = I(A)u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x} dx^0\right|^{\frac12} \in C_0^\infty((\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times X^0, \pi_2^* E^0 \otimes \Omega^{\frac12}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times X^0}),$$

где

$$I(A)u(x, x^0) = \int\limits_{X^0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_A(0, s, x^0, x_1^0) u\left(\frac{x}{s}, x_1^0\right) \frac{ds}{s} dx_1^0, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x^0 \in X^0.$$

Здесь $\pi_2^* E^0$ обозначает расслоение на $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times X^0$, являющееся поднятием расслоения E^0 при проекции $\pi_2 : (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times X^0 \to X^0$: $(\pi_2^* E^0)_{(x,x^0)} = E^0_{x^0}$.

Определение 5. *Определяющими семействами оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0, E)$ называются семейства $\{I^\pm(A, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ интегральных операторов в пространстве $C^\infty(X^0, E^0)$ с гладкими ядрами, задающимися формулами:*

$$K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_0^{+\infty} s^{-i\lambda} \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{s} : E^0_{x_2^0} \to E^0_{x_1^0},$$

$$K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_{-\infty}^0 |s|^{-i\lambda} \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{|s|} : E^0_{x_2^0} \to E^0_{x_1^0}.$$

Используя теорему Пэли-Винера, легко показать, что функции $K_{I^\pm(A,\lambda)}$ корректно определены для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и являются целыми функциями по λ.

Справедливы следующие свойства определяющих операторов:

1. $I(A \circ B) = I(A) \circ I(B)$.
2. $I^\pm(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^\pm(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^\mp(B, \lambda)$.

Теорема 4. *Если $A \in \mathcal{K}(X, X^0, E)$ и $B \in \mathcal{K}(X, X^0, E)$, то*

$$\text{r-Tr}([A, B]) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr}(\partial_\lambda I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + \partial_\lambda I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)) d\lambda,$$

где Tr *означает след интегрального оператора в пространстве* $C^\infty(X^0, E^0)$.

Интегрируя по частям по λ, можно переписать формулу в виде

$$\text{r-Tr}([A,B]) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Tr}(I^+(A,\lambda)\circ\partial_\lambda I^+(B,\lambda) + I^-(A,\lambda)\circ\partial_\lambda I^-(B,\lambda))d\lambda.$$

3. Потоки на расслоенных многообразиях

3.1. Поток на расслоенном многообразии и ассоциированные с ним операторы. Предположим, что компактное многообразие X размерности n является тотальным пространством расслоения $\pi : X \to S^1$ над окружностью $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с компактным многообразием F в качестве типичного слоя, и слоение $\mathcal{F}$ задается слоями расслоения π.

Пусть поток T на X удовлетворяет условиям (P1), (P3), (P4). Тогда существует такой поток $\overline{T}$ на S^1, что $\pi(T_t(x)) = \overline{T}_t(\pi(x))$ для любого $x \in X$. Запишем инфинитезимальный генератор $\overline{V} = \frac{d}{dt}\overline{T}_t|_{t=0}$ потока $\overline{T}$ в виде

$$\overline{V}(y) = a(y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad y \in S^1,$$

где $a \in C^\infty(S^1)$. По условию (P3) поток $\overline{T}$ имеет конечное число неподвижных точек $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in S^1$, которые невырожденны, то есть $a(\alpha_j) = 0$ и $a'(\alpha_j) \neq 0$ для любого $j = 1, \dots, k$. Точки α_j соответствуют слоям слоения $\mathcal{F}$, содержащим неподвижные точки потока T.

В тривиализации $\pi^{-1}(U) \cong F \times U$ расслоения π инфинитезимальный генератор $V = \frac{d}{dt}T_t|_{t=0}$ потока T имеет вид

$$V(y) = v_0(y) + a(y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad y \in U, \tag{10}$$

где v_0 — векторное поле на $\pi^{-1}(U)$, касающееся слоев расслоения π (то есть, гладкое семейство векторных полей на F, параметризованное $y \in U$). Другими словами, V — трансверсально проектируемое векторное поле на X.

Пусть E — комплексное векторное расслоение на X. Предположим, что задан поток T^E на E, который накрывает поток T на X, причем индуцированное этим потоком отображение $T^E_t(x) : E_x \to E_{T_t(x)}$ в слоях расслоения E линейно. Обозначим через $T^*_t : C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,E)$ — оператор, индуцированный потоком T:

$$T^*_t u(x) = r_t(x)[u(T_t(x))],$$

где $r_t(x) = T^E_{-t}(T_t(x)) : E_{T_t(x)} \to E_x$.

Обозначим через $\mathcal{V} \subset TX$ подрасслоение касательного расслоения TX, состоящее из векторов, касающихся слоев расслоения π. Пусть $|\mathcal{V}|^s$ — расслоение s-плотностей, ассоциированное с $\mathcal{V}$ (расслоение послойных s-плотностей). Зафиксируем гладкое положительное сечение α расслоения послойных плотностей $|\mathcal{V}|$. Оно задается гладким семейством $\{\alpha_y : y \in S^1\}$, где α_y — гладкая положительная плотность на F_y. Произведение послойной плотности α с $|dy|$ корректно определяет гладкую положительную плотность $|d\nu| = |d\alpha| \otimes |dy|$ на X. Будем отождествлять пространство гладких полуплотностей $C^\infty(X, \Omega^{\frac12}_X)$ с $C^\infty(X)$, используя фиксированную полуплотность $|d\nu|^{1/2} = |d\alpha|^{1/2} \otimes |dy|^{1/2}$.

Для функции $f \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ определим линейный оператор T_f в пространстве $C^\infty(X, E\otimes\Omega^{\frac12}_X)$ по формуле: для $\mu = u|d\alpha|^{1/2}\otimes|dy|^{1/2} \in C^\infty(X, E\otimes\Omega^{\frac12}_X)$

$$T_f\mu = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)T^*_t u\,dt\right)|d\alpha|^{1/2}\otimes|dy|^{1/2}. \tag{11}$$

3.2. Послойно сглаживающие операторы. По определению, послойно сглаживающий оператор $K : C^\infty(X, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ задается элементом k пространства $C^\infty(X \times_\pi X, \mathcal{L}(E) \otimes |\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}} \otimes |\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}})$, где $X \times_\pi X = \{(p_1, p_2) \in X \times X : \pi(p_1) = \pi(p_2)\}$ и $\mathcal{L}(E)$ — векторное расслоение на $X \times_\pi X$, слой которого в точке $(p_1, p_2) \in X \times_\pi X$ состоит из линейных отображений из E_{p_2} в E_{p_1}, по формуле:

$$K\mu = \int\limits_F k\mu, \tag{12}$$

где $\mu \in C^\infty(X, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}})$, и интеграл необходимо понимать в следующем смысле.

Пусть $\pi^{-1}(U) \subset X \cong F \times U$ — тривиализация расслоения π над некоторым открытым множеством $U \subset S^1$. Выбор тривиализации определяет диффеоморфизм $\pi^{-1}(U) \times_\pi \pi^{-1}(U) \cong F \times F \times U$. А именно, каждой паре $(p_1, p_2) \in \pi^{-1}(U) \times_\pi \pi^{-1}(U)$ ставится в соответствие набор (x_1^0, x_2^0, y), где $(x_1^0, y_1) \in F \times U$ соответствует точке p_1, а $(x_2^0, y_2) \in F \times U$ — точке p_2, причем $y_1 = y_2 = y$. Зафиксируем гладкую положительную плотность $|dx^0|$ на F. Полуплотности k и μ можно записать в виде:

$$k = k(x_1^0, x_2^0, y)|dx_1^0|^{\frac{1}{2}}|dx_2^0|^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = u(x_2^0, y)|dx^0|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}, \quad x_1^0, x_2^0 \in F, \quad y \in U.$$

Положим

$$\int\limits_F k\mu = \left(\int\limits_F k(x_1^0, x_2^0, y)u(x_2^0, y)|dx_2^0|\right)|dx_1^0|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}, \quad x_1^0 \in F, \quad y \in U,$$

где интеграл, стоящий в правой части равенства, следует понимать как интеграл от гладкой плотности на F со значениями в пространстве $E_{(x_1^0, y)}$. Легко видеть, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора тривиализации и плотности $|dx^0|$.

3.3. Операторы $T_f \circ K$. Зафиксируем стандартную риманову метрику $g_{S^1} = dy^2$ на S^1. Выберем риманову метрику g_X на X таким образом, что отображение $\pi : (X, g_X) \to (S^1, g_{S^1})$ является римановой субмерсией, то есть для любого касательного вектора $V \in T_pX$, ортогонального слою расслоения π, проходящему через точку p, справедливо равенство $\|V\|_{g_X} = \|d\pi_p(V)\|_{g_{S^1}}$. Рассмотрим гладкое подмногообразие коразмерности один $X^0 = \bigcup\limits_{j=1}^{k} F_{\alpha_j}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Предположим, что поток T удовлетворяет условиям (P1), (P3), (P4). Тогда для любого послойно сглаживающего оператора K и для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор $T_f \circ K$ принадлежит $\mathcal{K}(X, X^0, E)$.*

Доказательство. Для любого $\ell = 1, \ldots, k$ множество $U_\ell = S^1 \setminus \alpha_\ell$ является стягиваемым. Поэтому ограничение расслоения π на U_ℓ является тривиальным, то есть существует диффеоморфизм $\pi^{-1}(U_\ell) \cong F \times U_\ell$ такой, что $F_\alpha = \pi^{-1}(\alpha) \cong F \times \{\alpha\}$.

Для определенности положим $\ell = 1$, $U_\ell = U$ и запишем действие оператора T_f на полуплотность μ в данной тривиализации. Для любого $t \in \mathbb{R}$ и для любого $y \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$, $j = 1, \ldots, k$ $(\alpha_{k+1} = \alpha_1)$, имеет место включение $\overline{T}_t(y) \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$. Поэтому диффеоморфизм T_t записывается в виде

$$T_t(x^0, y) = (S_t(x^0, y), \overline{T}_t(y)), \quad (x^0, y) \in F \times U,$$

и послойная плотность α в виде $d\alpha = w(x^0, y)|dx^0|$. Тогда для любой полуплотности $\mu = u(x^0, y)|dx^0|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$(T_f \circ K)\mu = [(T_f \circ K)u(x^0, y)]|dx^0|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}},$$

где

$$(T_f\circ K)u(x^0,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int\limits_F r_t(x^0,y)k(S_t(x^0,y),x_1^0,\overline{T}_t(y))\times$$
$$\times\, u(x_1^0,\overline{T}_t(y))|w(x^0,y)|^{1/2}|w(x_1^0,\overline{T}_t(y))|^{\frac{1}{2}}dt|dx_1^0|, \quad (13)$$

где $k=k(x^0,x_1^0,y)|w(x^0,y)|^{\frac12}|w(x_1^0,y)|^{\frac12}|dx^0|^{\frac12}|dx_1^0|^{\frac12}, (x^0,y)\in F\times U,$ — ядро послойно сглаживающего оператора K. При фиксированном $y\in S^1\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$, скажем, $y\in(\alpha_1,\alpha_2)$, сделаем замену переменной $t\in(-\infty,+\infty)\mapsto y_1=\overline{T}_t(y)\in(\alpha_1,\alpha_2)$ в интеграле, стоящем в правой части формулы (13). Поскольку $\frac{dy_1}{dt}=a(\overline{T}_t(y))=a(y_1)\neq 0$, можно выразить t через y_1:

$$t=\Psi(y,y_1):=\int\limits_y^{y_1}\frac{dz}{a(z)},\quad y,y_1\in(\alpha_1,\alpha_2). \quad (14)$$

Легко видеть, что $\Psi\in C^\infty((\alpha_1,\alpha_2)\times(\alpha_1,\alpha_2))$. Следовательно, получаем:

$$(T_f\circ K)u(x^0,y)=\int\limits_{[\alpha_1,\alpha_2]} f(\Psi(y,y_1))\int\limits_F r_{\Psi(y,y_1)}(x^0,y)k(S_{\Psi(y,y_1)}(x^0,y),x_1^0,y_1)\times$$
$$\times\, u(x_1^0,y_1)|w(x^0,y)|^{1/2}|w(x_1^0,y_1)|^{\frac12}\frac{1}{|a(y_1)|}|dx_1^0||dy_1|.$$

Таким образом, ядро оператора $T_f\circ K$ имеет вид:

$$k_f(x^0,x_1^0,y,y_1)=f(\Psi(y,y_1))r_{\Psi(y,y_1)}(x^0,y)k(S_{\Psi(y,y_1)}(x^0,y),x_1^0,y_1)\times$$
$$\times\,|w(x^0,y)|^{1/2}|w(x_1^0,y_1)|^{\frac12}\frac{1}{|a(y_1)|}|dx_1^0|^{\frac12}|dy_1|^{\frac12}|dx^0|^{\frac12}|dy|^{\frac12}, \quad (15)$$

если $x^0,x_1^0\in F$, $y,y_1\in(\alpha_1,\alpha_2)$, и

$$k_f(x^0,x_1^0,y,y_1)=0,$$

если $x^0,x_1^0\in F$, $y\in(\alpha_1,\alpha_2)$, $y_1\notin(\alpha_1,\alpha_2)$. В частности, ядро оператора $T_f\circ K$ является гладкой полуплотностью на $X\times X\setminus(X^0\times X)\cup(X\times X^0)$.

Условие (1) определения 1 в данном случае немедленно вытекает из того, что функция f финитна и для любого $y\in(\alpha_j,\alpha_{j+1})$

$$\lim_{y_1\to\alpha_j}\Psi(y,y_1):=\int\limits_y^{\alpha_j}\frac{dz}{a(z)}=\infty,\quad \lim_{y_1\to\alpha_{j+1}}\Psi(y,y_1):=\int\limits_y^{\alpha_{j+1}}\frac{dz}{a(z)}=\infty.$$

Зафиксируем $j=1,\dots,k$. Поскольку отображение π является римановой субмерсией, нормальные координаты $(x,x^0)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times F_{\alpha_j}$ определяют тривиализацию расслоения π над шаром $B(\alpha_j,\varepsilon)\subset S^1$ с центром в точке $\alpha_j\in S^1$ радиуса ε. А именно тривиализация $V=\pi^{-1}(B(\alpha_j,\varepsilon))\cong F_{\alpha_j}\times B(\alpha_j,\varepsilon)$ ставит в соответствие точке $p\in\pi^{-1}(B(\alpha_j,\varepsilon))$ с нормальными координатами $(x,x^0)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times F_{\alpha_j}$ точку $(x^0,x+\alpha_j)\in F_{\alpha_j}\times B(\alpha_j,\varepsilon)$. Легко видеть, что формула (15) справедлива в данной тривиализации для любых $x^0,x_1^0\in F_{\alpha_j}$ и $y,y_1\in B(\alpha_j,\varepsilon)$. Мы будем предполагать, что $B(\alpha_j,\varepsilon)\subset(\alpha_{j-1},\alpha_{j+1})$

Пусть (x_1,x_2,x_1^0,x_2^0) — соответствующие координаты на $V\times V$. На множестве $(V\setminus F_{\alpha_j})\times(V\setminus F_{\alpha_j})$ введем систему координат

$$(x,s,x_1^0,x_2^0)\in((-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times F_{\alpha_j}\times F_{\alpha_j}$$

по формулам
$$x = x_1 = y - \alpha_j, \quad s = \frac{y - \alpha_j}{y_1 - \alpha_j}. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{K}_f$ на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$, определяемую формулой (6) по ядру k_f. Так как носитель ядра k_f содержится в $\bigsqcup_j \pi^{-1}(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \times \pi^{-1}(\alpha_j, \alpha_{j+1})$, $\widetilde{K}_f(x, s, x^0, x_1^0) = 0$ при $s < 0$.

При $s > 0$ функция $\widetilde{K}_f$ имеет вид:
$$\begin{aligned}\widetilde{K}_f(x, s, x^0, x_1^0) = f(\Psi(\alpha_j + x, \alpha_j + \frac{x}{s}))r_{\Psi(\alpha_j+x,\alpha_j+\frac{x}{s})}(x^0, \alpha_j + x)\times \\ \times k(S_{\Psi(\alpha_j+x,\alpha_j+\frac{x}{s})}(x^0, \alpha_j + x), x_1^0, \alpha_j + \frac{x}{s})|w(x^0, \alpha_j + x)|^{1/2}\times \\ \times |w(x_1^0, \alpha_j + \frac{x}{s})|^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{|x|}{s^{1/2}}}{|a(\alpha_j + \frac{x}{s})|}.\end{aligned} \tag{17}$$

Используя формулу (17), нетрудно проверить справедливость условий (2) и (3) определения 1. □

3.4. Регуляризованный след оператора $T_f \circ K$. Пусть K — послойно сглаживающий оператор с ядром $k \in C^\infty(X \times_\pi X, \mathcal{L}(E) \otimes |\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}} \otimes |\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}})$. Пусть $\pi^{-1}(U) \subset X \cong F \times U$ — тривиализация расслоения π над некоторым открытым множеством $U \subset S^1$. Зафиксируем гладкую положительную плотность $|dx^0|$ на F. Тогда k можно записать в виде:
$$k = k(x_1^0, x_2^0, y)|dx_1^0|^{\frac{1}{2}}|dx_2^0|^{\frac{1}{2}}, \quad x_1^0, x_2^0 \in F, \quad y \in U.$$
Определим гладкую послойную плотность k_X на $\pi^{-1}(U) \cong F \times U$ по формуле
$$k_X = \operatorname{tr} k(x^0, x^0, y)|dx^0|, \quad x^0 \in F, \quad y \in U.$$
Легко видеть, что это определение корректно определяет гладкую послойную плотность $k_X \in C^\infty(X, |\mathcal{V}|)$ на X, то есть оно не зависит от выбора плотности $|dx^0|$ и тривиализации расслоения π.

Пусть $V^* \in \Omega^1(X \setminus X^0)$ — такая дифференциальная 1-форма на X, что $V^*(V) = 1$ и $V^*(W) = 0$ для любого $W \in \mathcal{V}$. Она определяет трансверсальную плотность $|V^*| \in C^\infty(X \setminus X^0, |TX/\mathcal{V}|)$. Произведение послойной плотности $k_X \in C^\infty(X, |\mathcal{V}|)$ и трансверсальной плотности $|V^*| \in C^\infty(X \setminus X^0, |TX/\mathcal{V}|)$ корректно определено как плотность $k_X|V^*| \in C^\infty(X \setminus X^0, |TX|)$ на $X \setminus X^0$.

Теорема 6. *Предположим, что поток T удовлетворяет условиям (P1), (P3), (P4). Тогда $k_X|V^*|$ является гладкой относительной плотностью на многообразии X с выделенным подмногообразием X^0 и имеет место формула*
$$\text{r-Tr}(T_f \circ K) = f(0) \int_X^r k_X|V^*|. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $k \in C^\infty(X \times_\pi X, \mathcal{L}(E) \otimes |\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}} \otimes |\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}})$ — ядро послойно сглаживающего оператора K. Используя подходящее покрытие окружности S^1 и подчиненное ему разбиение единицы, можно свести доказательство к случаю, когда носитель ядра k содержится в множестве $\pi^{-1}(U)$, где $U \subset S^1$ — интервал, содержащий единственную точку α_j при некотором j. Выберем тривиализацию $\pi^{-1}(U) \subset X \cong F \times U$ расслоения π над U. Запишем векторное поле V в виде (10). Тогда $V^* = \frac{1}{a(y)}dy$ и
$$k_X|V^*| = \frac{\operatorname{tr} k(x^0, x^0, y)}{|a(y)|}|dx^0||dy|, \quad x^0 \in F, \quad y \in U.$$

По определению

$$\text{r-Tr}(T_f \circ K) = \int_X^r \operatorname{tr} k_f\,|_\Delta\ ,$$

где k_f задается формулой (15). Из (15), используя то, что $\Psi(y,y)=0$, получим:

$$k_f\,|_\Delta = f(0)k(x^0,x^0,y)|w(x^0,y)|\frac{1}{|a(y)|}|dx^0||dy| = f(0)k_X|V^*|.$$

Легко видеть, что $k_X|V^*|$ является гладкой относительной плотностью на X. Поэтому регуляризованный интеграл $\int_X^r \operatorname{tr} k_f\,|_\Delta$ существует, и справедлива формула (18). □

3.5. Формула Лефшеца для потока на расслоенном многообразии. В этом разделе мы докажем формулу Лефшеца, приведенную в теореме 3.

Прежде всего, мы дадим описание различных объектов, ассоциированных со слоением $\mathcal{F}$, задаваемым слоями расслоения $\pi : X \to S^1$. Напомним, что слоем $T_p\mathcal{F}$ расслоения $T\mathcal{F}$ в точке $p \in X$ является касательное пространство к слою, проходящему через точку p. В данном случае расслоение $T\mathcal{F}$ совпадает с вертикальным подрасслоением $\mathcal{V}$ касательного расслоения TX.

Произвольный элемент пространства $\Omega^u(\mathcal{F})$ послойных дифференциальных u-форм на многообразии X можно представлять как семейство $\omega = \{\omega(y) \in \Omega^u(F_y) : y \in S^1\}$, где $\omega(y)$ — дифференциальная форма на слое F_y, гладко зависящая от y. Другими словами, можно сказать, что $\omega \in C^\infty(S^1, \Omega^u_F)$ — гладкое сечение бесконечномерного расслоения Ω^u_F, слой которого в точке y есть пространство $\Omega^u(F_y)$ гладких дифференциальных u-форм на F_y.

Послойный дифференциал де Рама $d_\mathcal{F} : \Omega^u(\mathcal{F}) \to \Omega^{u+1}(\mathcal{F})$ описывается следующим образом: для $\omega = \{\omega(y) : y \in S^1\} \in \Omega^u(\mathcal{F})$ имеем

$$d_\mathcal{F}\omega = \{d[\omega(y)] : y \in S^1\} \in \Omega^{u+1}(\mathcal{F}),$$

где $d : \Omega^u(F_y) \to \Omega^{u+1}(F_y)$ — дифференциал де Рама на слое F_y.

Пусть $g_\mathcal{F}$ — послойная риманова метрика на X. Она задается семейством римановых метрик $g(y)$ на слоях F_y, гладко зависящих от $y \in S^1$. Метрика $g_\mathcal{F}$ определяет скалярное произведение на пространстве $\Omega^u(\mathcal{F}) \cong C^\infty(S^1, \Omega^u_F)$:

$$(\omega', \omega'') = \int_{S^1} (\omega'(y), \omega''(y))_{g(y)} dy.$$

Нетрудно показать, что сопряженный оператор $\delta_\mathcal{F} : \Omega^{u+1}(\mathcal{F}) \to \Omega^u(\mathcal{F})$ к оператору $d_\mathcal{F}$ задается следующим образом:

$$\delta_\mathcal{F}\omega(y) = d^*[\omega(y)], \quad \omega \in \Omega^{u+1}(\mathcal{F}),$$

где $d^* : \Omega^{u+1}(F_y) \to \Omega^u(F_y)$ — сопряженный оператор к d на слое F_y относительно метрики $g(y)$. Послойный оператор Лапласа $\Delta^u_\mathcal{F}$ имеет вид

$$\Delta^u_\mathcal{F}\omega(y) = \Delta^u_{g(y)}[\omega(y)], \quad \omega \in \Omega^u(\mathcal{F}),$$

где $\Delta^u_{g(y)}$ — оператор Лапласа на слое F_y, задаваемый метрикой $g(y)$.

Пространство $\mathcal{H}^u(\mathcal{F}) = \ker \Delta^u_\mathcal{F}$ послойно гармонических дифференциальных u-форм описывается следующим образом:

$$\mathcal{H}^u(\mathcal{F}) = \{\omega \in C^\infty(S^1, \Omega^u_F) : (\forall y \in S^1)\omega(y) \in \mathcal{H}^u_{g(y)}\},$$

где $\mathcal{H}^u_{g(y)} = \ker \Delta^u_{g(y)}$ — пространство гармонических дифференциальных u-форм на F_y. Наконец, проектор $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ на пространство послойно гармонических u-форм является оператором $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})} : L^2(S^1, L^2\Omega^u_F) \to L^2(S^1, L^2\Omega^u_F)$, задаваемым для любой $\omega \in L^2(S^1, L^2\Omega^u_F)$ формулой:

$$P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}\omega(y) = P_{\mathcal{H}^u_{g(y)}}[\omega(y)], \quad y \in S^1,$$

где для любого $y \in S^1$ оператор $P_{\mathcal{H}^u_{g(y)}}$ является ортогональным проектором в пространстве $L^2\Omega^u(F_y)$ L^2-дифференциальных u-форм на F_y на подпространство $\mathcal{H}^u_{g(y)}$. Оператор $P_{\mathcal{H}^u_{g(y)}}$ является оператором с гладким ядром $k^u_y \in C^\infty(\Lambda^u T^*\mathcal{F} \boxtimes (\Lambda^u T^*\mathcal{F})^*)$. Следовательно, проектор $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ задается формулой

$$P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}\omega(x^0, y) = \int\limits_{F_y} k^u_y(x^0, x^0_1)\omega(x^0_1, y)dx^0_1.$$

Хорошо известно, что ядро $k^u_y(x^0, x^0_1)$ гладко зависит от y, и потому оператор $P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}$ является послойно сглаживающим оператором.

Предположим, что поток T удовлетворяет условиям (P1), (P3), (P4). Рассмотрим $X^0 = \bigcup\limits_{j=1}^{k} F_{\alpha_j}$ — гладкое подмногообразие коразмерности 1. Определим регуляризованную функцию Лефшеца $L(T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\langle L(T), f\rangle = \sum_{u=0}^{n-1} (-1)^u \operatorname{r-Tr}(T_f \circ P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}), \quad f \in C^\infty_0(\mathbb{R}).$$

По теореме 5 регуляризованная функция Лефшеца $L(T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ корректно определена.

Напомним, что эйлеровой характеристикой компактного многообразия M размерности d называется число

$$\chi(M) = \sum_{u=0}^{d} (-1)^u \dim H^u(M),$$

где $H^u(M)$ — когомологии де Рама многообразия M.

Теорема 7. *Предположим, что поток T удовлетворяет условиям (P1), (P3), (P4). Тогда имеет место формула*

$$L(T) = \chi(F) \int\limits_{S^1}^{r} \frac{dy}{|a(y)|}\delta_0.$$

Доказательство. По теореме 6 мы имеем

$$\operatorname{r-Tr}(T_f \circ P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}) = f(0) \int\limits_{X}^{r} (k_{P_{\mathcal{H}^u(\mathcal{F})}})_X |V^*|.$$

Для любого послойно сглаживающего оператора K с ядром k имеет место следующая формула интегрирования вдоль слоев расслоения π:

$$\int\limits_{X}^{r} k_X |V^*| = \int\limits_{S^1}^{r} (\operatorname{tr}_{\mathcal{F}} K)\frac{1}{|a(y)|}dy,$$

где $K(y) : C^\infty(F_y) \to C^\infty(F_y)$ — ограничение оператора K на слой F_y, $\operatorname{tr}_{\mathcal{F}} K$ — функция на S^1, которая каждому $y \in S^1$ ставит в соответствие след $\operatorname{tr} K(y)$ оператора $K(y)$ (послойный след оператора K). По этой формуле получаем

$$\langle L(T), f\rangle = f(0)\sum_{u=0}^{n-1}(-1)^u\int\limits_{S^1}^{r}\frac{1}{|a(y)|}\operatorname{tr}P_{\mathcal{H}^u_{g(y)}}dy = f(0)\sum_{u=0}^{n-1}(-1)^u\int\limits_{S^1}^{r}\frac{1}{|a(y)|}\dim\mathcal{H}^u_{g(y)}dy.$$

Для любого $y\in S^1$ имеет место изоморфизм Ходжа $\mathcal{H}^u_{g(y)}\cong H^u(F_y)$. Поэтому получаем

$$\langle L(T), f\rangle = f(0)\sum_{u=0}^{n-1}(-1)^u\int\limits_{S^1}^{r}\frac{1}{|a(y)|}\dim H^u(F_y) = f(0)\int\limits_{S^1}^{r}\frac{1}{|a(y)|}\chi(F_y)dy.$$

Поскольку все слои F_y диффеоморфны многообразию F, $\chi(F_y)=\chi(F)$ для любого $y\in S^1$, что немедленно завершает доказательство теоремы. □

4. Слоение Риба

4.1. Слоение на торе и потоки на нем. Рассмотрим субмерсию $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, задаваемую формулой:

$$p(y,z)=e^z\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right),\quad (y,z)\in\mathbb{R}^2.$$

Множества уровня субмерсии p определяют слоение $\widetilde{\mathcal{F}}$ на многообразии $\mathbb{R}^2$, слои которого имеют вид $L_v=\{p(y,z)=v\}$ с $v\in\mathbb{R}$. Для любых $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$ отображение $R_{(k,\ell)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(y,z)\mapsto(y+2k,z+\ell)$ отображает L_v в $L_{(-1)^kve^\ell}$. Поэтому слоение $\widetilde{\mathcal{F}}$ определяет слоение $\mathcal{F}$ на двумерном торе $X=\mathbb{R}^2/(2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$. Заметим, что все слои слоения $\mathcal{F}$ некомпактны, кроме слоя $L_0=\{(y,z)\in X: y=1\}$, соответствующего $v=0$. Зафиксируем стандартную риманову метрику $g=dy^2+dz^2$ на X.

Как правило, мы будем работать с многообразием $\widehat{X}=(\mathbb{R}/2\mathbb{Z})\times\mathbb{R}$, которое является накрытием над X, и соответствующим поднятием $\widehat{\mathcal{F}}$ слоения $\mathcal{F}$ на $\widehat{X}$. Определим расслоенную систему координат на $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{F}})$ с координатами (u,v):

$$u=z;\quad v=e^z\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right),\quad (y,z)\in(0,2)\times\mathbb{R}\subset\widehat{X},\tag{19}$$

а также расслоенную систему координат на $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{F}})$ с координатами (u_0,v_0):

$$u_0=y_0;\quad v_0=e^{z_0}\cos\left(\frac{\pi}{2}y_0\right),\quad (y_0,z_0)\in(-1,1)\times\mathbb{R}\subset\widehat{X}.\tag{20}$$

Введенные таким образом системы координат образуют атлас слоения $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{F}})$.

Мы будем отождествлять функции на X с функциями на $\widehat{X}$, удовлетворяющими условию $f(y,z+1)=f(y,z)$ для любых $y\in\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, z\in\mathbb{R}$. Формулы (19) определяют диффеоморфизм ψ из $\widetilde{X}=(0,2)\times\mathbb{R}\subset\widehat{X}$ на $S=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: -e^u<v<e^u\}$. В координатах (u,v) условие периодичности функции f записывается в виде $f(u+1,ev)=f(u,v)$ для любого $(u,v)\in S$.

Прямым вычислением получаем:

$$\frac{\partial}{\partial u}=\frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial v}=-\frac{2}{\pi}e^{-z}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\frac{\partial}{\partial y}.\tag{21}$$

Пусть T — поток на $(X,\mathcal{F})$, удовлетворяющий условиям (P1), (P3) и (P4). Будем обозначать через T также поднятый поток на $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{F}})$. Тогда в силу условия (P1) инфинитезимальный генератор V потока T в координатах (19) имеет вид

$$V=A(u,v)\frac{\partial}{\partial u}+B(v)\frac{\partial}{\partial v},\quad (u,v)\in S,\tag{22}$$

где A и B — гладкие функции на S, удовлетворяющие условиям:

$$A(u+1,ev)=A(u,v),\quad B(ev)=eB(v).$$

Поскольку B является гладкой функцией в 0, легко видеть, что существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $B(v) = \alpha v$ для любого $v \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что инфинитезимальный генератор потока на X, удовлетворяющего условию (P1), касается компактного слоя L_0. Более того, если поток T удовлетворяет условиям (P1), (P3) и (P4), то $\alpha \neq 0$, и поток имеет хотя бы одну неподвижную точку, которая обязательно принадлежит L_0.

Записывая векторное поле V в координатах (y, z), можно показать, что оно является гладким на X тогда и только тогда, когда функция

$$f(y,z) = \begin{cases} A\left(z, -e^z \cos \frac{\pi}{2} y\right), \text{ если } (y,z) \in (-1,0) \times \mathbb{R}; \\ A\left(z, e^z \cos \frac{\pi}{2} y\right), \text{ если } (y,z) \in (0,1) \times \mathbb{R} \end{cases}$$

является гладкой при $y = 0$. В качестве примера функции A можно взять

$$A(u,v) = f_0(v^2 e^{-2u}) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(ve^{-u}) \cos ku + g_k(ve^{-u}) \sin ku),$$

где $f_k, g_k \in C^\infty([0,1])$ — четные функции, $f_0(1) = \alpha$, $f_k(1) = g_k(1) = 0$.

Поток T векторного поля V может быть записан в виде:

$$T_t(y,z) = (Y(t,y,z), Z(t,y,z)).$$

В (u,v)-координатах поток T задается системой дифференциальных уравнений $\dot{u} = A(u,v)$, $\dot{v} = \alpha v$. Поэтому, его запись в координатах (u, v) имеет вид

$$T_t(u,v) = (U(t,u,v), e^{\alpha t} v).$$

Ограничение потока T на L_0 задается уравнением $\dot{z} = A(z, 0)$. Легко проверить, что окружность $y = 0$ является периодической орбитой с периодом $\tau = \frac{1}{\alpha}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать некоторое комплексное векторное расслоение E на X. Мы будем предполагать, что E тривиально как векторное расслоение, то есть, $E \cong X \times \mathbb{C}^N$ при некотором N. Мы будем также предполагать, что на E задан поток T^E, который накрывает поток T на X, причем индуцированное этим потоком отображение $T^E_t(y,z) : E_{(y,z)} \to E_{T_t(y,z)}$ в слоях расслоения E линейно. Обозначим через T^*_t оператор в пространстве $C^\infty(X, E)$, индуцированный потоком T:

$$T^*_t u(y,z) = r_t(y,z)[u(T_t(y,z))],$$

где $r_t(y,z) = T^E_{-t}(T_t(y,z)) : E_{T_t(y,z)} \to E_{(y,z)}$.

Прежде всего, нас будут интересовать два частных случая. Первый случай связан с пространством гладких функций. В этом случае $E = X \times \mathbb{C}$ и $r_t(y,z) = 1$. Другой важный случай связан с пространством $\Omega^1(\mathcal{F})$ послойных дифференциальных 1-форм на X. В этом случае $E = T^*\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$.

Оператор $T_f : C^\infty(X, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X, E \otimes \Omega_X^{\frac{1}{2}})$, где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, задается формулой: для $\mu = a(y,z)|dydz|^{1/2}$

$$T_f \mu = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) r_\tau(y,z)[a(T_\tau(y,z))] d\tau \right) |dydz|^{1/2}. \tag{23}$$

4.2. Аналог формулы Маккина-Зингера. В этом разделе мы введем сглаженную регуляризованную функцию Лефшеца и сформулируем основные результаты параграфа 4.

Начнем с общей постановки. Пусть $(X, \mathcal{F})$ — произвольное n-мерное компактное многообразие со слоением коразмерности 1 и T — поток на X, удовлетворяющий условиям (P1), (P3) и (P4). Обозначим через X^0 подмногообразие многообразия X, состоящее из слоев, содержащих неподвижные точки потока. Зафиксируем произвольную риманову метрику на X.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество функций $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которые продолжаются до целых функций на всей комплексной плоскости, причем для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ множество функций $x \mapsto \phi(x+iy)$; $y \in K$ ограничено в пространстве Шварца $S(\mathbb{R})$.

Зафиксируем четную функцию $\phi \in \mathcal{A}$ вида $\phi(x) = \psi(x^2), x \in \mathbb{R}$, где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Для любых $t > 0$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим операторы $C^u_{t,\psi,f} : \Omega^u(\mathcal{F}) \to \Omega^u(\mathcal{F}), u = 0, \ldots, n$ и $C_{t,\psi,f} : \Omega(\mathcal{F}) \to \Omega(\mathcal{F})$ по формулам

$$C^u_{t,\psi,f} = T_f \circ \psi(t\Delta^u_{\mathcal{F}})^2, \quad C_{t,\psi,f} = T_f \circ \psi(t\Delta_{\mathcal{F}})^2.$$

Предположим, что оператор $\psi(t\Delta^u_{\mathcal{F}})^2 : \Omega^u(\mathcal{F}) \to \Omega^u(\mathcal{F})$ является послойно сглаживающим оператором, оператор $C^u_{t,\psi,f} : \Omega^u(\mathcal{F}) \to \Omega^u(\mathcal{F})$ принадлежит алгебре $\mathcal{K}(X, X^0, \Lambda^u(T\mathcal{F}))$, и поэтому существует регуляризованный след $\text{r-Tr}(C^u_{t,\psi,f})$. Формула (3) определяет сглаженную регуляризованную функцию Лефшеца $L_{t,\psi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Перепишем эту формулу в виде

$$\langle L_{t,\psi}, f\rangle = \text{r-Tr}^s(C_{t,\psi,f}),$$

где $\text{r-Tr}^s(C_{t,\psi,f})$ — регуляризованный суперслед оператора $C_{t,\psi,f}$:

$$\text{r-Tr}^s(C_{t,\psi,f}) = \sum_{u=0}^{n-1} (-1)^u \, \text{r-Tr}\left(C^u_{t,\psi,f}\right).$$

Явное вычисление функции $L_{t,\psi}$ представляется достаточно сложной задачей даже в конкретном примере, описанном в параграфе 4.1. В настоящей работе мы делаем только первый шаг в этом вычислении, а именно, мы доказываем существование функции $L_{t,\psi}$ и вычисляем ее производную по t в данном случае. Результаты вычисления для произвольной функции ψ приведены в предложении 6. Более конкретная формула получается в случае, когда $\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, то есть, когда оператор $C_{t,\psi,f}$ имеет вид

$$C_{t,\psi,f} = B_{t,f} := T_f \circ e^{-t\Delta_{\mathcal{F}}},$$

и соответствующая сглаженная регуляризованная функция Лефшеца L_t задается формулой

$$\langle L_t, f\rangle = \text{r-Tr}^s(T_f \circ e^{-t\Delta_{\mathcal{F}}}).$$

Теорема 8. *Пусть $(X, \mathcal{F}, g)$ — компактное риманово многообразие со слоением, описанное в разделе 4.1, и T — поток на X, удовлетворяющий условиям (P1), (P3) и (P4). Тогда для любого $t > 0$ имеет место формула*

$$\frac{1}{2}\langle \frac{d}{dt} L_t, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) f\left(\frac{n}{\alpha}\right), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

где

$$c_n(t) = \int_0^1 \left[h_+\left(t, z - Z\left(\frac{n}{\alpha}, 1, z\right) + n\right) + h_-\left(t, Z\left(-\frac{n}{\alpha}, 1, z\right) - z + n\right)\right] dz,$$

и функции h_+ и h_- задаются формулами

$$h_+(t,k) = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}}\left(\frac{k^3}{4t^2} + \frac{k}{2t} - \frac{k}{4}\right) e^{-\frac{(k+t)^2}{4t}},$$

$$h_-(t,k) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}}\left(\frac{k^3}{4t^2} - \frac{k}{2t} - \frac{k}{4} + 1\right) e^{-\frac{(k+t)^2}{4t}}.$$

В частности, имеем

$$c_0(t)=\int\limits_0^1[h_+(t,0)+h_-(t,0)]\,dz=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{4}}.$$

Оставшаяся часть данного параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Мы будем следовать рассуждениям, приведенным в [1], с некоторыми модификациями, связанными с тем фактом, что функционал регуляризованного следа не обладает следовым свойством.

Мы начнем с общей формулы для производной по t от регуляризованного суперследа оператора $C_{t,\psi,f}$, справедливой для произвольного n-мерного компактного риманова многообразия $(X,\mathcal{F},g)$ со слоением коразмерности 1 и потока T на X, удовлетворяющего условиям (P1), (P3) и (P4) (ср. [1, Lemma 3.3]).

Предложение 1. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\text{r-Tr}^s\,C_{t,\psi,f}=&2\,\text{r-Tr}\left[T_f\circ d^-_{\mathcal{F}}\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal{F}}),\psi(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\circ\delta^+_{\mathcal{F}}\right]+\\&+2\,\text{r-Tr}\left[\psi(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\circ\delta^+_{\mathcal{F}}d^-_{\mathcal{F}},T_f\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\right]-\\&-2\,\text{r-Tr}\left[T_f\circ d^+_{\mathcal{F}}\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal{F}}),\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\circ\delta^-_{\mathcal{F}}\right]-\\&-2\,\text{r-Tr}\left[\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\circ\delta^-_{\mathcal{F}}d^+_{\mathcal{F}},T_f\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\right].\end{aligned}\tag{24}$$

Доказательство. Пространство $\Omega(\mathcal{F})$ представляется в виде прямой суммы $\Omega(\mathcal{F})=\Omega^+(\mathcal{F})\oplus\Omega^-(\mathcal{F})$, где

$$\Omega^+(\mathcal{F})=\bigoplus_{u\text{—четное}}\Omega^u(\mathcal{F}),\quad\Omega^-(\mathcal{F})=\bigoplus_{u\text{—нечетное}}\Omega^u(\mathcal{F}).$$

Соответственно этому разложению, операторы $d_{\mathcal{F}}$, $\delta_{\mathcal{F}}$, $\Delta_{\mathcal{F}}$ можно записать в виде 2×2 блочных матриц:

$$d_{\mathcal{F}}=\begin{pmatrix}0&d^-_{\mathcal{F}}\\d^+_{\mathcal{F}}&0\end{pmatrix},\quad\delta_{\mathcal{F}}=\begin{pmatrix}0&\delta^-_{\mathcal{F}}\\\delta^+_{\mathcal{F}}&0\end{pmatrix},\quad\Delta_{\mathcal{F}}=\begin{pmatrix}\Delta^+_{\mathcal{F}}&0\\0&\Delta^-_{\mathcal{F}}\end{pmatrix}.$$

Запишем $\psi(t\Delta_{\mathcal{F}})$ в блочном виде:

$$\psi(t\Delta_{\mathcal{F}})=\begin{pmatrix}\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})&0\\0&\psi(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\end{pmatrix}.$$

Перемножая операторы $d_{\mathcal{F}}$ и $\delta_{\mathcal{F}}$ в блочном виде, легко показать, что

$$\Delta^+_{\mathcal{F}}=d^-_{\mathcal{F}}\delta^+_{\mathcal{F}}+\delta^-_{\mathcal{F}}d^+_{\mathcal{F}};\quad\Delta^-_{\mathcal{F}}=d^+_{\mathcal{F}}\delta^-_{\mathcal{F}}+\delta^+_{\mathcal{F}}d^-_{\mathcal{F}}.$$

Получим:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\text{r-Tr}^s\,C_{t,\psi,f}=&2\,\text{r-Tr}^s\left(T_f\circ\Delta_{\mathcal{F}}\circ\psi'(t\Delta_{\mathcal{F}})\circ\psi(t\Delta_{\mathcal{F}})\right)=\\=&2\,\text{r-Tr}\left(T_f\circ(d^-_{\mathcal{F}}\delta^+_{\mathcal{F}}+\delta^-_{\mathcal{F}}d^+_{\mathcal{F}})\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\circ\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\right)-\\&-2\,\text{r-Tr}\left(T_f\circ(d^+_{\mathcal{F}}\delta^-_{\mathcal{F}}+\delta^+_{\mathcal{F}}d^-_{\mathcal{F}})\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\circ\psi(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\right).\end{aligned}$$

Так как операторы $d^-_{\mathcal{F}}$ и T^*_s коммутируют, имеет место равенство:

$$I_1:=\text{r-Tr}\left(T_f\circ d^-_{\mathcal{F}}\delta^+_{\mathcal{F}}\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\circ\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\right)=\text{r-Tr}\left(d^-_{\mathcal{F}}\circ T_f\circ\delta^+_{\mathcal{F}}\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\circ\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})\right).$$

Поскольку $\delta^+_{\mathcal{F}}\circ\Delta^+_{\mathcal{F}}=\Delta^-_{\mathcal{F}}\circ\delta^+_{\mathcal{F}}$ и $d^-_{\mathcal{F}}\circ\Delta^-_{\mathcal{F}}=\Delta^+_{\mathcal{F}}\circ d^-_{\mathcal{F}}$, получаем

$$\begin{aligned}I_1=&\text{r-Tr}\left(d^-_{\mathcal{F}}\circ T_f\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\circ\psi(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\circ\delta^+_{\mathcal{F}}\right)=\\&=\text{r-Tr}\left[T_f\circ d^-_{\mathcal{F}}\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal{F}}),\psi(t\Delta^-_{\mathcal{F}})\circ\delta^+_{\mathcal{F}}\right]+\end{aligned}$$

$$+\,\text{r-Tr}\left[\psi(t\Delta^-_{\mathcal F})\circ\delta^+_{\mathcal F}d^-_{\mathcal F}, T_f\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal F})\right]+\text{r-Tr}\left(T_f\circ\delta^+_{\mathcal F}d^-_{\mathcal F}\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal F})\circ\psi(t\Delta^-_{\mathcal F})\right).$$

Аналогично можно показать, что

$$I_2 := \text{r-Tr}\left(T_f\circ d^+_{\mathcal F}\delta^-_{\mathcal F}\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal F})\circ\psi(t\Delta^-_{\mathcal F})\right) = \text{r-Tr}\left(d^+_{\mathcal F}\circ T_f\circ\delta^-_{\mathcal F}\circ\psi'(t\Delta^-_{\mathcal F})\circ\psi(t\Delta^-_{\mathcal F})\right).$$

Поскольку $\delta^-_{\mathcal F}\circ\Delta^-_{\mathcal F}=\Delta^+_{\mathcal F}\circ\delta^-_{\mathcal F}$ и $d^+_{\mathcal F}\circ\Delta^+_{\mathcal F}=\Delta^-_{\mathcal F}\circ d^+_{\mathcal F}$, получаем

$$\begin{aligned}I_2 = \text{r-Tr}\left(d^+_{\mathcal F}\circ T_f\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\psi(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\delta^-_{\mathcal F}\right) &=\\ = \text{r-Tr}\left[T_f\circ d^+_{\mathcal F}\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal F}),\psi(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\delta^-_{\mathcal F}\right] &+\\ +\,\text{r-Tr}\left[\psi(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\delta^-_{\mathcal F}d^+_{\mathcal F}, T_f\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal F})\right]+\text{r-Tr}\left(T_f\circ\delta^-_{\mathcal F}d^+_{\mathcal F}\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\psi(t\Delta^+_{\mathcal F})\right)&.\end{aligned}$$

□

В ситуации, описанной в теореме 8, послойный комплекс де Рама имеет вид

$$0\longrightarrow\Omega^0(\mathcal F)\xrightarrow{d_{\mathcal F}}\Omega^1(\mathcal F)\longrightarrow 0.$$

Поэтому имеем

$$d^+_{\mathcal F}=d_{\mathcal F}:\Omega^0(\mathcal F)\longrightarrow\Omega^1(\mathcal F),\quad d^-_{\mathcal F}=0,\quad \delta^-_{\mathcal F}=d^*_{\mathcal F}:\Omega^1(\mathcal F)\longrightarrow\Omega^0(\mathcal F),\quad \delta^+_{\mathcal F}=0.$$

$$\Delta^+_{\mathcal F}=d^*_{\mathcal F}d_{\mathcal F}:\Omega^0(\mathcal F)\longrightarrow\Omega^0(\mathcal F),\quad \Delta^-_{\mathcal F}=d_{\mathcal F}d^*_{\mathcal F}:\Omega^1(\mathcal F)\longrightarrow\Omega^1(\mathcal F).$$

Формула (24) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\text{r-Tr}^s\,C_{t,\psi,f} = 2\,\text{r-Tr}\left[T_f\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal F}),\psi(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\Delta^+_{\mathcal F}\right] &-\\ -\,2\,\text{r-Tr}\left[T_f\circ d^+_{\mathcal F}\circ\psi'(t\Delta^+_{\mathcal F}),\psi(t\Delta^+_{\mathcal F})\circ\delta^-_{\mathcal F}\right]&. \qquad (25)\end{aligned}$$

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать компактное риманово многообразие со слоением $(X,\mathcal F,g)$ и поток T на X, удовлетворяющий условиям (P1), (P3) и (P4), описанные в разделе 4.1.

4.3. Послойно сглаживающие операторы. Для описания послойно сглаживающих операторов на многообразии со слоением $(X,\mathcal F)$ мы будем использовать представление $X=\widehat X/\mathbb Z$ и соответствующее представление послойно сглаживающих операторов на $(X,\mathcal F)$ как $\mathbb Z$-инвариантных послойно сглаживающих операторов на $(\widehat X,\widehat{\mathcal F})$.

Рассмотрим множество

$$\widehat{\mathcal R}=\{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in\widehat X\times\widehat X:(y_1,z_1)\sim_{\mathcal F}(y_2,z_2)\}.$$

Топология на $\widehat{\mathcal R}$ определяется следующим образом. Множество $\widehat{\mathcal R}$ представляется в виде дизъюнктного объединения $\widehat{\mathcal R}=\widehat{\mathcal R}_1\bigsqcup\widehat{\mathcal R}_2$, где $\widehat{\mathcal R}_1=\{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in\widehat{\mathcal R}:y_1\neq 1,y_2\neq 1\}$ гомеоморфно $(-1,1)\times(-1,1)\times(0,+\infty)$, $\widehat{\mathcal R}_2=\{(1,z_1,1,z_2):z_1,z_2\in\mathbb R\}\cong\mathbb R^2$ и последовательность $(y_1^{(n)},z_1^{(n)},y_2^{(n)},z_2^{(n)})\in\widehat{\mathcal R}_1$ сходится к $(1,z_1,1,z_2)\in\widehat{\mathcal R}_2$ тогда и только тогда, когда она сходится в $\widehat X\times\widehat X$, и при достаточно больших n точки $(y_1^{(n)},z_1^{(n)})$ и $(y_2^{(n)},z_2^{(n)})$ лежат в одной и той же (зависящей от n) компоненте связности множества $\widehat X\setminus(\{0\}\times\mathbb R\cup\{1\}\times\mathbb R)$ (последнее условие также эквивалентно тому, что расстояние между этими точками вдоль слоев слоения $\widehat{\mathcal F}$ равномерно ограничено по n).

Предложение 2. *На $\widehat{\mathcal R}$ можно задать структуру гладкого многообразия.*

Доказательство. Атлас на $\widehat{\mathcal R}$ состоит из двух карт. Первая карта ставит в соответствие точке $(y_1,z_1,y_2,z_2)\in U_1=\widehat{\mathcal R}\cap(-1,1)\times\mathbb R\times(-1,1)\times\mathbb R$ ее координаты

$X_1(y_1,z_1,y_2,z_2)=(y_1,y_2,v)\in(-1,1)\times(-1,1)\times(0,+\infty)$, где $v=p(y_1,z_1)=p(y_2,z_2)$. Вторая карта ставит в соответствие точке $(y_1,z_1,y_2,z_2)\in U_2=(\widehat{\mathcal{R}}\cap(0,1]\times\mathbb{R}\times(0,1]\times\mathbb{R})\cup$ $\cup(\widehat{\mathcal{R}}\cap(1,2)\times\mathbb{R}\times(1,2)\times\mathbb{R})$ ее координаты

$$X_2(y_1,z_1,y_2,z_2)=(z_1,z_2,v)\in\{(z_1,z_2,v)\in\mathbb{R}^3:|v|<e^{z_1},|v|<e^{z_2}\},$$

где $v=p(y_1,z_1)=p(y_2,z_2)$. □

Обозначим через $\widehat{L}_{(y_1,z_1)}$ слой, проходящий через точку (y_1,z_1). На каждом слое слоения $\widehat{\mathcal{F}}$ зафиксируем положительную плотность $|dz|$, являющуюся подъемом плотности $|dz|$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ при отображении $\widehat{L}\to\mathbb{R}$, $(y,z)\mapsto z$. Эта плотность является всюду гладкой на $\widehat{L}$, кроме $y=0$.

Послойно сглаживающий оператор $\widehat{K}:C^\infty(\widehat{X})\to C^\infty(\widehat{X})$ задается формулой

$$\widehat{K}u(y_1,z_1)=\int\limits_{\widehat{L}_{(y_1,z_1)}}k(y_1,z_1,y_2,z_2)u(y_2,z_2)|dz_2|.$$

Ядро послойно сглаживающего оператора $\widehat{K}$ задается функцией k на $\widehat{\mathcal{R}}$, удовлетворяющей следующим условиям:

- $k(y_1,z_1+1,y_2,z_2+1)=k(y_1,z_1,y_2,z_2)$.
- Существует такая постоянная C, что $k(y_1,z_1,y_2,z_2)=0$ для любых $(y_1,z_1,y_2,z_2)\in\widehat{\mathcal{R}}$ таких, что $d((y_1,z_1),(y_2,z_2))>C$, где d — послойное расстояние между точками (y_1,z_1) и (y_2,z_2).
- Плотность $k(y_1,z_1,y_2,z_2)|dz_2|$ является гладкой плотностью на $\widehat{L}_{(y_1,z_1)}$, гладко зависящей от $(y_2,z_2)\in\widehat{X}$: для любой функции $u\in C^\infty(\widehat{X})$ функция

$$(y_1,z_1)\in\widehat{X}\mapsto\int\limits_{\widehat{L}_{(y_1,z_1)}}k(y_1,z_1,y_2,z_2)u(y_2,z_2)|dz_2|$$

является гладкой функцией на $\widehat{X}$.

Для любого $(y_1,z_1,z_2)\in(0,2)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ такого, что $z_2\geq\ln|p(y_1,z_1)|$ положим

$$Y_2(y_1,z_1,z_2)=\frac{2}{\pi}\arccos\left(p(y_1,z_1)e^{-z_2}\right). \tag{26}$$

Отметим, что число $Y_2(y_1,z_1,z_2)$ является единственным решением уравнения $p(y_1,z_1)=p(y_2,z_2)$, принадлежащим интервалу $(0,2)$, а число $2-Y_2(y_1,z_1,z_2)$ является единственным решением уравнения $p(y_1,z_1)=-p(y_2,z_2)$, принадлежащим интервалу $(0,2)$. Пересечение слоя $\widehat{L}_{(y_1,z_1)}$ с координатной окрестностью $(0,2)\times\mathbb{R}$ имеет вид

$$\widehat{L}_{(y_1,z_1)}\cap(0,2)\times\mathbb{R}=\{(Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2):z_2\in(\ln|p(y_1,z_1)|,+\infty)\}\bigcup$$
$$\bigcup\{(Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2):z_2\in(\ln|p(y_1,z_1)|,+\infty)\}.$$

Поэтому в координатах на $(0,2)\times\mathbb{R}$ оператор $\widehat{K}$ можно записать следующим образом:

$$Kb(y_1,z_1)=\int\limits_{\ln|p(y_1,z_1)|}^{+\infty}K_+(z_1,z_2,p(y_1,z_1))b(Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2)|dz_2|+$$
$$+\int\limits_{\ln|p(y_1,z_1)|}^{+\infty}K_-(z_1,z_2,p(y_1,z_1))b(2-Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2)|dz_2|, \tag{27}$$

где функции $K_\pm(z_1, z_2, v)$ определены при $|v| < e^{z_1}, |v| < e^{z_2}$: при $v \neq 0$

$$K_\pm(z_1, z_2, v) = k(y_1, z_1, y_2, z_2),$$

где $y_1, y_2 \in (0, 2)$ — такие, что $p(y_1, z_1) = v$, $p(y_2, z_2) = \pm v$,

$$K_+(z_1, z_2, 0) = k(1, z_1, 1, z_2), \quad K_-(z_1, z_2, 0) = 0.$$

Послойное расстояние $d((y_1, z_1), (y_2, z_2))$ между точками (y_1, z_1) и (y_2, z_2), лежащими на одном слое $\widehat{L}_v = \{(y, z) \in (0, 2) \times \mathbb{R} : p(y, z) = v\}$ слоения $\widehat{\mathcal{F}}$, задается формулой:

$$d((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = d(z_1, z_2) = \int_{\ln|v|}^{z_2} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{v^2 e^{-2z}}{1 - v^2 e^{-2z}}}\, dz \mp \int_{\ln|v|}^{z_1} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{v^2 e^{-2z}}{1 - v^2 e^{-2z}}}\, dz,$$

где берется знак $+$, если точки лежат на одной и той же компоненте пересечения слоя с координатной окрестностью ($p(y_1, z_1) p(y_2, z_2) > 0$), и знак $-$, если точки лежат на разных компонентах пересечения слоя с координатной окрестностью ($p(y_1, z_1) p(y_2, z_2) < 0$).

Условия на k переписываются следующим образом:

- $K_\pm(z_1 + 1, z_2 + 1, v) = K_\pm(z_1, z_2, v)$.
- Существует такая постоянная C, что $K_\pm(z_1, z_2, v) = 0$ для всех (z_1, z_2, v) таких, что $d(z_1, z_2) > C$.
- Функции $K_\pm(z_1, z_2, v)$ являются гладкими при $|v| < e^{z_1}, |v| < e^{z_2}$.

Отметим, что из условия 2) вытекает, что

$$\lim_{v \to 0} K_-(z_1, z_2, v) = 0.$$

Соответствующий оператор на полуплотностях записывается следующим образом: для $\mu = b(y, z)|dy|^{1/2}|dz|^{1/2}$,

$$K\mu = Kb(y, z)|dy|^{1/2}|dz|^{1/2}, \tag{28}$$

где Kb задается формулой (27).

4.4. Оператор $T_f \circ K$. Рассмотрим гладкое подмногообразие коразмерности один $X^0 = \{(y, z) \in X : y = 1\}$.

Теорема 9. *Для любого послойно сглаживающего оператора K и для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор $T_f \circ K$ принадлежит $\mathcal{K}(X, X^0, E)$.*

Для доказательства вычислим ядро оператора $T_f \circ K$ в координатах на $(0, 2) \times \mathbb{R}$. Для $\mu = a(y, z)|dydz|^{1/2}$, обозначая $(T_f \circ K)\mu = (T_f \circ K)a(y, z)|dydz|^{1/2}$, получаем:

$$\begin{aligned}(T_f \circ K)a(y, z) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \int_{\ln|p(y,z)|}^{+\infty} r_\tau(y, z)[K_+(Z(\tau, y, z), z_2, p(Y(\tau, y, z), Z(\tau, y, z)))] \times \\ &\qquad \times a(Y_2(Y(\tau, y, z), Z(\tau, y, z), z_2), z_2)|dz_2|d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \int_{\ln|p(y,z)|}^{+\infty} r_\tau(y, z)[K_-(Z(\tau, y, z), z_2, p(Y(\tau, y, z), Z(\tau, y, z))))] \times \\ &\qquad \times a(2 - Y_2(Y(\tau, y, z), Z(\tau, y, z), z_2), z_2)|dz_2|d\tau.\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $(\tau, z_2) \to (y_2, z_2)$, которая для интеграла, стоящего в первом слагаемом, имеет вид:

$$y_2 = Y_2(Y(\tau, y, z), Z(\tau, y, z), z_2) = Y_2(y, z + \alpha\tau, z_2) \Leftrightarrow \tau(y, z, y_2, z_2) =$$

$$= \int\limits_{p(y,z)}^{p(y_2,z_2)} \frac{dw}{B(w)} = \frac{1}{\alpha}\left(z_2 - z + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right| - \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right|\right),$$

а для интеграла, стоящего в втором слагаемом:

$$y_2 = 2 - Y_2(Y(\tau,y,z), Z(\tau,y,z), z_2) \Leftrightarrow \tau(y,z,y_2,z_2) = \int\limits_{p(y,z)}^{-p(y_2,z_2)} \frac{dw}{B(w)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(z_2 - z + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right| - \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right|\right).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial Y_2(Y(\tau,y,z), Z(\tau,y,z), z_2)}{\partial\tau} = -\frac{2}{\pi}\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}Y_2(Y(\tau,y,z), Z(\tau,y,z), z_2)\right),$$

получаем, что

$$(T_f \circ K)a(y,z) = \frac{\pi}{2|\alpha|}\int\limits_{(0,1)\times\mathbb{R}} f(\tau)r_\tau(y,z)[K_+(Z(\tau,y,z), z_2, p(y_2,z_2))]a(y_2,z_2)\times$$

$$\times\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right||dy_2||dz_2| +$$

$$+\frac{\pi}{2|\alpha|}\int\limits_{(1,2)\times\mathbb{R}} f(\tau)r_\tau(y,z)[K_-(Z(\tau,y,z), z_2, -p(y_2,z_2))]a(y_2,z_2)\times$$

$$\times\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right||dy_2||dz_2|,$$

где

$$\tau(y,z,y_2,z_2) = \frac{1}{\alpha}\left(z_2 - z + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right| - \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right|\right).$$

Ядро k_f оператора $T_f \circ K$ как оператора на X задается формулой:

$$k_f(y,z,y_2,z_2) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tau + \frac{n}{\alpha})r_{\tau+\frac{n}{\alpha}}(y,z)[K_pm(Z(\tau + \frac{n}{\alpha}, y, z), z_2 + n, p(y_2, z_2 + n))]\times$$

$$\times\frac{\pi}{2|\alpha|}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right||dy|^{1/2}|dz|^{1/2}|dy_2|^{1/2}|dz_2|^{1/2}, \quad (29)$$

где $\tau = \tau(y,z,y_2,z_2)$, знак $+$ берется при $p(y,z)p(y_2,z_2) > 0$ и знак $-$ при $p(y,z)p(y_2,z_2) < 0$. Используя данную формулу, нетрудно завершить доказательство теоремы 9.

4.5. Определяющее семейство, ассоциированное с $T_f \circ K$. Чтобы вычислить определяющее семейство, ассоциированное с оператором $T_f \circ K$, сделаем замену переменных $y = 1 + x$, $y_2 = 1 + x_2$ в формуле (29). Поскольку $p(y,z)p(y_2,z_2) = e^{z+z_2}\sin\frac{\pi}{2}x \cdot \sin\frac{\pi}{2}x_2$, знак $p(y,z)p(y_2,z_2)$ совпадает со знаком xx_2. Получаем, что

$$k_f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tau(1+x, z, 1+x_2, z_2+n))r_\tau(1+x,z)\times$$

$$\times[K_\pm(Z(\tau, 1+x, z), z_2 + n, p(Y(\tau, 1+x, z), Z(\tau, 1+x, z)))]\times$$

$$\times\frac{\pi}{2|\alpha|}|x|^{1/2}|x_2|^{1/2}\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)\right|\left|\frac{dx}{x}\right|^{1/2}|dz|^{1/2}\left|\frac{dx_2}{x_2}\right|^{1/2}|dz_2|^{1/2},$$

где при $xx_2 > 0$ берется знак $+$ и при $xx_2 < 0$ — знак $-$.

Сделаем замену переменных $x = x, x_2 = \frac{x}{s}$. Так как $xx_2 = \frac{x^2}{s}$, то знак xx_2 совпадает со знаком s. Функция $\widetilde{K}_f$, определяемая по функции k_f согласно формуле (6), задается формулой

$$\widetilde{K}_f(x,s,z,z_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tau(1+x,z,1+\frac{x}{s},z_2+n))r_\tau(1+x,z)\times \\ \times [K_\pm(Z(\tau,1+x,z),z_2+n,p(Y(\tau,1+x,z),Z(\tau,1+x,z)))]\times \\ \times \frac{\pi}{2|\alpha|}|x||s|^{-1/2}\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\right|,$$

где при $s > 0$ берется знак $+$ и при $s < 0$ — знак $-$.

В пределе $x \to 0$ получаем, что

$$K_+(Z(\tau,1+x,z),z_2+n,p(Y(\tau,1+x,z),Z(\tau,1+x,z))) \to K(z_1,z_2+n,0),$$

и

$$K_-(Z(\tau,1+x,z),z_2+n,p(Y(\tau,1+x,z),Z(\tau,1+x,z))) \to 0.$$

Более того, получаем при $s > 0$, что:

$$\lim_{x\to 0}\tau(1+x,z,1+\frac{x}{s},z_2+n) = \frac{1}{\alpha}(z_2+n-z-\ln s).$$

Поэтому при $s > 0$

$$\widetilde{K}_f(0,s,z,z_2) = \lim_{x\to 0}\widetilde{K}_f(x,s,z,z_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tau_0)r_{\tau_0}(1,z)[K(Z(\tau_0,1,z),z_2+n,0)]\frac{s^{1/2}}{|\alpha|},$$

где $\tau_0 = \frac{1}{\alpha}(z_2+n-z-\ln s)$, и при $s < 0$

$$\widetilde{K}_f(0,s,z,z_2) = 0. \tag{30}$$

Обозначим через E^0 ограничение расслоения E на $X^0 \cong \mathbb{R}$. Расслоение E^0 тривиально, $E^0 \cong X^0 \times \mathbb{C}^N$, причем поток T^E на E индуцирует поток на E^0 с соответствующим отображением $r_t(1,z) : E^0_{Z(t,1,z)} \to E^0_z$.

Ввиду (30), определяющий оператор $I_-(T_f \circ K, \lambda)$ равен нулю.

Ядро определяющего оператора $I_+(T_f \circ K, \lambda)$, действущего в пространстве $C^\infty(S^1, E^0 \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}_{S^1})$, имеет вид:

$$K_{I_+(T_f\circ K,\lambda)}(z,z_2) = \int_0^\infty s^{-i\lambda}\widetilde{K}_f(0,s,z,z_2)\frac{ds}{s} = \\ = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty s^{-i\lambda} f(\tau_0)r_{\tau_0}(1,z)[K(Z(\tau_0,1,z),z_2+n,0)]\frac{s^{1/2}}{|\alpha|}\frac{ds}{s}.$$

Сделав замену переменной $t = \tau_0(z,z_2,s) = \frac{1}{\alpha}(z_2+n-z-\ln s)$, получаем:

$$K_{I_+(T_f\circ K,\lambda)}(z,z_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^\infty e^{(i\lambda-\frac{1}{2})(z-z_2+\alpha t)}f(t)\times \\ \times r_t(1,z)[K(Z(t,1,z),z_2+n,0)]dt|dz|^{1/2}|dz_2|^{1/2}. \tag{31}$$

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим однопараметрическую группу $\{T^{S^1,\lambda}_t : t \in \mathbb{R}\}$ ограниченных операторов в $L^2(S^1, E^0 \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}_{S^1})$ по формуле

$$T^{S^1,\lambda}_t[u(z)|dz|^{1/2}] = e^{(i\lambda-\frac{1}{2})(z-Z(t,1,z)+\alpha t)}r_t(1,z)[u(Z(t,1,z))]|dz|^{1/2}.$$

В скалярном случае имеем $E^0 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $r_t(1, z) = 1$. Мы будем обозначать соответствующую группу операторов через $T_t^{(0),S^1,\lambda}$:

$$T_t^{(0),S^1,\lambda} u(z) = e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - Z(t,1,z) + \alpha t)} u(Z(t, 1, z)). \tag{32}$$

В случае пространства послойных дифференциальных 1-форм $E^0 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, но действие потока задается формулой

$$r_t(1, z) = \frac{\partial Z}{\partial z}(t, 1, z) = e^{\int\limits_0^t A_U(Z(\tau_1,1,z),0)d\tau_1}.$$

Мы будем обозначать соответствующую группу операторов, действующих в пространстве $\Omega^1(S^1)$ гладких дифференциальных 1-форм на S^1, через $T_t^{(0),S^1,\lambda}$:

$$T_t^{(1),S^1,\lambda}(u(z)dz) = e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - Z(t,1,z) + \alpha t)} \frac{\partial Z}{\partial z}(t, 1, z) u(Z(t, 1, z)) dz. \tag{33}$$

Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$T_f^{S^1,\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) T_t^{S^1,\lambda} dt. \tag{34}$$

Ограничение оператора K на $L_0 = \{(y, z) : y = 1\} \cong S^1$ есть интегральный оператор K_{S^1} в пространстве $L^2(S^1, E \otimes \Omega_{S^1}^{\frac{1}{2}})$ с ядром

$$k_{S^1}(z, z_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} K(z, z_2 + n, 0) |dz|^{1/2} |dz_2|^{1/2}.$$

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим интегральный оператор $K_{S^1}(\lambda)$ в пространстве $L^2(S^1, E^0 \otimes \Omega_{S^1}^{\frac{1}{2}})$ с ядром

$$k_{S^1,\lambda}(z, z_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - z_2 - n)} K(z, z_2 + n, 0) |dz|^{1/2} |dz_2|^{1/2}.$$

Предложение 3. *Для любого послойно сглаживающего оператора K определяющее семейство $I_+(T_f \circ K, \lambda) : C^\infty(S^1, E^0 \otimes \Omega_{S^1}^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(S^1, E^0 \otimes \Omega_{S^1}^{\frac{1}{2}})$ задается формулой*

$$I_+(T_f \circ K, \lambda) = T_f^{S^1,\lambda} \circ K_{S^1}(\lambda). \tag{35}$$

4.6. Определяющее семейство, ассоциированное с K. В этом параграфе мы введем понятие определяющего семейства, ассоциированного с послойно сглаживающим оператором K, таким образом, чтобы был справедлив аналог теоремы 4 (см. ниже предложение 4).

Определение 6. *Определяющее семейство*

$$I_+(K, \lambda) : C^\infty(S^1, E^0 \otimes \Omega_{S^1}^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(S^1, E^0 \otimes \Omega_{S^1}^{\frac{1}{2}}),$$

ассоциированное с послойно сглаживающим оператором K, определяется по формуле:

$$I_+(K, \lambda) = K_{S^1}(\lambda). \tag{36}$$

Ядро оператора $I_+(K, \lambda)$ задается формулой:

$$K_{I_+(K,\lambda)}(z, z_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - z_2 - n)} K(z, z_2 + n, 0) |dz|^{1/2} |dz_2|^{1/2}. \tag{37}$$

Предложение 4. *Пусть K_1, K_2 — послойно сглаживающие операторы. Тогда справедлива формула:*

$$\text{r-Tr}[T_f \circ K_1, K_2] = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I_+(T_f \circ K_1, \lambda) \circ I_+(K_2, \lambda)) d\lambda. \tag{38}$$

Доказательство предложения 4 приведено в приложении А.

Обозначим через $T_f^{(0)}$ (соотв. $T_f^{(1)}$) оператор, действующий в пространстве $\Omega^0(\mathcal{F})$ (соотв. $\Omega^1(\mathcal{F})$) по формуле (23). Согласно предложению 4 формула (25) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\text{r-Tr}^s\, C_{t,\psi,f} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr}(I_+(T_f^{(0)} \circ \psi'(t\Delta_{\mathcal{F}}^+), \lambda) \circ \partial_\lambda I_+(\psi(t\Delta_{\mathcal{F}}^+) \circ \Delta_{\mathcal{F}}^+, \lambda)) d\lambda -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr}(I_+(T_f^{(1)} \circ d_{\mathcal{F}}^+ \circ \psi'(t\Delta_{\mathcal{F}}^+), \lambda) \circ \partial_\lambda I_+(\psi(t\Delta_{\mathcal{F}}^+) \circ \delta_{\mathcal{F}}^-, \lambda)) d\lambda. \tag{39}$$

Следующей задачей является вычисление определяющих семейств, входящих в формулу (39).

4.7. Оператор $\psi(t\Delta_{\mathcal{F}}^+)$ и его определяющее семейство. В этом параграфе мы дадим описание оператора $\psi(t\Delta_{\mathcal{F}}^+)$ как послойно сглаживающего оператора и вычислим определяющее семейство, ассоциированное с данным оператором.

Прежде всего, мы дадим описание различных объектов, ассоциированных со слоением $\mathcal{F}$. Рассмотрим координатную окрестность $\widetilde{X} = (0,2) \times \mathbb{R}$ с координатами (y,z) или с расслоенными координатами (u,v), задаваемыми формулами (19). Тогда касательное пространство $T\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}$ порождается вектором $\frac{\partial}{\partial u}$, определяемым по формуле (21). Послойный дифференциал де Рама $d_{\mathcal{F}} : \Omega^0(\mathcal{F}) \to \Omega^1(\mathcal{F})$ имеет вид:

$$d_{\mathcal{F}} f = \frac{\partial f}{\partial u}(y,z) du = \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\right) f(y,z) du,$$

где $du \in \Omega^1(\mathcal{F})$ определяется условием $\langle du, \frac{\partial}{\partial u}\rangle = 1$.

Послойная риманова метрика $g_{\mathcal{F}}$, индуцированная стандартной римановой метрикой $g = dy^2 + dz^2$, имеет вид:

$$g_{\mathcal{F}}(y,z) = G(y,z) du^2, \quad G(y,z) = \frac{4\operatorname{ctg}^2(\frac{\pi}{2}y) + \pi^2}{\pi^2}.$$

Легко проверить, что послойный кодифференциал де Рама $d_{\mathcal{F}}^* : \Omega^1(\mathcal{F}) \to \Omega^0(\mathcal{F})$ задается формулой

$$d_{\mathcal{F}}^*(g du) = -G(y,z)^{-1}\frac{\partial g}{\partial u} + h(y) g, \tag{40}$$

где

$$h(y) = -\frac{d}{dy}\left(\frac{2\pi\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{4\operatorname{ctg}^2(\frac{\pi}{2}y) + \pi^2}\right) = -\frac{\pi^2}{\sin^2\frac{\pi}{2}y}\frac{4\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}y - \pi^2}{(4\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}y + \pi^2)^2}.$$

Отсюда следует, что послойный лапласиан $\Delta_{\mathcal{F}}^+ : \Omega^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^0(\mathcal{F})$ имеет вид:

$$\Delta_{\mathcal{F}}^+ = -G(y,z)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + h(y)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Слои слоения $\widetilde{\mathcal{F}}$ можно параметризовать числами $v \in [0,\infty)$. Слой $\widehat{L}_v$, соответствующий $v \in [0,\infty)$, в координатной окрестности $\tilde{X}$ имеет вид

$$\widehat{L}_v = \{(y,z) \in (0,2) \times \mathbb{R} : |p(y,z)| = v\}.$$

Проекция $(y,z)\mapsto z$ отождествляет пересечение слоя $\widehat{L}_v$ с координатной окрестностью $(0,2)\times\mathbb{R}$ с дизъюнктным объединением двух копий полуоси $(\ln|v|,+\infty)$. Поэтому имеет место разложение

$$L^2(\widehat{L}_v)\cong L^2(\mathbb{R},\sqrt{G(u,v)}du)\oplus L^2(\mathbb{R},\sqrt{G(u,v)}du).$$

Как и выше, пусть ψ — такая гладкая функция на $\mathbb{R}$, что функция $\phi(x)=\psi(x^2)$ принадлежит классу $\mathcal{A}$. Тогда можно определить оператор $\psi(t\Delta_v)$ как ограниченный оператор в пространстве $L^2(\widehat{L}_v)$ для любого $v\in[0,\infty)$ и оператор $\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})$ как ограниченный оператор в пространстве $L^2(\widehat{X})$ (см. [8, 15]).

Оператор $\psi(t\Delta_v)$ записывается следующим образом: для $f=f_+\oplus f_-\in L^2(\mathbb{R},\sqrt{G(u,v)}du)\oplus L^2(\mathbb{R},\sqrt{G(u,v)}du)$ имеем

$$\psi(t\Delta_v)f_\pm(u_1)=\int\limits_{\ln|v|}^{+\infty}(K^+_\psi(t,u_1,u_2,v)f_\pm(u_2)+K^-_\psi(t,u_1,u_2,v)f_\mp(u_2))\sqrt{G(u_2,v)}du_2.$$

Следующее предложение является непосредственным следствием общих результатов, доказанных в [8, 15].

Предложение 5. *(1) Действие оператора $\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})$ на функцию $b\in C^\infty((0,2)\times\mathbb{R})$ задается формулой*

$$\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})b(y_1,z_1)=\int\limits_{\ln|p(y_1,z_1)|}^{+\infty}\Big(K^+_\psi(t,z_1,z_2,p(y_1,z_1))b(Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2)+$$
$$+K^-_\psi(t,z_1,z_2,p(y_1,z_1))b(2-Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2)\Big)\sqrt{G(z_2,p(y_1,z_1))}|dz_2|.$$

(2) Ядро K_ψ оператора $\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})$ является гладкой функцией на $\widehat{\mathcal{R}}$.

Как показано в [15], если преобразование Фурье функции $\phi(x)=\psi(x^2)$ финитно (заметим, что по теореме Пэли-Винера такая функция ϕ принадлежит классу $\mathcal{A}$), то для любого $t>0$ существует такая постоянная C, что $K^\pm_\psi(t,z_1,z_2,v)=0$ для всех (z_1,z_2,v) таких, что $d(z_1,z_2)>C$. Поэтому, в этом случае оператор $\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})$ является послойно сглаживающим оператором с ядром

$$K_\pm(t,z_1,z_2,v)=K^\pm_\psi(t,z_1,z_2,v)\sqrt{G(Y_2(y_1,z_1,z_2),z_2)}.$$

По определению, оператор $\psi(t\Delta^+_{\mathcal{F}})_{S^1}(\lambda)$ является интегральным оператором на S^1 с ядром

$$k_{S^1,\lambda}(z_1,z_2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{(i\lambda-\frac12)(z_1-z_2-n)}K_\psi(t,z_1,z_2+n,0)|dz_1|^{1/2}|dz_2|^{1/2}. \qquad (41)$$

Легко проверить, что $h(1)=1$. Следовательно, при $v=0$ (или $y=1$)

$$d^*_{\mathcal{F}}(gdu)=-\frac{\partial g}{\partial z}+g,\quad \Delta^+_0=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поэтому, оператор $\psi(t\Delta^+_0)$ является псевдодифференциальным оператором с полным символом $\psi(t(\xi^2+i\xi))$:

$$\psi(t\Delta^+_0)f(z)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i(z-z_1)\xi}\psi(t(\xi^2+i\xi))f(z_1)dz_1d\xi.$$

Ядро $K_\psi(t,z_1,z_2,0)$ оператора $\psi(t\Delta_0^+)$ задается формулой

$$K_\psi(t,z_1,z_2,0)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i(z_1-z_2)\xi}\psi(t(\xi^2+i\xi))d\xi.$$

Поскольку $\psi(t(\xi^2+i\xi))=\psi(t[(\xi+\frac{i}{2})^2+\frac{1}{4}])$, функция $\xi\mapsto\psi(t(\xi^2+i\xi))$ принадлежит пространству Шварца S, и, следовательно, интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, сходится абсолютно. По формуле (41) получаем

$$I_+(\psi(t\Delta_{\mathcal F}^+),\lambda)=(\psi(t\Delta_{\mathcal F}^+))_{S^1}(\lambda)=\psi\left(t\left((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4}\right)\right). \tag{42}$$

Непосредственным вычислением можно показать, что для послойно сглаживающего оператора $K:C^\infty(X)\to C^\infty(X)$

$$I_+(T_f^{(1)}\circ d_{\mathcal F}\circ K,\lambda)=\left(iD_z-i\lambda+\frac{1}{2}\right)\circ I_+(T_f\circ K,\lambda),$$

и для послойно сглаживающего оператора $K:\Omega^1(\mathcal F)\to\Omega^1(\mathcal F)$

$$I_+(T_f\circ K\circ d_{\mathcal F}^*,\lambda)=I_+(T_f\circ K,\lambda)\circ\left(-iD_z+i\lambda+\frac{1}{2}\right).$$

Используя приведенные выше вычисления определяющих семейств, из формулы (39) получаем следующее утверждение.

Предложение 6. *Если преобразование Фурье функции $\phi(x)=\psi(x^2)$ финитно, то для любых $t>0$ и $f\in C_0^\infty(\mathbb R)$ функция $\operatorname{r-Tr}^s C_{t,\psi,f}$ корректно определена и имеет место формула*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\operatorname{r-Tr}^s C_{t,\psi,f}=&-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{(0),S^1,\lambda}\circ\psi'\left(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})\right)\circ\\&\circ 2t\psi'\left(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})\right)(D_z-\lambda)((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})d\lambda-\\&-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{(0),S^1,\lambda}\circ\psi'\left(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})\right)\circ\\&\circ 2\psi(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4}))(D_z-\lambda)d\lambda+\\&+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{(1),S^1,\lambda}\circ(iD_z-i\lambda+\frac{1}{2})\psi'(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4}))\circ\\&\circ 2t\psi'\left(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})\right)(D_z-\lambda)(-iD_z+i\lambda+\frac{1}{2})d\lambda-\\&-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{(1),S^1,\lambda}\circ(iD_z-i\lambda+\frac{1}{2})\psi'(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4}))\circ\\&\circ i\psi(t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4}))d\lambda.\end{aligned}\tag{43}$$

В частном случае, когда $\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, формула (43) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\text{r-Tr}^s\,B_{t,f} =$$

$$= -\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}\left(T_f^{(0),S^1,\lambda}\circ e^{-t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})}(D_z-\lambda)((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})\right)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{(0),S^1,\lambda}\circ e^{-t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})})(D_z-\lambda)d\lambda +$$

$$+\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}\left(T_f^{(1),S^1,\lambda}\circ e^{-t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})}(D_z-\lambda)((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})\right)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{(1),S^1,\lambda}\circ(-(D_z-\lambda)+\frac{i}{2})e^{-t((D_z-\lambda)^2+\frac{1}{4})}\circ d\lambda. \quad (44)$$

Отметим, что в данном случае преобразование Фурье функции $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ не является финитной функцией, поэтому предложение 6 непосредственно не применимо. Выражение, стоящее в правой части формулы (43), непрерывно зависит от ψ в топологии пространства Шварца и может служить в качестве определения функции $\text{r-Tr}^s\,C_{t,\psi,f}$ в случае, когда ψ не удовлетворяет условиям предложения 6, в частности, когда $\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. Другими словами, как в [1, 15], мы может взять произвольную последовательность $\psi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что для любого n преобразование Фурье функции $\phi_n(x) = \psi_n(x^2)$ финитно и ψ_n сходится к $e^{-\frac{x^2}{2}}$ в топологии пространства Шварца и положить по определению $\text{r-Tr}^s\,B_{t,f} = \lim_{n\to\infty}\text{r-Tr}^s\,C_{t,\psi,f}$.

Тем самым, доказательство теоремы 8 сводится к вычислению интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(T_f^{S^1,\lambda}\circ\phi(D_z-\lambda))d\lambda$, приведенному в приложении B. Использование результатов приложения B немедленно позволяет вычислить выражение, стоящее в правой части формулы (44), и завершить доказательство теоремы 8.

4.8. Потоки на расслоенных многообразиях. В этом разделе, в качестве иллюстрации, мы опишем аналоги введенных выше понятий для примера потоков на расслоенных многообразиях, рассмотренного в разделе 3. Будем использовать обозначения, введенные в параграфе 3.

Пусть K — послойно сглаживающий оператор в пространстве $C^\infty(X, E\otimes\Omega_X^{\frac{1}{2}})$, задаваемый ядром $k \in C^\infty(X\times_\pi X, \mathcal{L}(E)\otimes|\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}}\otimes|\mathcal{V}|^{\frac{1}{2}})$. Прежде всего, по формуле (17) имеем: при $s>0$

$$\widetilde{K}_f(0,s,x^0,x_1^0) = \lim_{x\to 0}\widetilde{K}_f(x,s,x^0,x_1^0) = f(-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s)r_{-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s}(x^0,\alpha_j)\times$$
$$\times k(S_{-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s}(x^0,\alpha_j),x_1^0,\alpha_j)|w(x^0,\alpha_j)|^{1/2}|w(x_1^0,\alpha_j)|^{\frac{1}{2}}\frac{s^{1/2}}{|a'(\alpha_j)|},$$

и при $s<0$

$$\widetilde{K}_f(0,s,x^0,x_1^0) = 0, \quad x^0, x_1^0 \in F_{\alpha_j}.$$

Поэтому, ядро определяющего оператора $I_+(T_f\circ K,\lambda)$ задается формулой

$$K_{I_+(T_f\circ K,\lambda)}(x^0,x^0_1)=\int\limits_0^\infty s^{-i\lambda}\widetilde{K}_f(0,s,x^0,x^0_1)\frac{ds}{s}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty} s^{-i\lambda}f\Big(-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s\Big)r_{-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s}(x^0,\alpha_j)k(S_{-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s}(x^0,\alpha_j),x^0_1,\alpha_j)\times$$

$$\times|w(x^0,\alpha_j)|^{1/2}|w(x^0_1,\alpha_j)|^{\frac12}\frac{s^{1/2}}{|a'(\alpha_j)|}\frac{ds}{s}|dx^0|^{\frac12}|dx^0_1|^{\frac12},\quad x^0,x^0_1\in F_{\alpha_j}.$$

Сделав замену $t=-\frac{1}{a'(\alpha_j)}\ln s$ в последнем интеграле, получим

$$K_{I_+(T_f\circ K,\lambda)}(x^0,x^0_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ia'(\alpha_j)\lambda t}e^{-\frac12 a'(\alpha_j)t}f(t)r_t(x^0,\alpha_j)\times$$

$$\times k[S_t(x^0,\alpha_j),x^0_1,\alpha_j]|w(x^0,\alpha_j)|^{1/2}|w(x^0_1,\alpha_j)|^{\frac12}dt|dx^0|^{\frac12}|dx^0_1|^{\frac12}. \quad (45)$$

Поскольку $\widetilde{K}_f(0,s,x^0,x^0_1)=0$ при $s<0$, получаем $I_-(T_f\circ K,\lambda)=0$.

Дадим описание самого оператора $I_+(T_f\circ K,\lambda)$. Поскольку каждое α_j является неподвижной точкой потока $\bar T$, поток T переводит слой F_{α_j} в себя. Обозначим через $E^{(\alpha_j)}$ ограничение расслоения E на слой F_{α_j}, через $T^{(\alpha_j)}$ ограничение потока T на F_{α_j} и через $r^{(\alpha_j)}_t : E^{(\alpha_j)}_{T^{(\alpha_j)}_t(x)}\to E^{(\alpha_j)}_x$ — отображение, задаваемое отображением r_t. Пусть $(T^{(\alpha_j)}_t)^*$ — оператор в пространстве $C^\infty(F_{\alpha_j},E^{(\alpha_j)})$, индуцированный потоком T:

$$(T^{(\alpha_j)}_t)^*u(x)=r^{(\alpha_j)}_t(x)[u(T^{(\alpha_j)}_t(x))].$$

Для любой функции $g\in C^\infty_0(\mathbb{R})$ определим оператор $T^{(\alpha_j)}_g$ в пространстве $C^\infty(F_{\alpha_j},E^{(\alpha_j)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_{\alpha_j}})$ по формуле: для $\mu=u|d\alpha_{\alpha_j}|^{1/2}$

$$T^{(\alpha_j)}_g=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)(T^{(\alpha_j)}_t)^*u\,dt\right)|d\alpha_{\alpha_j}|^{1/2}.$$

Для любого $\alpha\in S^1$ естественно определяется ограничение оператора K на слой F_α как интегральный оператор $K(\alpha)$ в пространстве $C^\infty(F_\alpha,E^{(\alpha)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_\alpha})$.

Имеет место формула

$$C^\infty(X^0,E_{X^0}\otimes\Omega^{\frac12}_{X^0})=\bigoplus_{j=1}^k C^\infty(F_{\alpha_j},E^{(\alpha_j)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_{\alpha_j}}).$$

Используя формулы (13) и (45), легко показать, что оператор $I_+(T_f\circ K,\lambda)$ переводит каждое подпространство $C^\infty(F_{\alpha_j},E^{(\alpha_j)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_{\alpha_j}})$ в себя, и его ограничение на $C^\infty(F_{\alpha_j},E^{(\alpha_j)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_{\alpha_j}})$ имеет вид

$$I_+(T_f\circ K,\lambda)\Big|_{C^\infty(F_{\alpha_j},E^{(\alpha_j)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_{\alpha_j}})}=T^{(\alpha_j)}_{f^{(\alpha_j)}_\lambda}\circ K(\alpha_j), \quad (46)$$

где $f^{(\alpha_j)}_\lambda(t)=e^{ia'(\alpha_j)\lambda t}e^{-\frac12 a'(\alpha_j)t}f(t)$.

В данном случае можно доказать аналог предложения 4 при помощи того же самого метода, что был использован при доказательстве этого предложения выше в данном параграфе. В частности, определяющее семейство $I_+(K,\lambda)$, ассоциированное с послойно сглаживающим оператором $K : C^\infty(X, E\otimes\Omega_X^{\frac12}) \to C^\infty(X, E\otimes\Omega_X^{\frac12})$, определяется по формуле:

$$I_+(K,\lambda) = K_{X^0}.$$

Здесь K_{X^0} — ограничение оператора K на X^0. Этот оператор переводит каждое подпространство $C^\infty(F_{\alpha_j}, E^{(\alpha_j)}\otimes\Omega^{\frac12}_{F_{\alpha_j}})$ в себя, и его ограничение на это подпространство совпадает с $K(\alpha_j)$.

Тем самым, в данном случае определяющее семейство $I(K,\lambda)$ не зависит от λ. Поэтому, согласно аналогу предложения 4 в данном случае, получаем для любых послойно сглаживающих операторов K_1 и K_2

$$\text{r-Tr}[T_f\circ K_1, K_2] = 0.$$

Согласно этому факту, из (24) следует, что $\text{r-Tr}^s\, C_{t,\psi,f}$ не зависит от t:

$$\frac{d}{dt}\,\text{r-Tr}^s\, C_{t,\psi,f} = 0.$$

A. Доказательство предложения 4

Предположим, что функция $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям: g — четная функция, $g(s)\geq 0$ для любого s, $\operatorname{supp} g\subset(-1,1)$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s)ds = 1$. Для любого натурального m положим $g_m(t) = mg(mt)$. Оператор $T_{g_m}\circ K_2$ принадлежит классу $\mathcal{K}(X,X^0)$, поэтому справедлива формула

$$\text{r-Tr}[T_f\circ K_1, T_{g_m}\circ K_2] = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)\circ I_+(T_{g_m}\circ K_2,\lambda))d\lambda. \qquad (47)$$

Покажем теперь, что при $m\to\infty$ левая и правая части формулы (47) стремятся соответственно к левой и правой частям формулы (38). Разность R_m правых частей формул (47) и (38) записывается в виде:

$$R_m = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)\circ(I_+(T_{g_m}\circ K_2,\lambda) - I_+(K_2,\lambda))d\lambda.$$

Используя свойства ядерных операторов, получаем

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)\|_2\cdot\|I_+(T_{g_m}\circ K_2,\lambda) - I_+(K_2,\lambda)\|_2 d\lambda, \qquad (48)$$

где $\|A\|_2 = \operatorname{tr}(A^*A)$ — норма Гильберта-Шмидта оператора A.

Используя формулы (31) и (37), легко доказать следующую оценку:

$$\sup_{z,z_2} |K_{I_+(T_{g_m}\circ K_2,\lambda)}(z,z_2) - K_{I_+(K_2,\lambda)}(z,z_2)| \leqslant C_1\frac{|\lambda|}{m}.$$

Отсюда следует, что

$$\|I_+(T_{g_m}\circ K_2,\lambda) - I_+(K_2,\lambda)\|_2 =$$
$$= \left(\int_0^1\int_0^1 |K_{I_+(T_{g_m}\circ K_2,\lambda)}(z,z_2) - K_{I_+(K_2,\lambda)}(z,z_2)|^2 dz dz_2\right)^{1/2} \leqslant C_1\frac{|\lambda|}{m}.$$

Поэтому, согласно (48), получаем

$$|R_m| \leqslant \frac{C_2}{m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\partial_\lambda I_+(T_f \circ K_1, \lambda)\|_2 |\lambda| d\lambda. \tag{49}$$

Ядро оператора $\partial_\lambda I_+(T_f \circ K_1, \lambda)$ как оператора на $\mathbb{R}$ имеет вид

$$K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z, z_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - z_2 + \alpha t)} i(z - z_2 + \alpha t) f(t) \times r_t(1, z)[K(Z(t, 1, z), z_2, 0)] dt.$$

Рассмотрим функцию $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, задаваемую формулой

$$h(z, z_2, t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha t} i(z - z_2 + \alpha t) f(t) r_t(1, z)[K(Z(t, 1, z), z_2, 0)].$$

Заметим, что

$$K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z, z_2) = e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - z_2)} \hat{h}(z, z_2, \alpha\lambda),$$

где $\hat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье функции h по переменной t. Легко видеть, что существует такая постоянная $d > 0$, что $h(z, z_2, t) = 0$ при $|z - z_2| > d$ или $|t| > d$, и $h(z + 1, z_2 + 1, t) = h(z, z_2, t)$ для любых z, z_2, t. Поэтому, $K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z, z_2) = 0$ при $|z - z_2| > d$, $K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z + 1, z_2 + 1) = K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z, z_2)$ для любых z, z_2, λ и при $\lambda \to \infty$ ядро $K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z, z_2)$ стремится к нулю быстрее любой степени λ равномерно по z, z_2: для любого N

$$\sup_{z,z_2,\lambda} (1 + \lambda^2)^N \left| K_{\partial_\lambda I_+(T_f\circ K_1,\lambda)}(z, z_2) \right| < \infty$$

Следовательно, при $\lambda \to \infty$ норма Гильберта-Шмидта оператора $\partial_\lambda I_+(T_f \circ K_1, \lambda)$ в $L^2(S^1)$ стремится к нулю быстрее любой степени λ: для любого N

$$\sup_{x,y,\lambda} (1 + \lambda^2)^N \|\partial_\lambda I_+(T_f \circ K_1, \lambda)\|_2 < \infty.$$

Поэтому интеграл, стоящий в правой части неравенства (49), сходится, и согласно (49) получаем, что $|R_m| \to 0$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим левую часть формулы (47). Покажем, что $\text{r-Tr}(T_f \circ K_1 \circ T_{g_m} \circ K_2)$ сходится к $\text{r-Tr}(T_f \circ K_1 \circ K_2)$ и $\text{r-Tr}(T_{g_m} \circ K_2 \circ T_f \circ K_1)$ сходится к $\text{r-Tr}(K_2 \circ T_f \circ K_1)$ при $m \to \infty$. Из формулы (29) следует, что ограничение ядра оператора $T_f \circ K_1 \circ T_{g_m} \circ K_2$ на диагональ представляется в виде (при $p(y, z) > 0 \Leftrightarrow y \in (0, 1)$):

$$\begin{aligned}
&k_{T_f\circ K_1\circ T_{g_m}\circ K_2} |_\Delta (y, z, y, z) = \\
&= \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \sum_{n,n_2\in\mathbb{Z}} \Bigg(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(\tau + \frac{n}{\alpha}) r_{\tau+\frac{n}{\alpha}}(y, z)[K_{1+}(Z(\tau + \frac{n}{\alpha}, y, z), z_2 + n, p(y_2, z_2 + n))] \times \\
&\times \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} y_2\right) \right| g_m(\tau_1 + \frac{n_2}{\alpha}) r_{\tau_1+\frac{n_2}{\alpha}}(y_2, z_2)[K_{2+}(Z(\tau_1 + \frac{n_2}{\alpha}, y_2, z_2), z + n_2, p(y, z + n_2))] \times \\
&\times \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} y\right) \right| dy_2 dz_2 \Bigg) |dy||dz| + \\
&+ \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \sum_{n,n_2\in\mathbb{Z}} \Bigg(\int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^0 f(\tau + \frac{n}{\alpha}) r_{\tau+\frac{n}{\alpha}}(y, z)[K_{1-}(Z(\tau + \frac{n}{\alpha}, y, z), z_2 + n, p(y_2, z_2 + n))] \times \\
&\times \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} y_2\right) \right| g_m(\tau_1 + \frac{n_2}{\alpha}) r_{\tau_1+\frac{n_2}{\alpha}}(y_2, z_2)[K_{2-}(Z(\tau_1 + \frac{n_2}{\alpha}, y_2, z_2), z + n_2, -p(y, z + n_2))] \times
\end{aligned}$$

$$\times \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right| dy_2 dz_2\Bigg)|dy||dz|,$$

где $\tau = \tau(y,z,y_2,z_2)$ и $\tau_1 = \tau(y_2,z_2,y,z) = -\tau(y,z,y_2,z_2)$. Отметим, что в первом слагаемом $p(y,z)$ и $p(y_2,z_2)$ имеют одинаковые знаки, а во втором слагаемом — разные. При помощи несложных преобразований данную формулу можно переписать в виде

$$k_{T_f\circ K_1\circ T_{g_m}\circ K_2}\mid_\Delta(y,z,y,z) = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(t)v(t,y,z)dt\right)|dy||dz|,$$

где

$$\begin{aligned}
v(t,y,z) = \frac{\pi}{2|\alpha|}\sum_{N\in\mathbb{Z}}\int_{\alpha t'+N+\ln|p(y,z)|}^{+\infty} dz_2' f(t'+\frac{N}{\alpha})\times&\\
\times [r_{t'+\frac{N}{\alpha}}(y,z)[K_{1+}(Z(t'+\frac{N}{\alpha},y,z),z_2',p(Y_3',z_2'))]\times&\\
\times r_{-t'}(Y_3',z_2')[K_{2+}(Z(-t',Y_3',z_2'),z+N,p(y,z+N))]+&\\
+ r_{t'+\frac{N}{\alpha}}(y,z)[K_{1-}(Z(t'+\frac{N}{\alpha},y,z),z_2',p(Y_3',z_2'))]\times&\\
\times r_{-t'}(Y_3',z_2')[K_{2-}(Z(-t',Y_3',z_2'),z+N,-p(y,z+N))]].&
\end{aligned}$$

По формуле (29) ядро оператора $T_f\circ K_1\circ K_2$ задается формулой:

$$\begin{aligned}
&k_{T_f\circ K_1\circ K_2}(y,z,y_2,z_2) =\\
&= \frac{\pi}{2|\alpha|}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tau+\frac{n}{\alpha})r_{\tau+\frac{n}{\alpha}}(y,z)[K_+(Z(\tau+\frac{n}{\alpha},y,z),z_2+n,p(y_2,z_2+n))]\times\\
&\quad\times\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right| |dy|^{1/2}|dz|^{1/2}|dy_2|^{1/2}|dz_2|^{1/2}+\\
&+ \frac{\pi}{2|\alpha|}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tau+\frac{n}{\alpha})r_{\tau+\frac{n}{\alpha}}(y,z)[K_-(Z(\tau+\frac{n}{\alpha},y,z),z_2+n,p(y_2,z_2+n))]\times\\
&\quad\times\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y_2\right)\right| |dy|^{1/2}|dz|^{1/2}|dy_2|^{1/2}|dz_2|^{1/2},
\end{aligned}$$

где K_+ и K_- определяют ядро оператора $K_1\circ K_2$:

$$K_\pm(z_1,z_2,v) = \int_{\ln|v|}^{+\infty} K_{1+}(z_1,z_3,v)K_{2\pm}(z_3,z_2,v)|dz_3| + \int_{\ln|v|}^{+\infty} K_{1-}(z_1,z_3,v)K_{2\mp}(z_3,z_2,-v)|dz_3|.$$

Легко видеть, что при $p(y,z)>0$ можно записать:

$$k_{T_f\circ K_1\circ K_2}\mid_\Delta(y,z,y,z) = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(t)v(0,y,z)dt\right)|dy||dz|.$$

Поэтому получаем

$$k_{T_f\circ K_1\circ T_{g_m}\circ K_2}\mid_\Delta(y,z,y,z) - k_{T_f\circ K_1\circ K_2}\mid_\Delta(y,z,y,z) = h_m(y,z)\left|\frac{dy}{y-1}\right||dz|,$$

где

$$h_m(y,z) = (1-y)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(t)(v(t,y,z)-v(0,y,z))dt.$$

Функция h_m является гладкой, 1-периодической по z, функцией на $(0,2)\times\mathbb{R}$, причем

$$h_m(1,z)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(t)(v(t,1,z)-v(0,1,z))dt.$$

Поэтому, по определению, имеем

$$\left(k_{T_f\circ K_1\circ T_{g_m}\circ K_2}\mid_\Delta - k_{T_f\circ K_1\circ K_2}\mid_\Delta\right)|_{y=1}=h_m(1,z)|dz|$$

и

$$\begin{aligned}T_m&:=\text{r-Tr}(T_f\circ K_1\circ T_{g_m}\circ K_2)-\text{r-Tr}(T_f\circ K_1\circ K_2)=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{1>|y-1|>\varepsilon}\int_0^2 \operatorname{tr} h_m(y,z)|dz|\left|\frac{dy}{y-1}\right|+2\ln\varepsilon\int_0^2 \operatorname{tr} h_m(1,z)|dz|\right).\end{aligned}$$

Существует такая константа C, что для любых $t\in(-1,1)$, $z\in\mathbb{R}$ и $y\in(0,2)$ имеет место неравенство $|v(t,y,z)-v(0,y,z)|\leqslant Ct$. Следовательно, получаем, что для любых $z\in\mathbb{R}$ и $y\in(0,2)$ имеет место следующая оценка с некоторой постоянной $C_3>0$:

$$|h_m(y,z)|\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(t)|v(t,y,z)-v(0,y,z)|dt\leqslant\frac{C_3}{m}. \tag{50}$$

Аналогичную оценку можно доказать для частной производной по y:

$$\left|\frac{\partial h_m(y,z)}{\partial y}\right|\leqslant\frac{C_4}{m},\quad z\in\mathbb{R}, y\in(0,2). \tag{51}$$

Так как

$$\int\limits_{1>|y-1|>\varepsilon}\frac{dy}{|y-1|}=-2\ln\varepsilon,$$

то формулу для T_m можно переписать следующим образом:

$$T_m=\int_0^2\int_0^1\frac{\operatorname{tr} h_m(y,z)-\operatorname{tr} h_m(1,z)}{|y-1|}|dz||dy|. \tag{52}$$

Ввиду оценок (50) и (51), из (52) немедленно вытекает, что

$$|T_m|\leqslant\frac{C_5}{m}.$$

Поэтому, $\lim_{m\to\infty}\text{r-Tr}(T_f\circ K_1\circ T_{g_m}\circ K_2-T_f\circ K_1\circ K_2)=\lim_{m\to\infty}T_m=0$. Аналогично можно показать, что $\text{r-Tr}(T_{g_m}\circ K_2\circ T_f\circ K_1)\to\text{r-Tr}(K_2\circ T_f\circ K_1)$. Следовательно, при $m\to\infty$ левая часть формулы (47) стремится к левой части формулы (38). Тем самым, формула (38) доказана.

B. Вычисление интегралов

В этом параграфе мы рассматриваем произвольное векторное расслоение $E^0=\mathbb{R}\times\mathbb{C}^N$, наделенное потоком, задаваемым отображением $r_t(1,z):E^0_{Z(t,1,z)}\to E^0_{1,z}$. Для любой функции $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определен оператор $T_f^{S^1,\lambda}$ в пространстве $L^2(S^1,E^0\otimes\Omega^{\frac12}_{S^1})$ по формуле (34).

Предложение 7. *Для любой функции $\phi \in \mathcal{A}$ справедлива формула:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(T_f^{S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda))d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\alpha}\right) \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}(z - Z(\frac{n}{\alpha},1,z)+n)} \hat{\phi}\left(z - Z(\frac{n}{\alpha},1,z)+n\right) \operatorname{tr} r_{\frac{n}{\alpha}}(1,z)dz.$$

Доказательство. Оператор $\phi(D_z - \lambda)$ имеет вид:

$$\phi(D_z - \lambda)v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(z-z_1)\xi} \phi(\xi - \lambda)v(z_1)dz_1 d\xi.$$

Поэтому, имеем

$$T_f^{S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda)v(z) = \frac{1}{2\pi} \iiint f(\tau) e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - Z(\tau,1,z)+\alpha\tau)} \times$$
$$\times e^{i(Z(\tau,1,z)-z_1)\xi} \phi(\xi - \lambda) r_\tau(1,z_1)v(z_1)dz_1 d\xi d\tau.$$

Ядро этого оператора как оператора на S^1 имеет вид

$$K_\lambda(z,z_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(\tau) e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - Z(\tau,1,z)+\alpha\tau)} \times e^{i(Z(\tau,1,z)-z_1-n)\xi} \phi(\xi - \lambda) r_\tau(1,z_1) d\xi d\tau. \quad (53)$$

Интеграл можно понимать как абсолютно сходящийся двойной интеграл. Ограничение ядра K_λ на диагональ имеет вид:

$$K_\lambda(z,z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(\tau) e^{(i\lambda - \frac{1}{2})(z - Z(\tau,1,z)+\alpha\tau)} e^{i(Z(\tau,1,z)-z-n)\xi} \phi(\xi - \lambda) r_\tau(1,z) d\xi d\tau. \quad (54)$$

Для функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ обозначим через $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье:

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)dx.$$

Сделав замену переменных $\xi_1 = \xi - \lambda, \tau_1 = \alpha\tau - n$ в интеграле, формулу (54) можно переписать следующим образом:

$$K_\lambda(z,z) = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha}\right) e^{(i\lambda-\frac{1}{2})\tau_1} e^{-\frac{1}{2}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha},1,z\right)+n\right)} \times$$
$$\times \hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha},1,z\right)+n\right) r_{\frac{\tau_1+n}{\alpha}}(1,z)d\tau_1. \quad (55)$$

Можно показать, что для любого $\beta > 0$ существует такая постоянная $C > 0$, что для любых $\tau_1 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left| f\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha},1,z\right)+n\right)} \hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha},1,z\right)+n\right)\right| < Ce^{-\beta(|\tau_1|+|n|)}. \quad (56)$$

Действительно, поскольку функция f финитна, существует такая постоянная $K > 0$, что $\operatorname{supp} f \subset [-K,K]$. Поэтому, можно предполагать, что

$$\left|\frac{\tau_1+n}{\alpha}\right| < K. \quad (57)$$

По теореме Пэли-Винера для любого $\beta > 0$ существует такое $C > 0$, что
$$|\hat{\phi}(z)| < Ce^{-\beta|z|}, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

Поскольку функция $z - Z(\tau, 1, z)$ периодична с периодом 1, существует такая постоянная $r > 0$, что для всех τ_1 и n, удовлетворяющих условию (57), и для любого z справедлива оценка
$$\left| z - Z\left(\frac{\tau_1 + n}{\alpha}, 1, z\right)\right| < r. \tag{59}$$
Из оценок (58) и (59) вытекает существование такой постоянной $C_1 > 0$, что для всех τ_1 и n, удовлетворяющих условию (57), и для любого z справедлива оценка
$$\left|\hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1 + n}{\alpha}, 1, z\right) + n\right)\right| < C_1 e^{-\beta(|\tau_1| + |n|)}.$$
Отсюда немедленно следует оценка (56). Из этой оценки следует, что ряд, стоящий в правой части формулы (53), сходится.

Оценка (56) позволяет изменить порядок интегрирования в формуле:
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(T_f^{S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda)) &= \int_0^1 K_\lambda(z, z)dz = \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\lambda - \frac{1}{2})\tau_1}\left(\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{\tau_1 + n}{\alpha}\right) e^{-\frac{1}{2}(z - Z\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha}, 1, z\right) + n)}\times\right.\\ &\left.\times\hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1 + n}{\alpha}, 1, z\right) + n\right)\operatorname{tr} r_{\frac{\tau_1+n}{\alpha}}(1, z)dz\right)d\tau_1. \end{aligned}\tag{60}$$
Отметим, что сумма по n, стоящая в правой части формулы (60), состоит из конечного числа ненулевых слагаемых, так как функция f финитна.

Рассмотрим функцию
$$\begin{aligned}F(\tau_1) = e^{-\frac{1}{2}\tau_1}\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{\tau_1 + n}{\alpha}\right) e^{-\frac{1}{2}(z - Z\left(\frac{\tau_1+n}{\alpha}, 1, z\right) + n)}\times \\ \times\hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{\tau_1 + n}{\alpha}, 1, z\right) + n\right)\operatorname{tr} r_{\frac{\tau_1+n}{\alpha}}(1, z)dz.\end{aligned}$$
Формулу (60) можно переписать в виде:
$$\operatorname{tr}(T_f^{S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda)) = \frac{1}{2\pi\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau_1}F(\tau_1)d\tau_1 = \frac{1}{2\pi\alpha}\hat{F}(-\lambda).$$
Применяя формулу обращения для преобразования Фурье, получаем, что:
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(T_f^{S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda))d\lambda &= \frac{1}{2\pi\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(-\lambda)d\lambda = \frac{1}{\alpha}F(0) = \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\alpha}\right)\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\left(z - Z\left(\frac{n}{\alpha}, 1, z\right) + n\right)}\hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{n}{\alpha}, 1, z\right) + n\right)\operatorname{tr} r_{\frac{n}{\alpha}}(1, z)dz.\end{aligned}$$

□

Следствие 1. *В скалярном случае имеем*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(T_f^{(0),S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda))d\lambda = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n}{\alpha}) \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}(z - Z(\frac{n}{\alpha},1,z)+n)} \hat{\phi}(z - Z(\frac{n}{\alpha},1,z) + n)dz.$$

Доказательство. В данном случае имеем $r_t(1,z) = 1$. □

Следствие 2. *В случае, когда* $E^0 = T^*\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}\,|_{S^1} \cong T^*S^1$, *имеем*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(T_f^{(1),S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda))d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\alpha}\right) \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\left(Z\left(-\frac{n}{\alpha},1,z_1\right) - z_1 + n\right)} \hat{\phi}\left(Z\left(-\frac{n}{\alpha},1,z_1\right) - z_1 + n\right) dz_1.$$

Доказательство. В данном случае имеем $r_t(1,z) = \frac{\partial Z}{\partial z}(t,1,z)$. Поэтому формула принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(T_f^{S^1,\lambda} \circ \phi(D_z - \lambda))d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\alpha}\right) \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\left(z - Z\left(\frac{n}{\alpha},1,z\right)+n\right)} \hat{\phi}\left(z - Z\left(\frac{n}{\alpha},1,z\right) + n\right) \frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{n}{\alpha},1,z\right) dz.$$

Замена переменной $z_1 = Z\left(\frac{n}{\alpha},1,z\right)$ в интеграле, стоящем в правой части последнего равенства, завершает доказательство. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Álvarez López, Yu. A. Kordyukov *Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one* // In: Foliations: Geometry and Dynamics. (Warsaw, 2000), P. 159–183, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.
2. A. Deitmar *A higher rank Lefschetz formula* // J. Fixed Point Theory Appl. 2. 2007. No. 1. P. 1–40.
3. Ch. Deninger *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces* // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. I. P. 163–186 (electronic).
4. Ch. Deninger *Number theory and dynamical systems on foliated spaces* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 103. 2001. No. 3. P. 79–100.
5. Ch. Deninger *Analogies between analysis on foliated spaces and arithmetic geometry* // Groups and analysis. P. 174–190. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 354, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
6. D. Fried *Lefschetz formulas for flows* // The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984). P. 19–69, Contemp. Math., 58, III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
7. A. Juhl *Cohomological theory of dynamical zeta functions.* Progress in Mathematics, 194. Birkhauser Verlag, Basel, 2001.
8. Yu. A. Kordyukov *Functional calculus for tangentially elliptic operators on foliated manifolds* // In: Analysis and Geometry in Foliated Manifolds (Santiago de Compostela, 1994). P. 113–136. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.
9. Кордюков Ю.А. *Теория индекса и некоммутативная геометрия на многообразиях со слоением* // УМН, 64:2(386). 2009. С. 7–202.
10. Кордюков Ю.А., Павленко В.А. *Сингулярные интегральные операторы на многообразии с отмеченным подмногообразием* // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 6, № 3. С. 35–71.

11. E. Leichtnam *An invitation to Deninger's work on arithmetic zeta functions* // Geometry, spectral theory, groups, and dynamics, Contemp. Math., 387, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 2005. P. 201–236.
12. R.B. Melrose *Pseudodifferential operators, corners and singular limits* // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), P. 217–234, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
13. R.B. Melrose *Calculus of conormal distributions on manifolds with corners* // Internat. Math. Res. Notices 1992, No. 3. P. 51–61.
14. R.B. Melrose *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem.* Research Notes in Mathematics, 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.
15. J. Roe *Finite propagation speed and Connes' foliation algebra* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 102. 1987. P. 459–466.

Юрий Аркадьевич Кордюков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `yurikor@matem.anrb.ru`

Виктор Александрович Павленко,
ФГБОУ ВПО Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50-летия Октября, 4,
450080, г. Уфа, Россия
E-mail: `PVA100186@mail.ru`