ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 139-148.

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

А.Р. ХАШИМОВ, С. ЯКУБОВ

Аннотация. В статье построено решение задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа в многомерном пространстве и исследованы некоторые ее свойства.

Ключевые слова: задача Коши, уравнения третьего порядка, нестационарные уравнения, функция Эйри, растущие на бесконечности решения.

Mathematics Subject Classification: 35A02, 35A09, 35B40

1. Введение

Целью данной работы является исследование некоторых свойств решений уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3}{\partial x_i^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x_i; t) : -\infty < x_i < \infty, 0 < t \leqslant T\}$, с начальным условием

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n), \ \ -\infty < x_i < \infty. \tag{2}$$

Если в (1) $n = 1$, то мы получаем уравнение

$$u_{xxx} - u_t = 0, \tag{3}$$

которое было исследовано в работе [2]. В этой работе были построены фундаментальное решение для уравнения (3) и теория потенциалов, а также разработан метод исследования краевых задач и задачи Коши для уравнения (3). Позднее решение задачи Коши для уравнения (3) было построено в работе [16] в более широком классе и были изучены некоторые его свойства. Далее, этим же методом было построено решение задачи Коши для уравнения высокого нечетного порядка [15]

$$\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Если в (1) положить $n = 2$, то мы получим уравнение

$$u_{xxx} + u_{yyy} - u_t = 0. \tag{4}$$

Отметим, что решения уравнения (4) и линейного уравнения Захарова–Кузнецова (см. [4], [5])

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = 0 \tag{5}$$

A.R. Khashimov, S. Yakubov, On some properties of Cauchy problem for non-stationary third order composite type equation.

Работа поддержана ГКНТ РУз (грант Ф-4-55).

Поступила 30 октября 2014 г.

имеют аналогичные асимптотические свойства на бесконечности. Уравнение Захарова–Кузнецова (5) является одним из вариантов обобщения уравнения Кортевеге-де-Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустические волновые процессы в плазме [20]. Решение задачи Коши для уравнения (4) было построено в работе [8].

Класс корректности задачи Коши в классах функций, растущих на бесконечности, впервые был определен в работе А.Н. Тихонова [18] для уравнения теплопроводности. Дальнейшее исследование начально-краевых задач для дифференциальных уравнений четного порядка в классах функций, растущих на бесконечности, выполнено с применением аппарата теории обобщенных функций [9, 10, 11, 12, 13, 19]. В настоящее время теория линейных уравнений четного порядка (например, для линейных уравнений параболического типа) разработана наиболее полно [3, 14, 17].

В работе [1] было построено фундаментальное решение уравнения (1) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$

$$U(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,...,x_n-\xi_n;t-\tau)=$$

$$=\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{3}}}f\left(\frac{x_1-\xi_1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right)...f\left(\frac{x_n-\xi_n}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right),\ \ x_i\neq\xi_i,\ \ t>\tau,\ \ i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где $f(z)=\int\limits_0^\infty cos(\lambda^3-\lambda z)d\lambda,\ \ -\infty<z<\infty,$ — функция Эйри и удовлетворяющая уравнению

$$f(z)+\frac{1}{3}zf(z)=0. \tag{7}$$

Для функции $f(z)$ имеют место следующие соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=\pi,\ \ \int\limits_{-\infty}^{0}f(z)dz=\frac{\pi}{3},\ \ \int\limits_{0}^{\infty}f(z)dz=\frac{2\pi}{3}. \tag{8}$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x_1,...,x_n)$ кусочно-непрерывная функция с компактным носителем $D_{(a_i,b_i)}=\{x_i:\ a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}$, $i=\overline{1,n}$, $D_{(a_i,b_i)}\subset\mathbb{R}^n$ и имеющая ограниченную вариацию. Тогда функция*

$$u(x_1,...,x_n,t)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}U(x_1-\xi_1,...,x_n-\xi_n;t)\varphi(\xi_1,...,\xi_n)d\xi_1...d\xi_n$$

при $t>0$ удовлетворяет уравнению (1) и для любого $x_i^0\in(a_i,b_i)$

$$\lim_{t\to+0}u(x_1^0,...,x_n^0,t)=\frac{2}{3}\varphi(x_1^0-0,...,x_n^0-0)+\frac{1}{3}\varphi(x_1^0+0,...,x_n^0+0).$$

Справедливость первой части теоремы сразу следует из свойств фундаментального решения уравнения (1) и условий теоремы. Доказательство второй части теоремы проводится по каждой пространственной переменной отдельности. Так как доказательство этой части теоремы будет аналогично работе [16] и не вызывает существенных трудностей, здесь мы не будем на нем останавливаться.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(x_1,...,x_n)$ на любой ограниченной области $D_{(a_i,b_i)}=\{x_i:\ a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}$, $i=\overline{1,n}$, $D_{(a_i,b_i)}\subset\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, а вариация функции*

$$P(y)=y^{\frac{3}{4}+\delta_1}\psi(y) \tag{9}$$

ограничена при $y < a_0$ *для любого* $a_0 = const$. *Кроме того, пусть* $\varphi(x_1,...,x_n) \sim \prod_j \psi(x_j)\exp\left\{const\sum_{i\neq j}|x_i|^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right\}$, *при* $x_i \to \infty,\ x_j < a_j,\ j=\overline{1,n},\ i+j=n$; $\varphi(x_1,...,x_n) \sim \prod_j \psi(x_j)$, *при* $x_j < a_j$, *где* δ_1, δ_2- *положительные числа. Тогда функция*

$$u(x_1,...,x_n,t) = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} U(x_1-\xi_1,...,x_n-\xi_n;t)\varphi(\xi_1,...,\xi_n)d\xi_1...d\xi_n \tag{10}$$

при $t > 0$ *удовлетворяет уравнению (1) и условию*

$$\lim_{(x_1,...,x_n,t)\to(x_1^0,...,x_n^0,+0)} u(x_1,...,x_n,t) = \varphi(x_1^0,...,x_n^0). \tag{11}$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. С этой целью формально дифференцируя выражение (10) по x_j, имеем

$$\pi^n\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3 U(x_1-\xi_1,...,x_n-\xi_n;t)}{\partial x_j^3}\varphi(\xi_1,...,\xi_n)d\xi_1...d\xi_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3 U(\xi_1,...,\xi_n;t)}{\partial x_j^3}\varphi(x_1-\xi_1,...,x_n-\xi_n)d\xi_1...d\xi_n.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^3 U(x_1,...,x_n;t)}{\partial x_j^3} = -\frac{t^{-1}}{3}\left\{U + x_j U_{x_j}\right\}.$$

При вычислении производных учитывалось соотношение (7). Отсюда получим

$$\pi^n t\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z_1)...f(z_n)\varphi\left(\xi_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}},...,\xi_n - z_n t^{\frac{1}{3}}\right)dz_1...dz_n-$$

$$-\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z_1)...f(z_{j-1})f(z_{j+1})...f(z_n)dz_1...dz_{j-1}dz_{j+1}...dz_n\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} zf'(z_j)\varphi\left(\xi_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}},...,\xi_n - z_n t^{\frac{1}{3}}\right)dz_j =$$

$$= -\frac{1}{3}\{u_{j1}+u_{j2}\},\ \ z_j = \frac{x_j-\xi_j}{t^{\frac{1}{3}}}. \tag{12}$$

Докажем, что при выполнении условия теоремы 2 интеграл в правой части (12), полученный после формального дифференцирования, сходится. Исследуем сходимость интеграла (12) при $j=1$, остальные случаи исследуются аналогичным образом. Для функций Эйри справедливы следующие соотношения [16]:

$$f(z) \sim \begin{cases} |z|^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}\right)\left(\sqrt{\pi}+O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \\ |z|^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}\right)\left(\sqrt{\pi}+O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \end{cases} \tag{13}$$

при достаточно больших отрицательных z;

$$f(z) \sim \begin{cases} z^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\pi}+O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \\ z^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\pi}+O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \end{cases} \tag{14}$$

при достаточно больших положительных z.

Пусть $j=1,\ t \geq t_0 > 0,\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i=2,3,...,n$.

Сначала исследуем второе слагаемое в правой части (12). Тогда из (12) имеем

$$u_{12}(x_1,x_2,...,x_n,t)=\left\{\int\limits_{-\infty}^{-r_2}+\int\limits_{-r_2}^{r_2}+\int\limits_{r_2}^{\infty}\right\}f(z_2)dz_2...\left\{\int\limits_{-\infty}^{-r_n}+\int\limits_{-r_n}^{r_n}+\int\limits_{r_n}^{\infty}\right\}f(z_n)dz_n\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{-r_1}+\int\limits_{-r_1}^{r_1}+\int\limits_{r_1}^{\infty}\right\}z_1f'(z_1)\varphi\left(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}},...,x_n-z_nt^{\frac{1}{3}}\right)dz_1=$$

$$=\left\{\int\limits_{-\infty}^{-r_2}+\int\limits_{-r_2}^{r_2}+\int\limits_{r_2}^{\infty}\right\}f(z_2)dz_2...\left\{\int\limits_{-\infty}^{-r_n}+\int\limits_{-r_n}^{r_n}+\int\limits_{r_n}^{\infty}\right\}[J_1+J_2+J_3]f(z_n)dz_n, \qquad (15)$$

где r_j–достаточно большие положительные числа. Сначала рассмотрим интегралы содержащие выражение $J_1(x_1,...,x_n;z_2,...,z_n;t)$ при достаточно больших положительных r_1.

Пусть $z_\in[-\infty;-r_i,\ \ i=\overline{2,n}]$. Тогда в силу условия (13) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{-r_2}f(z_2)dz_2...\int\limits_{-\infty}^{-r_n}J_1(x_1,...,x_n;z_2,...,z_n;t)f(z_n)dz_n=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{-r_2}f(z_2)dz_2...\int\limits_{-\infty}^{-r_n}f(z_n)dz_n\int\limits_{-\infty}^{-r_1}z_1f'(z_1)\varphi\left(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}},...,x_n-z_nt^{\frac{1}{3}}\right)dz_1\sim$$

$$\sim O\left(\int\limits_{r_2}^{\infty}z_2^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-z_2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-Cz_2^{-\delta_2}\left(\frac{x_2}{z_2}+t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right]dz_2\right)\times...$$

$$\times O\left(\int\limits_{r_n}^{\infty}z_n^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-z_n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-Cz_n^{-\delta_2}\left(\frac{x_n}{z_n}+t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right]dz_n\right)\times$$

$$\times O\left(\int\limits_{r_1}^{\infty}z_1^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-z_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-Cz_1^{-\delta_2}\left(\frac{x_1}{z_1}+t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right]dz_1\right).$$

Отсюда видно, что этот интеграл равномерно сходится к нулю при $r_j\to\infty$.

Пусть теперь $z_2\in[r_2,\infty],\ \ z_k\in[-\infty,-r_k],\ \ k=\overline{3,n}$. Тогда в силу (13) и условий теоремы 2 имеем

$$\int\limits_{r_2}^{\infty}f(z_2)dz_2\int\limits_{-\infty}^{-r_3}f(z_3)dz_3...\int\limits_{-\infty}^{-r_n}J_1(x_1,...,x_n;z_2,...,z_n;t)f(z_n)dz_n=$$

$$=\int\limits_{r_2}^{\infty}f(z_2)dz_2\int\limits_{-\infty}^{-r_3}f(z_3)dz_3...\int\limits_{-\infty}^{-r_n}f(z_n)dz_n\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{-r_1}z_1f'(z_1)\varphi\left(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}},...,x_n-z_nt^{\frac{1}{3}}\right)dz_1\sim$$

$$\sim O\left(\int\limits_{r_1}^{\infty}z_1^{\frac{5}{4}}\exp\left[-z_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-Cz_1^{-\delta_2}\left(\frac{x_1}{z_1}+t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right]dz_1\right)\times...$$

$$\times O\left(\int_{r_n}^{\infty} z_n^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-z_n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3} - C z_n^{-\delta_2}\left(\frac{x_n}{z_n} + t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right] dz_n\right) \times$$

$$\times \int_{r_2}^{\infty} \psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) f(z_2) dz_2 = J_{11}(x_1,t)...J_{1n}(x_n,t) J_{12}(x_2,t).$$

Сходимость интегралов $J_{11}(x_1,t),...,J_{1n}(x_n,t)$ при $r_j \to \infty,\ \ j=1,3,..,n$ к нулю очевидна. Рассмотрим интеграл $J_{12}(x_2,t)$.

$$\int_{r_2}^{\infty} \psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) f(z_2) dz_2 \sim \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_2 +$$

$$+ O\left(\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{7}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_2\right).$$

Здесь

$$\left|\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_2\right| =$$

$$= \left|\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-1-\delta_1} \cos\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left|\frac{x_2}{z_2} - t^{\frac{1}{3}}\right|^{-\frac{3}{4}-\delta_1} \left|x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right|^{\frac{3}{4}+\delta_1}\right.$$

$$\left.\psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_2\right| \leqslant M \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-1-\delta_1} dz_2 = \left(\frac{M}{\delta_1}\right) r_2^{-\delta_1},$$

$$\left|\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{7}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_2\right| =$$

$$= \left|\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{5}{2}-\delta_1} \cos\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left|\frac{x_2}{z_2} - t^{\frac{1}{3}}\right|^{-\frac{3}{4}-\delta_1} \left|x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right|^{\frac{3}{4}+\delta_1}\right.$$

$$\left.\psi\left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_2\right| \leqslant M \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{5}{2}-\delta_1} dz_2 = \left(\frac{M}{\delta_1}\right) r_2^{-\frac{3}{2}-\delta_1}.$$

Поэтому интеграл $J_{12}(x_2,t)$ сходится к нулю при $r_2 \to \infty$.

Аналогичным образом доказывается сходимость остальных интегралов, содержащих выражение $J_1(x_1,...,x_n,z_2,...,z_n,t)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3. (см. [7]). Пусть вариация функции $P(x)$ ограничена на интервале (a,b), и

$$\left|\int_a^b Q(x) dx\right| < M.$$

Тогда

$$\left|\int_a^b Q(x) P(x) dx\right| < M \left\{|P(x)| + V_a^b(P(x))\right\},$$

где V_a^b–вариация функции на интервале (a,b).

Рассмотрим теперь интегралы, содержащие выражение $J_3(x_1,...,x_n,z_2,...,z_n,t)$ при достаточно больших положительных r_1.

Пусть $z_i' \in [-\infty, -r_i']$. Тогда в силу (13) и условий теоремы 2 имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{-r_2} f(z_2)dz_2 ... \int\limits_{-\infty}^{-r_n} J_3(x_1,...,x_n,z_2,...,z_n,t)dz_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-r_2} f(z_2)dz_2 ... \int\limits_{-\infty}^{-r_n} f(z_n)dz_n \int\limits_{r_1}^{\infty} z_1 f'(z_1)\varphi\left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, ..., x_n - z_n t^{\frac{1}{3}}\right) dz_1 \sim$$

$$\sim O\left(\int\limits_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-z_2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3} - C z_2^{-\delta_2}\left(\frac{x_2}{z_2} + t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right] dz_2\right) \times ...$$

$$\times O\left(\int\limits_{r_n}^{\infty} z_n^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-z_n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3} - C z_n^{-\delta_2}\left(\frac{x_n}{z_n} + t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right] dz_n\right) \times$$

$$\times \int\limits_{r_1}^{\infty} \psi\left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}\right) z_1 f'(z_1) dz_1 = J_{32}(x_2,t)...J_{3n}(x_n,t) J_{31}(x_1,t).$$

Сходимость интеграла $J_{32}(x_2,t),...,J_{3n}(x_n,t)$ при $r_i' \to \infty$ к нулю очевидна. Рассмотрим интеграл $J_{31}(x_1,t)$

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} \psi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}) z_1 f'(z_1) dz_1 \sim \int\limits_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{5}{4}} \sin\left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_1 +$$

$$+ O\left(\int\limits_{r_1}^{\infty} z_1^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_1\right).$$

Сходимость второго интеграла к нулю при $r_1 \to \infty$ в правой части этого выражения очевидна. Поэтому нам достаточно исследовать первый интеграл в правой части этого выражения

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{5}{4}} \sin\left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \psi\left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_1 =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{1}{2}-\delta_1} \sin\left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{x_1}{z_1} - t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}-\delta_1} \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}+\delta_1} \psi\left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}\right) dz_1 =$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_{\rho}^{\infty} \upsilon^{-\frac{2}{3}\delta_1} \sin\left(\frac{2}{3}\upsilon - \frac{\pi}{4}\right) \mu(\upsilon) \left\{\left(x_1 - \upsilon^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}+\delta_1} \psi\left(x_1 - \upsilon^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}}\right)\right\} d\upsilon,$$

где $\rho = r_1^{\frac{3}{2}}$, $\mu(\upsilon) = \left(\frac{x_1}{\upsilon^{\frac{2}{3}}} - t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}-\delta_1}$.

Абсолютное значение этого интеграла при достаточно больших положительных r_1 ограничено следующим выражением

$$\frac{2}{3}\left\{\left|x_1 - r_1 t^{\frac{1}{3}}\right|^{\frac{3}{4}+\delta_1} \left|\psi\left(x_1 - r_1 t^{\frac{1}{3}}\right)\right| + \right.$$

$$+V\left[\left(x_1-\upsilon^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}+\delta_1}\psi\left(x_1-\upsilon^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}\right);\upsilon\geq r_1^{\frac{3}{2}}\right]\right\}\times$$

$$\times\sup\left\{\left|\int\limits_m^n \upsilon^{-\frac{2}{3}\delta_1}\sin\left(\frac{2}{3}\upsilon-\frac{\pi}{4}\right)d\upsilon\right|\right\},$$

где $r_1^{\frac{3}{2}}\leqslant m<n$.

Существование интегралов (см.[6])

$$\int\limits_0^\infty x^p\sin(ax+b)dx=a^{\frac{1}{p+1}}\Gamma(1+p)\cos\left(b+\frac{p\pi}{2}\right),\ \ a>0,\ \ -1<p<0,$$

$$\int\limits_0^\infty x^p\cos(ax+b)dx=-a^{\frac{1}{p+1}}\Gamma(1+p)\sin\left(b+\frac{p\pi}{2}\right),\ \ a<0,\ \ -1<p<0$$

означает, что выражение под знаком sup сходится к нулю при $r_1\to\infty$. Следовательно, интеграл $J_{31}(x_1,t)$ равномерно стремится к нулю при $r_1\to\infty$.

Пусть теперь $z_2\in[r_2,\infty),\ \ z_k\in(-\infty,-r_k],\ \ k=\overline{3,n}$. Тогда в силу (13) и условий теоремы 2 имеем

$$\int\limits_{r_2}^\infty f(z_2)dz_2\int\limits_{-\infty}^{-r_3} f(z_3)dz_3...\int\limits_{-\infty}^{-r_n} J_3(x_1,...,x_n,z_2,...,z_n,t)dz_n=$$

$$=\int\limits_{r_2}^\infty f(z_2)dz_2...\int\limits_{-\infty}^{-r_n} f(z_n)dz_n\int\limits_{r_1}^\infty z_1f'(z_1)\varphi\left(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}},...,x_n-z_nt^{\frac{1}{3}}\right)dz_1\sim$$

$$\sim O\left(\int\limits_{r_3}^\infty z_3^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-z_3^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-Cz_3^{-\delta_2}\left(\frac{x_3}{z_3}+t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right]dz_3\right)\times...$$

$$\times O\left(\int\limits_{r_n}^\infty z_n^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-z_n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-Cz_n^{-\delta_2}\left(\frac{x_n}{z_n}+t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)\right]dz_n\right)\times$$

$$\times\int\limits_{r_2}^\infty\psi\left(x_2-z_2t^{\frac{1}{3}}\right)f(z_2)dz_2\int\limits_{r_1}^\infty\psi\left(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}}\right)z_1f'(z_1)dz_1=$$

$$=J_{33}(x_2,t)...J_{3n}(x_n,t)J_{32}(x_2,t)J_{31}(x_1,t).$$

Сходимость интегралов $J_{33}(x_2,t),...,J_{3n}(x_n,t),J_{32}(x_2,t),J_{31}(x_1,t)$ следует из (16) и теоремы 3.

Аналогичным образом доказывается сходимость интегралов, содержащих выражение $J_3(x_1,...,x_n,z_1,...,z_n,t)$.

Таким образом, мы доказали, что интеграл (12) равномерно сходится в $D_{(a_i,b_i)}$. Следовательно, в силу произвольности $a_i,\ \ b_i$ и t_0 можно утверждать, что интеграл (12) равномерно сходится в D.

Докажем теперь верность соотношения (11). Для этого мы рассмотрим функции $\bar{\varphi}(x_1,...,x_n)$ с компактным носителем. Предположим, что $a_i+1\leqslant x_i^0\leqslant b_i-1$. Положим $\bar{\varphi}(x_1,...,x_n)=\Phi(a_i,b_i)\varphi(x_1,...,x_n)$, где

$$\Phi(a_i,b_i)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x_i\in D_{(a_i,b_i)},\\ 0, & \text{если}\quad x_i\notin D_{(a_i,b_i)}.\end{cases}\ .$$

Пусть
$$\bar{u}(x_1,...,x_n,t)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}U(x_1-\xi_1,...,x_n-\xi_n;t)\bar{\varphi}(\xi_1,...,\xi_n)d\xi_1...d\xi_n.$$
Рассмотрим разность
$$\upsilon(x_1,...,x_n,t)=u(x_1,...,x_n,t)-\bar{u}(x_1,...,x_n,t),\ \ a_i+1\leqslant x_i\leqslant b_i-1.$$
Тогда
$$\upsilon(x_1,...,x_n,t)=\int\limits_{-\infty}^{-k_1}f(z_1)dz_1...\int\limits_{-\infty}^{-k_n}f(z_n)\varphi(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}},...,x_n-z_nt^{\frac{1}{3}})dz_n+$$
$$+\int\limits_{h_1}^{\infty}f(z_1)dz_1...\int\limits_{h_n}^{\infty}f(z_n)\varphi(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}},...,x_n-z_nt^{\frac{1}{3}})dz_n=$$
$$=\upsilon_1(x_1,...,x_n,t)+\upsilon_2(x_1,...,x_n,t), \tag{16}$$
где $k_i=(b_i-x_i)t^{-\frac{1}{3}},\ \ h_i=(x_i-a_i)t^{-\frac{1}{3}}$.

В силу соотношений (13) и условий теоремы 2 для достаточно больших k_i получаем
$$\upsilon_1(x_1,...,x_n,t)=O\left(\int\limits_{k_1}^{\infty}z_1^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{2}{3}z_1^{\frac{3}{2}}+C\left(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)dz_1\right)\times...$$
$$\times O\left(\int\limits_{k_1}^{\infty}z_n^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{2}{3}z_n^{\frac{3}{2}}+C\left(x_n-z_nt^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right)dz_n\right).$$
Отсюда видно, что $\upsilon_1(x_1,...,x_n,t)$ стремится к нулю при $t\to+0,\ \ k_i\to\infty$.

В силу теоремы 3 второй интеграл в (16) оценивается следующим образом
$$|\upsilon_2(x_1,...,x_n,t)|\leqslant\left\{\left|\varphi(x_1-h_1t^{\frac{1}{3}}...x_n-h_nt^{\frac{1}{3}})\right|+\right.$$
$$\left.+V\left(\varphi(x_1-z_1t^{\frac{1}{3}}...x_n-z_nt^{\frac{1}{3}});z_i\geq h_i\right)\right\}A(\alpha_i,\beta_i),$$
где
$$A(\alpha_i,\beta_i)=\sup\left\{\left|\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}f(z_1)dz_1...\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}f(z_n)dz_n\right|:\ \ h_i\leqslant\alpha_i\leqslant\beta_i\right\}.$$
При выполнении условий теоремы 2 первый множитель есть ограниченная величина. Теперь исследуем $A(\alpha_i,\beta_i)$ при достаточно больших $h_i\leqslant\alpha_i\leqslant\beta_i$. Имеем
$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}f(z_1)dz_1...\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}f(z_n)dz_n.$$
Оценим первый интеграл, а остальные интегралы оцениваются аналогичным образом
$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}f(z_1)dz_1\sim\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}z_1^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2}{3}z_1^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\pi}+O\left(z_1^{-\frac{3}{2}}\right)\right)dz_1\sim$$
$$\sim\int\limits_{\gamma}^{\tau}\nu^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2}{3}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\pi}+O\left(\nu^{-1}\right)\right)d\nu, \tag{17}$$
где $\gamma=\alpha_1^{\frac{3}{2}},\ \ \tau=\beta_1^{\frac{3}{2}}$.

Первое слагаемое в (17) оценивается следующим образом:

$$\left|\int\limits_{\gamma}^{\tau} \nu^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{2}{3}\nu - \frac{\pi}{4}\right) d\nu\right| \leqslant C \left|\nu^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2}{3}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right|_{\nu=\gamma}^{\nu=\tau} +$$

$$+C \left|\int\limits_{\gamma}^{\tau} \nu^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{2}{3}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \gamma^{-\frac{1}{2}} + \tau^{-\frac{1}{2}} + C\left(\gamma^{-\frac{1}{2}} - \tau^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Второе слагаемое оценивается следующим выражением $2\left(\gamma^{-\frac{1}{2}} - \tau^{-\frac{1}{2}}\right)$. Окончательно имеем

$$\sup \left|\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1) dz_1\right| \leqslant C\left(\beta_1^{-\frac{3}{4}} + \alpha_1^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Следовательно, при $t \to +0,\ \ h_i \to \infty$ интеграл (17) равномерно сходится к нулю. □

С помощью этой теоремы можно исследовать характер роста решений $u(x_1, ..., x_n, t)$ задачи. Для простоты исследование проводим по переменной x_1.

Из (10), для достаточно больших положительных чисел r_1 имеем

$$u(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, ..., x_n - \xi_n; t) \varphi(\xi_1, ..., \xi_n) d\xi_1 ... d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} U(\xi_1, ..., \xi_n; t) \varphi(\xi_1 - \xi_1, ..., \xi_n - \xi_n) d\xi_1 ... d\xi_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z_2) dz_2 ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z_n) dz_n \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-r_1} + \int\limits_{-r_1}^{r_1} + \int\limits_{r_1}^{\infty} \right\} f(z_1) \varphi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, ..., x_n - z_n t^{\frac{1}{3}}) dz_1 =$$

$$= u_1(x_1, ..., x_n, t) + u_2(x_1, ..., x_n, t) + u_3(x_1, ..., x_n, t).$$

Учитывая (13), (14) и условия теоремы 2, имеем

$$|u_1(x_1, ..., x_n, t)| \leqslant K \exp\left\{|x_1|^{\frac{3}{2} - \delta_2}\right\}, \tag{18}$$

$$|u_3(x_1, ..., x_n, t)| \leqslant M\, |x_1|^{-\frac{3}{4} - \delta_1}. \tag{19}$$

Так как $u_2(x_1, ..., x_n, t)$ ограниченная функция, из оценок (18), (19) следует, что решение задачи Коши может экспоненциально расти на бесконечности, и порядок роста не превосходит $\exp\left\{|x_1|^{\frac{3}{2} - \delta_2}\right\}$, где $\delta_2 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдиназаров С., Собиров З.А. *О фундаментельных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве* // Труды межд. научн. конф. "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". Ташкент, 2004. С. 12–13.
2. L. Cattabriga *Potenzial di linea e di domino per equazione non parabolica in due variable a characteristiche multiple*// Rendi del. Sem. Mat. della univ. di Padova. 1961. Vol.XXXI. P. 1–45.
3. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир. 1962. 427 с.
4. A.V. Famiskii and E.S. Baykova *On initial-boundary value problems in a strip for generalized two-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation* // arXiv:1212.5896v1 [math.AP] 24 Dec 2012.

5. Andrei V. Faminskii *Well-posed initial-boundary value prolems for the Zakharov-Kuznetsov equation* // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2008(2008), No. 127. P. 1–23.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.* М. 1971. 1108 с.
7. E.W. Hobson *Theory of Functions of Real Variable.* Vol.1. New York. 1957.
8. Хашимов А.Р., Матназаров Ж.Ш. *Задача Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа* // УзМЖ. 2009. 3. С.9–10.
9. Олейник О.А., Копачак И. *Об асимптотических свойствах решений системы уравнений теории упругости* // УМН. Т. 33, №. 5. 1978. С. 189–190.
10. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Априорные оценки решений первой краевой задачи для системы уравнений системы уравнений теории упругости теории упругости и их приложения* // УМН. Т. 32, № 5. 1977. 193 с.
11. Олейник О.А. *О поведении решений линейных параболических дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // УМН. 30:2. 1975. С. 219–220.
12. O.A. Oleinik, G. A. Yosifian *On singularities at the boundary points and uniqueness theorems for solutions of the first boundary value problems elasticity* // Comm. Partial Diff. Equations. 2(9). 1977. 937 p.
13. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Тавхелидзе И.А. *Оценки решений бигармонического уравнения в окрестности регулярных точек границы и на бесконечности* // УМН. Т. 33, № 3. 1978. 181 с.
14. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // УМН. Т.17, №3(105). 1962. С. 3–141.
15. Курбонов О.Т. *О разрешимости задачи Коши для уравнения нечетного поярдка с кратными характеристиками* // УзМЖ. 1998. №3. С. 33–38.
16. E.L. Roetman *Some observations about an odd order parabolic equation* // Journal of Differential Equations. 1971. 9. 2. P. 335–345.
17. Солонников В.А. *О краевых задач для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1965. LXXXIII. С. 3–162.
18. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сборник, 42, 2. 1935. С. 199–216.
19. N. Weck *An explicity Saint Venant's principle in tree-demensionale elasticity* // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 564. 1976. P. 518–526.
20. V.E. Zakharov and E.A. Kuznetsov *On threedimentional solutions* // Zhurnal Eksp. Teoret. Fiz., 66. 1974. P. 594–597. English transl. in Soviet Phys. JETP, 39(1974), 285-288.

Абдукомил Рисбекович Хашимов,
Ташкентский Финансовый институт,
улица А.Темур 60А,
100000, г.Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdukomil@yandex.ru

Собитхон Якубов,
Ташкентский Финансовый институт,
улица А.Темур 60А,
100000, г.Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdukomil@yandex.ru