ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 35-71.

УДК 515.168+517.983

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИИ С ОТМЕЧЕННЫМ ПОДМНОГООБРАЗИЕМ

Ю.А. КОРДЮКОВ, В.А. ПАВЛЕНКО

Аннотация. Пусть X — компактное многообразие без края и X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности один. В работе вводятся классы интегральных операторов на X с ядрами $K_A(x,y)$, являющимися гладкими функциями при $x \notin X^0$ и $y \notin X^0$ и допускающими асимптотическое разложение определенного вида, если x или y приближается к X^0. Для операторов из этих классов доказаны теоремы о действии в пространствах конормальных функций и теоремы о композиции. Показано, что функционал следа можно продолжить до функционала регуляризованного следа r-Tr, определенного на некоторой алгебре $\mathcal{K}(X,X^0)$ сингулярных интегральных операторов, описанных выше. Доказана формула для регуляризованного следа коммутатора операторов из данного класса в терминах ассоциированных операторов на X^0. Доказательства основаны на теоремах о поднятии и опускании конормальных функций при отображениях многообразий с отмеченными подмногообразиями коразмерности один.

Ключевые слова: многообразия, сингулярные интегральные операторы, конормальные функции, регуляризованный след, поднятие, опускание.

Mathematics Subject Classification: 47G10, 58J40, 47C05

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению и исследованию некоторых классов сингулярных интегральных операторов на замкнутом гладком многообразии X с отмеченным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Характерное свойство операторов из этих классов заключается в том, что их ядра $K_A(x,y)$ являются гладкими функциями при $x \notin X^0$ и $y \notin X^0$, допускающими асимптотическое разложение определенного вида, если x или y приближается к X^0.

Прежде всего, мы доказываем теоремы о действии в пространствах конормальных функций и теоремы о композиции для операторов из этих классов. Затем мы строим алгебру $\mathcal{K}(X,X^0)$ сингулярных интегральных операторов данного вида и функционал регуляризованного следа r-Tr на ней, который совпадает с функционалом следа на операторах с гладких ядром. Несмотря на то, что построенный функционал не обладает следовым свойством, мы доказываем формулу для регуляризованного следа r-Tr$[A,B]$ коммутатора операторов A и B, принадлежащих $\mathcal{K}(X,X^0)$, в терминах некоторых интегральных операторов с гладким ядром на X^0, ассоциированных с A и B.

Yu.A. Kordyukov, V.A. Pavlenko, Singular integral operators on a manifold with a distinguished submanifold.

Работа поддержана РФФИ (гранты 12-01-00519-а).

Поступила 13 марта 2014.

Одной из важнейших мотивировок для наших конструкций является желание обобщить формулу Лефшеца для потока на компактном многообразии, сохраняющем слоение коразмерности один. В случае, когда поток не имеет неподвижных точек, и его орбиты трансверсальны слоям слоения, такая формула была доказана в работе [1]. Существенную роль в работе [1] играет следующий аналитический результат.

Пусть M — замкнутое многообразие и $\mathcal{F}$ — гладкое слоение на M коразмерности один. Предположим, что $X_t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$ — поток на M, который отображает каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в какой-либо (возможно, другой) слой. Пусть K — послойно сглаживающий оператор на M, то есть оператор в пространстве $C^\infty(M)$, задающийся семейством интегральных операторов с гладким ядром, действующих вдоль слоев слоения.

Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим оператор A_f в пространстве $C^\infty(M)$ по формуле

$$A_f = \int_{\mathbb{R}} X_t^* \cdot f(t)\, dt \circ K \ ,$$

где X_t^* — оператор в $C^\infty(M)$, индуцированный действием потока X_t, $X_t^* f(x) = f(X_t(x))$. В [1] доказано, что, если орбиты потока X_t трансверсальны к слоям, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор A_f является ядерным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(M)$. Более того, функционал $f \mapsto \operatorname{tr} A_f$ определяет обобщенную функцию на $\mathbb{R}$. Использование обобщенных функций такого вида позволяет определить число Лефшеца потока X_t как обобщенную функцию на $\mathbb{R}$.

В случае, когда поток X_t имеет конечное число невырожденных неподвижных точек, принадлежащих компактным слоям $\{L_i\}$, и орбиты потока X_t трансверсальны ко всем слоям, кроме $\{L_i\}$, оператор A_f, вообще говоря, не является ядерным оператором. Можно показать, что в данном случае оператор A_f принадлежит алгебре $\mathcal{K}(M, M^0)$, где $M^0 = \cup L_i$, и, тем самым, определен его регуляризованный след r-Tr(A_f). Этот факт позволяет определить число Лефшеца потока X_t в данном случае. Эти результаты являются частью нашего совместного проекта с Х. Альваресом Лопесом и Э. Лейчтнамом и будут обсуждаться в последующих работах.

Алгебры операторов, ассоциированные с компактным многообразием с отмеченным подмногообразием, строились ранее в работах Б.Ю. Стернина, В.Е. Шаталова и А.Ю. Савина в связи с исследованием краевых задач для эллиптических уравнений на компактном многообразии, для которых граничные условия задаются как на крае многообразия, так и на гладких подмногообразиях (коразмерности ≥ 1), не являющихся краем. Задачи подобного типа впервые рассматривал Соболев [2]. Общая постановка таких задач и их исследование были даны в [3] и, следуя этой работе, они часто называются задачами Соболева. Алгебра операторов, соответствующая задачам Соболева, была построена в работе [4]. Она получается как расширение алгебры псевдодифференциальных операторов с помощью специального класса операторов, ассоциированных с подмногообразием — операторов Грина. В работе [5] было показано, что теория задач Соболева может быть представлена как относительная теория, т.е. она ассоциирована с гладким вложением $i : X \hookrightarrow M$ замкнутых многообразий. Относительные теории являются более простыми и элегантными, чем теории, не обладающие этим свойством. Например, вычисление индекса в относительной теории сводится к вычислению индекса на гладких замкнутых многообразиях M и X; напротив, в теории классических краевых задач, которая не является относительной (т.к. ассоциирована с многообразием с краем), вычисление индекса весьма громоздко. В работах [6, 7, 8] Б.Ю. Стернин распространил относительную эллиптическую теорию и на случай, когда подмногообразие является стратифицированным подмногообразием, представимым в виде объединения трансверсально пересекающихся гладких подмногообразий (см. также [9, 10]).

Построенная в данной работе теория также является относительной теорией в смысле Б.Ю. Стернина [5]. Для ее построения мы используем методы работ Мельроуза [11, 12, 13], в частности, предложенный в них геометрический подход к построению и исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов. Введенные нами классы операторов и понятие регуляризованного следа являются аналогами соответствующих объектов, введенных ранее Мельроузом для многообразий с углами.

План статьи следующий. Во втором разделе мы даем определение конормальных функций и конормальных плотностей на многообразии Z с отмеченным подмногообразием Z^0 и описываем их основные свойства. Подмногообразие Z^0 необязательно является гладким, а представляется в виде объединения гладких связных подмногообразий коразмерности 1, пересекающихся трансверсально. Мы будем называть такие подмногообразия стратифицированными. Одним из основных примеров для нас является следующий: $Z = X \times X$, $Z^0 = (X^0 \times X) \cup (X \times X^0)$, где X — гладкое многообразие и X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности один. Введенное нами понятие конормальной функции является обобщением классического понятия конормальной функции на гладком подмногообразии, введенным Хермандером. Аналогичное понятие было введено Мельроузом для многообразий с углами. В третьем разделе мы строим различные классы сингулярных интегральных операторов и формулируем теоремы о действии в пространствах конормальных функций и о композиции для операторов из этих классов. Доказательства этих теорем приведены в четвёртом разделе. Они используют теоремы о поднятии и опускании для конормальных функций при отображениях многообразий с отмеченными подмногообразиями и конструкции некоторых вспомогательных многообразий. В пятом разделе мы определяем функционал регуляризованного следа и доказываем его основные свойства, в частности, теорему о регуляризованном следе коммутатора. В приложениях A и B мы приводим доказательства теорем о поднятии и опускании.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

2. Конормальные плотности и их свойства

В данном разделе мы введем класс конормальных функций на произвольном многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 коразмерности один.

2.1. Стратифицированные подмногообразия. Пусть X — гладкое многообразие размерности n. Подмножество $X^0 \subset X$ будем называть стратифицированным подмногообразием многообразия X (коразмерности один), если X^0 представляется в виде объединения конечного числа гладких подмногообразий $X_1, X_2, \ldots, X_r$ размерности $n-1$, которые пересекаются трансверсально. Мы будем предполагать, что подмногообразия $X_1, X_2, \ldots, X_r$ связны, и будем называть их компонентами стратифицированного подмногообразия X^0.

Здесь трансверсальное пересечение понимается в следующем смысле. Пусть $p \in X^0$. Предположим, что p принадлежит ровно ℓ компонентам подмногообразия X^0, $\ell \geq 1$. Тогда существует локальная система координат $\varkappa : U \subset X \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, определенная в окрестности точки p, такая, что пересечения компонент подмногообразия X^0, содержащих точку p, с U задаются уравнениями $x_d = 0$ для любого $d \in \{1, \ldots, \ell\}$. Любая такая система координат будет называться адаптированной в точке p. Без потери общности, мы можем предполагать, что $\varkappa(U) = D_1 \times D_2$, где $D_1 \subset \mathbb{R}^\ell$ и $D_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$ — некоторые открытые подмножества. Часто для определённости мы будем полагать, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$, и адаптированная в точке p система координат выбрана таким образом, что для любого $d \in \{1, \ldots, \ell\}$ пересечение $X_d \cap U$ задается уравнением $x_d = 0$. Мы будем всегда рассматривать регулярные локальные системы координат, то есть такие системы координат $\varkappa : U \subset X \to \mathbb{R}^n$, для которых существует система координат $\bar{\varkappa} : V \subset X \to \mathbb{R}^n$, определенная в таком открытом множестве V, что $\overline{U} \subset V$.

2.2. Индексные множества и семейства. Обозначим через $\mathbb{Q}_1$ множество рациональных чисел, представимых в виде $z = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ взаимно просты и q нечетно, и через $\mathbb{Z}_+$ множество целых неотрицательных чисел.

Определение 1. *Индексным множеством называется множество $E \subset \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. *E ограничено снизу, т.е. существует такое $N_1 \in \mathbb{Q}_1$, что для любого $(z,p) \in E$ справедливо неравенство: $z \geq N_1$;*
2. *$(z,p) \in E$, $p \geq q \Rightarrow (z,q) \in E$;*
3. *для любого $N_2 \in \mathbb{Q}_1$ множество $E \bigcap \{(z,p) : z \leqslant N_2\}$ конечно;*
4. *$(z,p) \in E, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (z+j,p) \in E$.*

Определение 2. *Скажем, что на стратифицированном подмногообразии $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ задано индексное семейство $\mathcal{E}$, если любой его компоненте X_j поставлено в соответствие индексное множество $\mathcal{E}(X_j) = E_j$, $j = 1, \ldots, r$.*

2.3. Конормальные функции и их свойства. Пусть X — гладкое многообразие и $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ — его стратифицированное подмногообразие. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на X^0. Определение конормальной функции в точке $p_0 \in X^0$ будет дано индукцией по числу ℓ компонент подмногообразия X^0, содержащих точку p_0.

База индукции: $\ell = 1$. Предположим, что точка p_0 принадлежит в точности одной компоненте, для определенности, $p_0 \in X_1$, $p_0 \notin X_2 \cup \ldots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p_0 систему координат $\varkappa : U \subset X \to \varkappa(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение 3. *Функция u называется конормальной в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если существует такая окрестность $V \subset U$ точки p_0, $\varkappa(V) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, что функция u определена и является гладкой на $V \setminus X^0$, и*

$$u \sim \sum_{(z,q)\in E_1} a_{z,q}(x^0) x^z \ln^q |x|,$$

где $a_{z,q} \in C^\infty(V_2)$. Здесь знак $\sim$ означает, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ и $N \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$, что:

$$\left| (x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(u(x,x^0) - \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z\leqslant N}} a_{z,q}(x^0) x^z \ln^q |x| \right) \right| < C|x|^{N+1}, \quad (x,x^0) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times V_2, x \neq 0.$$

Шаг индукции. Пусть $\ell \geq 2$. Предположим, что определение конормальной функции в точке дано для любого гладкого многообразия Y с отмеченным стратифицированным подмногообразием Y^0, на котором задано индексное семейство $\mathcal{E}^0$, и для любой точки $p_1 \in Y^0$ при условии, что p_1 принадлежит в точности k компонентам подмногообразия Y^0 при $k < \ell$.

Предположим теперь, что X — гладкое многообразие с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 и точка $p_0 \in X^0$, причём p_0 принадлежит ровно ℓ компонентам подмногообразия X^0. Для определённости будем считать, что $p_0 \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p_0 \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p_0 систему координат $\varkappa : U \subset X \to \varkappa(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ такую, что X_j задается уравнением $x_j = 0$.

Рассмотрим многообразие $Z = \mathbb{R}^{\ell-1} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ с координатами $(x_2, \ldots, x_\ell, x^0)$, где $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 2, \ldots, \ell$, $x^0 \in \mathbb{R}^{n-\ell}$, наделенное стратифицированным подмногообразием $Z^0 = \{x_2 = 0\} \cup \ldots \cup \{x_\ell = 0\}$. Зададим индексное семейство $\mathcal{E}'$ на Z^0 по формуле $\mathcal{E}'(\{x_j = 0\}) = E_j$, где $j = 2, \ldots, \ell$. Z^0 состоит в точности из $(\ell-1)$-й компоненты, поэтому понятие конормальности функции в произвольной точке подмногообразия Z^0 определено по предположению индукции.

Определение 4. *Функция u называется конормальной в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если существует такая окрестность V точки p_0, $\varkappa(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^\ell \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$, что функция u определена и является гладкой на $V \setminus X^0$, и*

$$u \sim \sum_{(z,q)\in E_1} a_{z,q}(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|, \tag{1}$$

где функции $a_{z,q}$ являются конормальными функциями на $(-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell-1} \times V_2 \subset Z$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}'$.

Знак $\sim$ означает, что найдутся такие $M_2, \ldots, M_\ell \in \mathbb{R}$, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-\ell}$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$, что:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(u(x_1, x_2, \ldots, x_\ell, x^0) - \sum_{\substack{(z,q)\in E_1\\ z\leqslant N_1}} a_{z,q}(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|\right)\right|$$
$$< C|x_2|^{M_2} \cdot \ldots \cdot |x_\ell|^{M_\ell} |x_1|^{N+1}, \quad (x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^\ell \times V_2, x_j \neq 0.$$

Можно показать, что определение конормальной функции в точке не зависит от выбора локальной системы координат. В частности, разложение типа (1) имеет место для любой из переменных $x_2, \ldots, x_\ell$.

Определение 5. *Функция u называется конормальной функцией на многообразии X со стратифицированным подмногообразием X^0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если она является гладкой на $X \setminus X^0$ и конормальной в каждой точке $p_0 \in X^0$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.*

Класс конормальных функций на многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ будем обозначать $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0)$.

Замечание 1. *(1) Если $\mathcal{E}$ — тривиальное индексное семейство, т.е. $\mathcal{E}(X_j) = \{(\ell, 0) : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ для любого $j = 1, \ldots, r$, то $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0) = C^\infty(X)$.*

(2) Для любой функции $u \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1}_{phg}(X, X^0)$ и любой функции $v \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_2}_{phg}(X, X^0)$ имеют место включения $u + v \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2}_{phg}(X, X^0)$, а также $uv \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}_{phg}(X, X^0)$.

Пример 1. *В простейшем примере, когда $X = \mathbb{R}^2$ и $X^0 = (\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$, функция $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ на X не является конормальной в точке $(0, 0)$.*

Понятие конормальности легко обобщается на сечения векторного расслоения.

Определение 6. *Пусть X — гладкое многообразие, X^0 — стратифицированное подмногообразие, G — гладкое векторное расслоение на X. Скажем, что сечение μ является конормальным сечением, $\mu \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, G)$, если в любой тривиализации $G|_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ расслоения G над координатной окрестностью $U \subset X$ сечение μ имеет вид $\mu(x) = (x, (u_1(x), \ldots, u_r(x))), x \in U$, где $u_j \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0)$, $j = 1, \ldots, r$.*

2.4. Конормальные плотности. Мы будем рассматривать операторы, действующие на полуплотностях. Напомним, что гладкая s-плотность μ на гладком многообразии M размерности n записывается в произвольной локальной системе координат в виде $\mu = u(x_1, \dots, x_n)|dx_1 \dots dx_n|^s$, где u — гладкая функция. Гладкие s-плотности являются гладкими сечениями некоторого линейного расслоения Ω_M^s на M. Будем обозначать через $C^\infty(M, \Omega_M^s)$ пространство гладких s-плотностей на M.

Определение 7. *Пусть X — гладкое многообразие и $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ — его стратифицированное подмногообразие. s-плотность μ на X называется конормальной относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если в любой адаптированной локальной системе координат с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ она имеет вид*

$$\mu = \frac{u(x, x^0)}{|x|^s}|dx dx^0|^s = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^s,$$

где u — конормальная функция относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Пространство конормальных s-плотностей на X относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ естественно изоморфно пространству $\mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}}(X, X^0, \Omega_{X,X_0}^s)$ конормальных сечений некоторого линейного расслоения Ω_{X,X_0}^s на X. Конструкция расслоения Ω_{X,X_0}^s аналогична конструкции расслоения b-плотностей на многообразии с углами, предложенной Мельроузом, и мы ее опустим.

3. Сингулярные интегральные операторы

В этом разделе мы введем классы сингулярных интегральных операторов на многообразии с отмеченным подмногообразием.

3.1. Классы $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$. Пусть X и Y — гладкие компактные многообразия такие, что $\dim X = n$, $\dim Y = m$, X^0, Y^0 — гладкие подмногообразия коразмерности 1 многообразий X и Y соответственно.

Полуплотность $k_A \in C^\infty\left((X \times Y) \setminus (\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}), \Omega_{X\times Y}^{\frac{1}{2}}\right)$ определяет оператор

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}}),$$

действие которого на полуплотность $\mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой:

$$A\mu = \int\limits_Y k_A \mu. \tag{2}$$

Полуплотность k_A называется ядром оператора A.

Поясним смысл выражения, стоящего в правой части формулы (2). Ядро k_A и плотность μ можно записать в виде:

$$k_A = K_A(p_1, p_2)|dv_X(p_1)dv_Y(p_2)|^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = u(p_2)|dv_Y(p_2)|^{\frac{1}{2}},$$

где $K_A \in C^\infty\left((X \times Y) \setminus (\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\})\right)$, $u \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0)$, $|dv_X|$ — некоторая фиксированная положительная гладкая плотность на X и $|dv_Y|$ — некоторая положительная гладкая плотность на Y. Тогда их произведение

$$k_A\mu = K_A(p_1, p_2)u(p_2)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}|dv_Y(p_2)|$$

является плотностью на Y. Ее можно проинтегрировать по Y, и в результате получится полуплотность на X:

$$\int\limits_Y k_A\mu = \left(\int\limits_Y K_A(p_1,p_2)u(p_2)|dv_Y(p_2)|\right)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что формула (2) согласуется со стандартным выражением для интегрального оператора с ядром K_A:

$$A\mu = Au(p_1)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}, \quad Au(p_1) = \int\limits_Y K_A(p_1,p_2)u(p_2)dv_Y(p_2).$$

Если $p_1 \notin X^0$, то интеграл, стоящий в правой части, сходится.

Рассмотрим стратифицированное подмногообразие $\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}$ многообразия $X\times Y$. Любое индексное семейство $\mathcal{E}$ на $\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}$ записывается в виде $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$, где $\mathcal{E}_1$ — индексное семейство на $X^0\times Y$ и $\mathcal{E}_2$ — индексное семейство на $X\times Y^0$. В дальнейшем мы будем также рассматривать индексное семейство $\mathcal{E}_1$ как индексное семейство на X^0 и $\mathcal{E}_2$ как индексное семейство на Y^0.

Определение 8. *Пусть $\mathcal{E}_1$ — индексное семейство на X^0, $\mathcal{E}_2$ — индексное семейство на Y^0 и $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ — соответствующее индексное семейство на $\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}$. Будем говорить, что интегральный оператор A, задаваемый формулой* (2)*, принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X,X^0;Y,Y^0)$, если*

$$k_A \in \mathcal{A}^{(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)}_{phg}\left(X\times Y,\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\},\Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y,\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}}\right).$$

Очевидно, что $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X,X^0;Y,Y^0)$ является линейным пространством.

Пример 2. *В простейшем примере, когда $X=Y=\mathbb{R}$ и $X^0=Y^0=\{0\}$, интегральный оператор A с ядром*

$$k_A = Cx^\alpha y^\beta \ln^p|x|\ln^q|y|\left|\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}\right|^{1/2}, \quad x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X,X^0;Y,Y^0)$ с $\mathcal{E}_1(X^0)=\{(\alpha+j,k) : j\in\mathbb{Z}_+, k=0,1,\ldots,p\}$, $\mathcal{E}_2(Y^0)=\{(\beta+j,k) : j\in\mathbb{Z}_+, k=0,1,\ldots,q\}$.

Для индексного множества E положим $\inf E := \inf\{z : (z,p)\in E\}$. Если $\mathcal{E}$ — индексное семейство на стратифицированном подмногообразии $X^0 = X_1\cup\ldots\cup X_r$ многообразия X, то положим $\inf\mathcal{E} = \inf\limits_{j=1,\ldots,r}\inf\mathcal{E}(X_j)$.

Теорема 1. *Пусть $A\in\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X,X^0;Y,Y^0)$. Тогда для любого индексного семейства $\mathcal{F}$ на Y^0, удовлетворяющего условию $\inf(\mathcal{E}_2+\mathcal{F})>0$, оператор A продолжается до оператора*

$$A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{phg}(Y,Y^0,\Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1}_{phg}(X,X^0,\Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}).$$

Теорема 2. *Если $A\in\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X,X^0;Y,Y^0)$ и $B\in\mathcal{K}^{\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3}(Y,Y^0;Z,Z^0)$, то при условии $\inf(\mathcal{E}_2+\mathcal{F}_2)>0$ их композиция $C=A\circ B$ корректно определена и принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_3}(X,X^0;Z,Z^0)$.*

3.2. Нормальные координаты около подмногообразия. Пусть M — компактное многообразие, M^0 — его гладкое подмногообразие. Выберем риманову метрику g_M на M. Рассмотрим нормальное расслоение $N(M^0) := TM/TM^0 \cong (TM^0)^\perp$. Напомним, что экспоненциальное отображение $\exp : N(M^0) \to M$ римановой метрики g_M для подмногообразия M^0 определяется следующим образом. Пусть $v \in N_x(M^0)$, $x \in M$. Существует единственная геодезическая $\gamma : (-\infty, +\infty) \to M$, проходящая через точку x с вектором скорости v, то есть, такая, что $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = v$. Тогда $\exp(v) := \gamma(1)$.

Можно отождествить M^0 с нулевым сечением расслоения $N(M^0)$, что позволяет рассматривать M^0 как подмногообразие в M, и как подмногообразие в $N(M^0)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Существует окрестность $U \supset M^0$ в $N(M^0)$, такая что ограничение $\exp|_U$ на U является диффеоморфизмом U на некоторую окрестность $\exp(U)$ подмногообразия M^0.*

Множество $\exp(U)$ называется трубчатой окрестностью подмногообразия M^0 в M. Без потери общности мы можем предполагать, что $\exp(U)$ является ε-окрестностью подмногообразия M^0 при некотором $\varepsilon > 0$.

Предположим, что подмногообразие M^0 имеет коразмерность один, и нормальное расслоение $N(M^0)$ является тривиальным. Пусть $U \supset M^0$ как в предложении 1. Возьмём точку $p \in \exp U$. Этой точке взаимнооднозначно соответствует пара $(x, x^0) \in N(M^0)$, где $x^0 \in M^0$, $x \in N_{x^0}(M^0)$, $\exp(x) = p$. Поскольку риманова метрика задаёт изоморфизм $N_{x^0}(M^0) \cong \mathbb{R}$, можно считать, что $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, любая точка p, принадлежащая трубчатой окрестности $\exp(U)$, однозначно задаётся набором (x, x^0), где $x \in \mathbb{R}$, $x^0 \in M^0$. Отображение $\exp(U) \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ будем называть нормальной системой координат около M^0.

3.3. Классы $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}$. Пусть X — гладкое компактное многообразие размерности n, g_X — риманова метрика на X, $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ — его гладкое подмногообразие коразмерности 1. Тем самым, подмногообразия $X_1, \ldots, X_r$ попарно не пересекаются. Предположим, что нормальные расслоения подмногообразий $X_1, \ldots, X_r$ тривиальны.

Рассмотрим оператор $A : C_0^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac12}) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac12})$ с ядром

$$k_A \in C^\infty\left((X \times X) \setminus (\{X^0 \times X\} \cup \{X \times X^0\}), \Omega^{\frac12}_{X\times X}\right).$$

Всюду в дальнейшем $|dx^0|$ — фиксированная гладкая положительная плотность на X^0.

Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности $\exp(U) = V$ подмногообразия X^0. Пусть (x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) — соответствующие координаты на $V \times V$. Положим $\Pi_\varepsilon = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < \varepsilon, \left|\frac{x}{s}\right| < \varepsilon\}$. На множестве $(V \setminus X^0) \times (V \setminus X^0)$ введём систему координат $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ по формулам

$$x = x_1, \quad s = \frac{x_1}{x_2}. \tag{3}$$

Тогда полуплотность

$$k_A = K_A(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)\left|\frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2}dx_1^0 dx_2^0\right|^{\frac12}$$

в локальной системе координат (x, s, x_1^0, x_2^0) записывается в виде:

$$k_A = K_A(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0)\left|\frac{dx}{x}\frac{ds}{s}dx_1^0 dx_2^0\right|^{\frac12}.$$

Определим функцию $\widetilde{K}_A$ на $\Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ по формуле:

$$\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0). \tag{4}$$

Пусть $\mu \in C_0^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$, $\operatorname{supp}\mu \subset V$. Запишем $\mu = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^{\frac{1}{2}}$, где $u \in C_0^\infty(V) \cong C_0^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0)$. Тогда

$$A\mu\Big|_V = \left(\int_{X^0}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) u\left(\frac{x}{s}, x_2^0\right)\frac{ds}{s}dx_2^0\right)\left|\frac{dx}{x}dx_1^0\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 9. *Пусть $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — индексные семейства на X^0, $\mathcal{E}_O = \{\mathcal{E}_{O,ij} : i, j = 1, \dots, r\}$, где $\mathcal{E}_{O,ij}$ — индексное множество для любого $i, j = 1, \dots, r$. Скажем, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$, если:*

(1) Ядро k_A является конормальной полуплотностью на $(X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)$ с отмеченным подмногообразием $\{X^0 \times (X \setminus X^0)\} \cup \{(X \setminus X^0) \times X^0\}$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_1 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

$$\widehat{E}_1(X_i \times (X \setminus X^0)) = \mathcal{E}_1(X_i), \quad \widehat{E}_1((X \setminus X^0) \times X_j) = \mathcal{E}_2(X_j).$$

(2) Функция $\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0)$ на $\Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ является конормальной на подмногообразии $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_2$:

$$\widehat{E}_2(\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}.$$

(3) Функция $\widehat{K}_A$ на $\{(x, \tau) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon, |x\tau| < \varepsilon\} \times X^0 \times X^0$, определяемая формулой

$$\widehat{K}_A(x, \tau, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, x\tau, x_1^0, x_2^0),$$

является конормальной на подмногообразии $(\{0\} \times \mathbb{R} \times X^0 \times X^0) \cup ((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times X^0 \times X^0)$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_3 = (\mathcal{E}_O, \mathcal{E}_2)$

$$\widehat{E}_3(\{0\} \times \mathbb{R} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}, \quad \widehat{E}_3((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_2(X_j).$$

(4) Функция $\widehat{\widehat{K}}_A$ на $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |tx| < \varepsilon, |x| < \varepsilon\} \times X^0 \times X^0$, определяемая формулой

$$\widehat{\widehat{K}}_A(t, x, x_1^0, x_2^0) = K_A\left(tx, x, x_1^0, x_2^0\right), \quad (t, x, x_1^0, x_2^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R} \times X^0 \times X^0,$$

является конормальной на подмногообразии $(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0 \times X^0) \cup (\mathbb{R} \times \{0\} \times X^0 \times X^0)$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_4 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_O)$

$$\widehat{E}_4(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_1(X_i), \quad \widehat{E}_4(\mathbb{R} \times \{0\} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}.$$

Очевидно, что класс $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$ является линейным пространством.

Замечание 2. *Можно показать, что $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0) \subset \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$, где $\mathcal{E}_{O,ij} = \mathcal{E}_1(X_i) + \mathcal{E}_2(X_j)$.*

Пример 3. *В простейшем примере, когда $X = \mathbb{R}$ и $X^0 = \{0\}$, интегральный оператор A с ядром*

$$k_A = x^\alpha y^\beta (x^2 + y^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln^p |x| \ln^q |y| \ln^r (x^2 + y^2)\left|\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}\right|^{1/2},$$

принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$, где $\mathcal{E}_1(X^0) = \{(\alpha + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p\}$, $\mathcal{E}_2(X^0) = \{(\beta + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, q\}$ и $\mathcal{E}_O = \{(\alpha + \beta + \gamma + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p + q + r\}$.

Пусть E_1, E_2 — произвольные индексные множества. Положим

$$E_1 \overline{\cup} E_2 = E_1 \cup E_2 \cup \{(z, p_1 + p_2 + 1) : (z, p_1) \in E_1, (z, p_2) \in E_2\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$. *Тогда для любого индексного семейства* $\mathcal{F}$, *удовлетворяющего условию* $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$, *оператор* A *продолжается до оператора*

$$A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{phg}(X, X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}) \to \mathcal{A}^{\mathcal{G}}_{phg}(X, X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}),$$

где

$$\mathcal{G}(X_i) = \mathcal{E}_1(X_i) \overline{\bigcup} \left(\overline{\bigcup}_j (\mathcal{F}(X_j) + \mathcal{E}_{O,ij}) \right), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Теорема 4. *Пусть* $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}^A_1, \mathcal{E}^A_2, \mathcal{E}^A_O}(X, X^0)$ *и* $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}^B_1, \mathcal{E}^B_2, \mathcal{E}^B_O}(X, X^0)$, *причем* $\inf(\mathcal{E}^A_2 + \mathcal{E}^B_1) > 0$. *Тогда определена композиция* $C = A \circ B$, *которая принадлежит классу* $\mathcal{K}^{\mathcal{E}^C_1, \mathcal{E}^C_2, \mathcal{E}^C_O}(X, X^0)$, *где*

$$\mathcal{E}^C_1(X_i) = \mathcal{E}^A_1(X_i) \overline{\bigcup} \left(\bigcup_k \left(\mathcal{E}^A_{O,ik} + \mathcal{E}^B_1(X_k) \right) \right),$$

$$\mathcal{E}^C_2(X_j) = \mathcal{E}^B_2(X_j) \overline{\bigcup} \left(\bigcup_k \left(\mathcal{E}^A_2(X_k) + \mathcal{E}^B_{O,kj} \right) \right),$$

$$\mathcal{E}^C_{O,ij} = \left(\bigcup_k \left(\mathcal{E}^A_{O,ik} + \mathcal{E}^B_{O,kj} \right) \right) \overline{\bigcup} \left(\mathcal{E}^A_1(X_i) + \mathcal{E}^B_2(X_j) \right).$$

Замечание 3. *По-видимому, полученные результаты можно распространить на случай, когда нормальное расслоение подмногообразия* X^0 *нетривиально. Для этого необходимо перейти на соответствующее двулистное накрытие и работать с* $\mathbb{Z}_2$*-инвариантными операторами. Соответствующая техника была разработана для многообразий с углами в работе* [14].

4. Доказательства основных теорем

В данном разделе мы приводим доказательства теорем 1, 2, 3 и 4. Как это уже было сказано во введении, наш подход к построению и исследованию классов сингулярных интегральных операторов является обобщением геометрического подхода, предложенного Мельроузом ([11, 12, 13], см. также [15]). Специфика подхода Мельроуза заключается в том, что классы операторов определяются при помощи некоторых условий на ядро k_A оператора A из данного класса. Эти условия являются условиями конормальности либо для самого ядра k_A, либо для некоторой полуплотности $\hat{k}_A$, являющейся поднятием ядра k_A на некоторое вспомогательное многообразие, ассоциированное с $X \times X$. Для того чтобы связать оператор A с ядром $\hat{k}_A$, действие интегрального оператора A на полуплотностях выражается в терминах операторов поднятия и опускания. Тем самым, исследование данного класса интегральных операторов сводится к использованию операторов поднятия и опускания и их свойств. Поэтому, мы начнем с обсуждения операторов поднятия и опускания.

4.1. Поднятия.

Напомним определения оператора поднятия, ассоциированного с отображением гладких многообразий.

Пусть X и Y — гладкие многообразия, $f : X \to Y$ — гладкое отображение. Для любого векторного расслоения $p : G \to Y$ на Y определим векторное расслоение $p_1 : f^*G \to X$ следующим образом:

$$f^*G := \{(x, v) | x \in X; v \in G_{f(x)}\}, \quad p_1(x, v) := x.$$

Определение 10. *Оператором поднятия называется линейный оператор*

$$f^*: C^\infty(Y, G) \to C^\infty(X, f^*G),$$

задаваемый для любого $s \in C^\infty(Y, G)$ формулой

$$f^*s(x) = (x, s(f(x))), \quad x \in X.$$

Пусть X, Y — гладкие многообразия размерности n и m соответственно, $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ и $Y^0 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{r^0}$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и Y соответственно.

Определение 11. *Гладкое отображение $f: X \to Y$ называется относительным, если для любой точки $p \in X^0$ выполнено следующее условие. Предположим для определенности, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$, $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$, и $f(p) \in Y_1 \cap \ldots \cap Y_{\ell_0}$, $f(p) \in Y_{\ell_0+1} \cup \ldots \cup Y_{r_0}$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, определенную в окрестности U_p, и адаптированную в точке $f(p)$ систему координат с координатами $(y, y^0) \in \mathbb{R}^{\ell_0} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}$. В этих координатах отображение f записывается в виде*

$$y_i = f_i(x, x^0), \quad i = 1, \ldots, \ell_0; \quad y_i^0 = f_i(x, x^0), \quad i = \ell_0 + 1, \ldots, m.$$

Тогда найдутся гладкие функции a_i, $i = 1, \ldots, \ell_0$, такие, что $a_i(x, x^0) \neq 0$, и в некоторой окрестности точки p справедливо представление:

$$f_i(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = a_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}},$$

где γ_{ij} — целые неотрицательные числа, $i = 1, \ldots, \ell_0$, $j = 1, \ldots, \ell$.

Числа γ_{ij} зависят только от компонент X_j и Y_i и будут обозначаться через $e_f(X_j, Y_i)$. Отметим, что из определения относительного отображения вытекает, что $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$.

Теорема 5. *Пусть G — линейное расслоение над Y, $\mathcal{E}^0$ — индексное семейство на подмногообразии Y^0. Тогда для любого относительного отображения $f: (X, X^0) \to (Y, Y^0)$ оператор f^* продолжается до оператора*

$$f^*: \mathcal{A}^{\mathcal{E}^0}_{phg}(Y, Y^0, G) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, f^*G),$$

где индексное семейство $\mathcal{E}$ на X^0 имеет вид:

$$\mathcal{E}(X_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_i e_f(X_j, Y_i) z_i, \sum_i q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{E}^0(Y_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по таким $i = 1, \ldots, r_0$, для которых $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$.

Доказательство теоремы 5 будет дано в приложении А.

4.2. Опускания. Напомним определения оператора опускания, ассоциированного с отображением гладких многообразий.

Обозначим

$$\mathcal{D}'(Y, G) = C_0^\infty(Y, G^*)'.$$

Имеет место включение

$$C_0^\infty(Y, G \otimes \Omega_Y) \subset \mathcal{D}'(Y, G).$$

Для любого $u \in C_0^\infty(Y, G \otimes \Omega_Y)$ вида $u = s \otimes \mu$, где $s \in C_0^\infty(Y, G)$, $\mu \in C_0^\infty(Y, \Omega_Y)$, соответствующий функционал на $C_0^\infty(Y, G^*)$ задается формулой

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_Y \langle s(y), \varphi(y) \rangle \mu(y) \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in C_0^\infty(Y, G^*),$$

где $\langle s(y), \varphi(y) \rangle \in \mathbb{C}$ обозначает значение функционала $\varphi(y) \in G_y^*$ на $s(y) \in G_y$.

Определение 12. *Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия, G — векторное расслоение на Y. Пусть задано гладкое отображение $f : X \to Y$. Оператором опускания называется линейный оператор*

$$f_* : \mathcal{D}'(X, f^*G) \to \mathcal{D}'(Y, G),$$

задаваемый для любого $\mu \in \mathcal{D}'(X, f^*G)$ формулой:

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, f^*\varphi\rangle, \quad \varphi \in C^\infty(Y, G^*).$$

Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия размерности n и m соответственно, $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ и $Y^0 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{r^0}$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и Y соответственно.

Определение 13. *Гладкое отображение $f : X \to Y$ называется относительным расслоением, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *f — относительное отображение;*
2. *f сюрьективно;*
3. *Для любой компоненты X_j подмногообразия X^0 найдётся не более одной компоненты Y_i подмногообразия Y^0 такой, что $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$;*
4. *Пусть $p \in X^0$ такая, что $f(p) = p_0 \notin Y^0$. Предположим, для определенности, что $p \in X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \bigcup \ldots \bigcup X_r$. Как в определении 11, запишем отображение f в локальных координатах в виде*

   $$y_i^0 = f_i(x, x^0), \quad (x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

   Тогда ранг матрицы Якоби $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1^0,\ldots,x_{n-\ell}^0)}$ равен m.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{E}$ — такое индексное семейство на X^0, что для любого $j = 1, \ldots, r$, такого что $e_f(X_j, Y_i) = 0$ для любого $i = 1, \ldots, r_0$, выполнено неравенство:* $\inf \mathcal{E}(X_j) > 0$. *Тогда для любого относительного расслоения $f : (X, X^0) \to (Y, Y^0)$ и для любого линейного расслоения G на Y оператор опускания f_* ограничивается до оператора:*

$$f_* : \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, f^*G \otimes \Omega_{X,X^0}) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}^0}_{phg}(Y, Y^0, G \otimes \Omega_{Y,Y^0}),$$

где индексное семейство $\mathcal{E}^0$ на Y^0 имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}^0(Y_i) = \overline{\bigcup}_{j: e_f(X_j,Y_i)\neq 0}\left\{\left(\frac{z}{e_f(X_j, Y_i)}, q\right) : (z, q) \in \mathcal{E}(X_j)\right\}, \quad i = 1, \ldots, r_0.$$

Доказательство теоремы 6 будет дано в приложении B.

4.3. Доказательства теорем 1 и 2. Докажем теорему 1. Непосредственным вычислением легко проверить, что отображение

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac12}) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac12}),$$

определяемое оператором $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$, можно представить в виде

$$A\mu = \pi_{1*}(k_A \pi_2^*\mu), \quad \mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac12}),$$

где отображения $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ задаются формулами:

$$\pi_1(x, y) = x; \quad \pi_2(x, y) = y. \tag{6}$$

Пусть индексное семейство $\mathcal{F}$ на Y^0 удовлетворяет условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$ и $\mu \in \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{phg}(Y, Y^0, \Omega^{\frac12}_{Y,Y^0})$. Можно показать, что π_2 — относительное отображение, причем $e_{\pi_2}(X^0 \times Y, Y^0) = 0$, $e_{\pi_2}(X \times Y^0, Y^0) = 1$, поэтому по теореме 5 имеем:

$$\pi_2^*\mu \in \mathcal{A}^{0,\mathcal{F}}_{phg}(X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}, \pi_2^*\Omega^{\frac12}_{Y,Y^0}).$$

Из свойств конормальных функций. отмеченных в замечании 1, следует, что:

$$k_A\pi_2^*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2+\mathcal{F}}(X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\},\Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}}\otimes\pi_2^*\Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}).$$

Имеет место изоморфизм векторных расслоений:

$$\Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}}\cong\pi_1^*\Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}\otimes\pi_2^*\Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}.$$

Следовательно:

$$k_A\pi_2^*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E},\mathcal{E}_2+\mathcal{F}}(X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\},\pi_1^*\Omega^{-\frac{1}{2}}_{X,X^0}\otimes\Omega_{X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}}).$$

Так как $\inf(\mathcal{E}_2+\mathcal{F})>0$, и можно показать, что π_1 — относительное расслоение, причем $e_{\pi_1}(X^0\times Y,X^0)=1$, $e_{\pi_1}(X\times Y^0,X^0)=0$, применяя теорему 6 с $G=\Omega^{-\frac{1}{2}}_{X,X^0}$, $f=\pi_1$, получаем, что $A\mu\in\mathcal{A}^{\mathcal{E}_1}_{phg}(X,X^0,\Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0})$, что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогичным образом. Ядро композиции $C=A\circ B$ представляется в виде:

$$k_C=\pi_{2*}(\pi_3^*k_A\pi_1^*k_B),$$

где отображения $\pi_1:X\times Y\times Z\to Y\times Z$, $\pi_2:X\times Y\times Z\to X\times Z$, $\pi_3:X\times Y\times Z\to X\times Y$ определяются по формулам:

$$\pi_1(x,y,z)=(y,z);\quad \pi_2(x,y,z)=(x,z);\quad \pi_3(x,y,z)=(x,y). \tag{7}$$

Далее остается применить теоремы 5 и 6.

4.4. Доказательство теоремы 3. Пусть X — гладкое компактное многообразие с выделенным подмногообразием X^0 коразмерности 1. Предположим, что на X задана риманова метрика g_X, и нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально.

Мы будем использовать растянутое произведение X^2_b, которое получается из $X\times X$ раздутием подмногообразия $X^0\times X^0\subset X\times X$. Напомним его определение. Прежде всего, введём нормальное расслоение $N(X^0\times X^0)=T(X\times X)/T(X^0\times X^0)$ над подмногообразием $X^0\times X^0$. Заметим, что $\operatorname{rank}N(X^0\times X^0)=2$.

Проективизацией расслоения $N(X^0\times X^0)$ называется расслоение $P(N(X^0\times X^0))$ над $X^0\times X^0$, слой которого в точке $p\in X^0\times X^0$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(X^0\times X^0)$. Зададим множество

$$V(N(X^0\times X^0))=\bigsqcup_{\ell\in P(N(X^0\times X^0))}V(\ell),$$

где $V(\ell)\subset N(X^0\times X^0)$ — одномерное линейное пространство, которое соответствует прямой ℓ. Таким образом, элементами множества $V(N(X^0\times X^0))$ являются наборы (x_1^0,x_2^0,ℓ,v), где $p=(x_1^0,x_2^0)\in X^0\times X^0$, $\ell\subset N_p(X^0\times X^0)$, $v\in V(\ell)$. Можно доказать, что множество $V(N(X^0\times X^0))$ имеет структуру гладкого многообразия. Введём отображение $\beta_N:V(N(X^0\times X^0))\to N(X^0\times X^0)$ по формуле:

$$\beta_N:(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\mapsto(x_1^0,x_2^0,v).$$

Пусть $g_{X\times X}$ — такая риманова метрика на $X\times X$, которая совпадает с метрикой g_X на множестве $TX\times\{0\}$ и на множестве $\{0\}\times TX$, которые являются подмножествами $TX\times TX=T(X\times X)$. Более того, множества $TX\times\{0\}$ и $\{0\}\times TX$ — взаимно ортогональны.

Согласно предложению 1, существует такая окрестность U множества $X^0\times X^0$ в $N(X^0\times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфизмом:

$$\exp_{X\times X}\big|_U:U\xrightarrow{\sim}\exp(U).$$

Введём отношение эквивалентности на множестве $[(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)]\sqcup\beta_N^{-1}(U)$, положив, что точки $(p_1,p_2)\in(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)$ и $(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точка $(p_1,p_2)\in\exp(U)$ и выполнено равенство $\exp(\beta_N(x_1^0,x_2^0,\ell,v))=(p_1,p_2)$.

Растянутое произведение X_b^2 определяется как множество классов эквивалентности на множестве $[(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)]\sqcup\beta_N^{-1}(U)$:

$$X_b^2=[(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)]\sqcup\beta_N^{-1}(U)/\sim,$$

Множество X_b^2 естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия.

Определим отображение $\beta : X_b^2 \to X\times X$ следующим образом: если $(p_1,p_2)\in(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)$, то

$$\beta(p_1,p_2)=(p_1,p_2);$$

если $(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U)$, то

$$\beta(x_1^0,x_2^0,\ell,v)=\exp(\beta_N(x_1^0,x_2^0,\ell,v)).$$

В X_b^2 имеется подмногообразие:

$$X_{Ob}^2=\{(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U) : v\equiv 0\}.$$

Положим

$$X_{1b}^2=X^0\times(X\setminus X^0)\sqcup\{(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U) : \ell=\ell_1\},$$

где ℓ_1 — одномерное подпространство в $N(X^0\times X^0)$, состоящее из векторов $(v_1,v_2)\in TX\times TX$, таких что $v_1\in TX^0$. Аналогично определим

$$X_{2b}^2=(X\setminus X^0)\times X^0\sqcup\{(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U) : \ell=\ell_2\},$$

где ℓ_2 — одномерное подпространство в $N(X^0\times X^0)$, состоящее из векторов $(v_1,v_2)\in TX\times TX$, таких что $v_2\in TX^0$.

Легко видеть, что X_{1b}^2, X_{2b}^2 и X_{Ob}^2 являются гладкими подмногообразиями в X_b^2. Эти подмногообразия пересекаются трансверсально, и их объединение является стратифицированным подмногообразием $\mathcal{X}_b^2$ многообразия X_b^2.

Фундаментальное свойство многообразия X_b^2 приведено в следующем утверждении.

Лемма 1. *Оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ тогда и только тогда, когда подъем $\tilde{k}_A=\beta^*k_A$ ядра k_A при отображении $\beta : X_b^2\to X\times X$ является конормальной функцией на X_b^2 относительно индексного семейства $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O)$ на $\mathcal{X}_b^2=X_{1b}^2\cup X_{2b}^2\cup X_{Ob}^2$.*

При помощи леммы 1 доказательство теоремы 3 проводится следующим образом. Определим отображения $\beta_1 : X_b^2\to X$, $\beta_2 : X_b^2\to X$ по формулам: $\beta_1=\pi_1\circ\beta$, $\beta_2=\pi_2\circ\beta$, где π_1 и π_2 определены в (6). Прямым вычислением можно показать, что оператор $A\in\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ представляется в виде

$$A\mu=\beta_{1*}(\tilde{k}_A\beta_2^*\mu),\quad \mu\in C_0^\infty(Y\setminus Y^0,\Omega_Y^{\frac{1}{2}}), \tag{8}$$

где $\tilde{k}_A$ определено в лемме 1. Далее доказательство теоремы 3 завершается аналогично доказательству теоремы 1 с использованием теорем 5 и 6.

4.5. Доказательство теоремы 4. Теорема 4 доказывается следующим образом. Сначала определяется многообразие X_b^3, которое является раздутием стратифицированного подмногообразия $\widehat{X}^0=(X\times X^0\times X^0)\cup(X^0\times X\times X^0)\cup(X^0\times X^0\times X)$ в $X\times X\times X$, затем отображения $\gamma_i : X_b^3\to X_b^2$, $i=1,2,3$, являющиеся аналогами проекций π_i, $i=1,2,3$ (см. (7)). Можно доказать, что ядро композиции k_C представимо в виде:

$$k_C=\gamma_{2*}(\gamma_3^*k_A\gamma_1^*k_B),$$

где $\gamma_3^* k_A$, $\gamma_1^* k_B$ — подъём ядер на X_b^3. Важным фактом является утверждение о том, что существует такое стратифицированное подмногообразие $\mathcal{X}_b^3$ в X_b^3, что отображения $\gamma_i : (X_b^3, \mathcal{X}_b^3) \to (X_b^2, \mathcal{X}_b^2)$ являются относительными расслоениями. После этого доказательство завершается с помощью теорем 5 и 6.

Опишем конструкции многообразия X_b^3, подмногообразия $\mathcal{X}_b^3$ и отображений γ_i. Рассмотрим нормальное расслоение $N(X^0 \times X^0 \times X^0) = T(X \times X \times X)/T(X^0 \times X^0 \times X^0)$ над подмногообразием $X^0 \times X^0 \times X^0$ ранга 3. Проективизацией расслоения $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ называется расслоение $P(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ над $X^0 \times X^0 \times X^0$, слой которого в точке $p \in X^0 \times X^0 \times X^0$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(X^0 \times X^0 \times X^0)$. Зададим множество:

$$V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(X^0 \times X^0 \times X^0))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ — одномерное линейное пространство, которое соответствует подпространству ℓ как элементу $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$. Таким образом, элементами множества $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ являются наборы (p, ℓ, v), где $p \in X^0 \times X^0 \times X^0$, $\ell \subset N_p(X^0 \times X^0 \times X^0)$ и $v \in V(\ell)$. Нетрудно показать, что множество $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ имеет структуру гладкого многообразия.

Определим подмногообразие V_0 в $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ по формуле

$$V_0 = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : v = 0\}.$$

Введём отображение $\gamma_N : V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) \to N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ по формуле

$$\gamma_N : (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, x_3^0, v).$$

Нетрудно показать, что ограничение γ_N на $V \setminus V_0$ определяет диффеоморфизм

$$\gamma_N \Big|_{V \setminus V_0} : V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) \setminus V_0 \xrightarrow{\sim} N(X^0 \times X^0 \times X^0) \setminus (X^0 \times X^0 \times X^0).$$

Аналогично двумерному случаю можно ввести понятие раздутия подмногообразий $\widehat{X}_1 = X \times X^0 \times X^0$, $\widehat{X}_2 = X^0 \times X \times X^0$ и $\widehat{X}_3 = X^0 \times X^0 \times X$ многообразия $X \times X \times X$.

Рассмотрим нормальное расслоение $N(\widehat{X}_1)$ подмногообразия $\widehat{X}_1$, слой которого в точке $p \in \widehat{X}_1$ имеет вид $N_p(\widehat{X}_1) = T_p(X \times X \times X)/T_p(\widehat{X}_1)$ для любого $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$. Определено отображение

$$pr_1 : N(\widehat{X}_1) \to N(X^0 \times X^0), (x_1, x_2^0, x_3^0, v_1) \mapsto (x_2^0, x_3^0, v_1),$$

задающее изоморфизм $N_p(\widehat{X}_1) \cong N_{(x_2^0, x_3^0)}(X^0 \times X^0)$.

Введём расслоение $P(N(\widehat{X}_1))$ над $\widehat{X}_1$, слой которого в точке $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(\widehat{X}_1)$. Зададим множество:

$$V(N(\widehat{X}_1)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(\widehat{X}_1))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(\widehat{X}_1)$ — одномерное линейное подпространство, которое соответствует ℓ как элементу $N(\widehat{X}_1)$. Таким образом, элементами множества $V(N(\widehat{X}_1))$ являются наборы (p, ℓ, v), где $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$, $\ell \subset N_p(\widehat{X}_1)$ и $v \in V(\ell)$.

Введём отображение

$$\gamma_{N_1} : V(N(\widehat{X}_1)) \to N(\widehat{X}_1), (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell_1, v_1) \mapsto (x_1, x_2^0, x_3^0, v_1).$$

Аналогичные объекты можно ввести для подмногообразий $\widehat{X}_2$ и $\widehat{X}_3$. В частности, определены отображения $\gamma_{N_i} : V(N(\widehat{X}_i)) \to N(\widehat{X}_i)$ и $pr_i : N(\widehat{X}_i) \to N(X^0 \times X^0), i = 2, 3$.

Определим подмногообразие V_i в $V(N(\widehat{X}_i))$, $i=1,2,3$, по формуле
$$V_i = \{(p,\ell,v) \in V(N(\widehat{X}_i)) : v = 0\}.$$
Нетрудно показать, что ограничение γ_{N_i} на $V\setminus V_i$, $i=1,2,3$, определяет диффеоморфизм
$$\gamma_{N_1}\Big|_{V\setminus V_i} : V(N(\widehat{X}_i)) \setminus V_i \xrightarrow{\sim} N(\widehat{X}_i) \setminus \widehat{X}_i.$$
Пусть $g_{X\times X\times X}$ — такая риманова метрика на $X\times X\times X$, которая совпадает с метрикой g_X на подрасслоениях $TX\times\{0\}\times\{0\}$, $\{0\}\times TX\times\{0\}$, $\{0\}\times\{0\}\times TX$ расслоения $TX\times TX\times TX = T(X\times X\times X)$. Согласно предложению 1, существует такая окрестность U множества $X^0\times X^0\times X^0$ в $N(X^0\times X^0\times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфизмом:
$$\exp := \exp_{X\times X\times X}\big|_U : U \xrightarrow{\sim} \exp_{X\times X\times X}(U) \subset X\times X\times X,$$
а также существует такая окрестность U_1 множества $X^0\times X^0$ в $N(X^0\times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфным:
$$\exp_{X\times X}\big|_{U_1} : U_1 \xrightarrow{\sim} \exp_{X\times X}(U_1) \subset X\times X.$$
Для любого $i=1,2,3$ композиция отображения $\exp_{X\times X}$ с pr_i определяет диффеоморфизм
$$\exp_i : pr_i^{-1}(U_1) \subset N(\widehat{X}_i) \xrightarrow{\sim} \exp_i(pr_i^{-1}(U_1)) \subset X\times X\times X.$$
Введём отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $(X\times X\times X\setminus\widehat{X}^0)\sqcup\gamma_N^{-1}(U)\sqcup\gamma_{N_1}^{-1}(U_1)\sqcup\gamma_{N_2}^{-1}(U_1)\sqcup\gamma_{N_3}^{-1}(U_1)$, положив, что:

- Точки $(p_1,p_2,p_3)\in X\times X\times X\setminus\widehat{X}^0$ и $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v)\in\gamma_N^{-1}(U)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $(p_1,p_2,p_3)\in\exp(U)$ и
$$\exp(\gamma_N(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v)) = (p_1,p_2,p_3).$$
- Для любого $i=1,2,3$, точки $(p_1,p_2,p_3)\in X\times X\times X\setminus\widehat{X}^0$ и $(p,\ell_1,v_1)\in\gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точки $(p_1,p_2,p_3)\in\exp_i(pr_i^{-1}(U_1))$ и
$$\exp_i(\gamma_{N_i}(p,\ell_1,v_1)) = (p_1,p_2,p_3).$$
- Для любого $i=1,2,3$, точки $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v)\in\gamma_N^{-1}(U)$ и $(p,\ell_1,v_1)\in\gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда
$$(x_1^0,x_2^0,x_3^0) = p,$$
и (ℓ,v) отображается в (ℓ_1,v_1) при естественном отображении $N(X)\to N(\widehat{X}_i)$.

Определим множество X_b^3 как множество классов эквивалентности:
$$X_b^3 = (X\times X\times X\setminus\widehat{X}^0)\sqcup\gamma_N^{-1}(U)\sqcup\gamma_{N_1}^{-1}(U_1)\sqcup\gamma_{N_2}^{-1}(U_1)\sqcup\gamma_{N_3}^{-1}(U_1)\big/\sim.$$
Легко проверить, что множество X_b^3 является гладким многообразием.

Введем следующие подмножества в X_b^3:
$$X_0^3 = \{(p,\ell,v)\in V(N(X^0\times X^0\times X^0)) : v=0\}\subset\gamma_N^{-1}(U),$$
$$X_{Oi}^3 = \{(p,\ell,v)\in V(N(\widehat{X}_i)) : v=0\}\subset\gamma_{N_i}^{-1}(U_1),\quad i=1,2,3.$$
Определим подмножество X_1^3 в X_b^3, задав его пересечения с компонентами X_b^3:
$$X_1^3\cap(X\times X\times X\setminus\widehat{X}^0) = X^0\times(X\setminus X^0)\times(X\setminus X^0),$$
$$X_1^3\cap\gamma_N^{-1}(U) = \{(p,\ell,v)\in V(N(X^0\times X^0\times X^0)) : \ell\subset TX^0\times TX\times TX\},$$
$$X_1^3\cap\gamma_{N_1}^{-1}(U_1) = \{(p,\ell,v)\in V(N(\widehat{X}_1)) : p\in X^0\times X^0\times X^0\},$$
$$X_1^3\cap\gamma_{N_2}^{-1}(U_1) = \{(p,\ell,v)\in V(N(\widehat{X}_2)) : \ell\subset TX^0\times TX\times TX\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_3}^{-1}(U_1) = \{(p,\ell,v) \in V(N(\widehat{X}_3)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\}.$$

Аналогично определим подмножества X_2^3 и X_3^3.

Легко видеть, что все введенные выше подмножества являются гладкими подмногообразиями в X_b^3. Эти подмногообразия пересекаются трансверсально, и их объединение является стратифицированным подмногообразием в X_b^3, которое мы обозначим через $\mathcal{X}_b^3$:

$$\mathcal{X}_b^3 = X_0^3 \cup X_1^3 \cup X_2^3 \cup X_3^3 \cup X_{O1}^3 \cup X_{O2}^3 \cup X_{O3}^3.$$

Отображения $\gamma_i : X_b^3 \to X_b^2$, $i = 1,2,3$, определяются следующим образом.

Для $(p_1,p_2,p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$:

$$\gamma_i(p_1,p_2,p_3) = \pi_i(p_1,p_2,p_3),$$

где отображения $\pi_i : X \times X \times X \to X \times X$ определены в (7).

Для $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \in \gamma_N^{-1}(U)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: (x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \mapsto (x_2^0,x_3^0,\ell_1,v_2,v_3),\\
\gamma_2 &: (x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \mapsto (x_1^0,x_3^0,\ell_2,v_1,v_3),\\
\gamma_3 &: (x_1^0,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \mapsto (x_1^0,x_2^0,\ell_3,v_1,v_2),
\end{aligned}$$

где ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — образы ℓ при проекциях $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ на $N(X^0 \times X^0)$: $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,v) \mapsto (x_2^0,x_3^0,v_2,v_3)$, $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,v) \mapsto (x_1^0,x_3^0,v_1,v_3)$, $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,v) \mapsto (x_1^0,x_2^0,v_1,v_2)$ соответственно.

Для $(p,\ell,v) \in \gamma_{N_1}^{-1}(U_1)$, где $p = (x_1,x_2^0,x_3^0) \in \widehat{X}_1$, $\ell \subset N_p(\widehat{X}_1)$ и $v \in V(\ell)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: (x_1,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \mapsto (x_2^0,x_3^0,pr_1(\ell),pr_1(v)),\\
\gamma_2 &: (x_1,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \mapsto (x_1,\exp_X(v_3)),\\
\gamma_3 &: (x_1,x_2^0,x_3^0,\ell,v) \mapsto (x_1,\exp_X(v_2)).
\end{aligned}$$

Для $(p,\ell,v) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ отображения $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ определяются аналогично.

5. Регуляризованный след

Операторы из класса $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$, вообще говоря, не является ядерными. Оказывается, что если индексное семейство $\mathcal{E}_O$ удовлетворяет следующему условию:

$$\inf \mathcal{E}_O \geq 0, \text{ причём, если } (0,q) \in \mathcal{E}_O, \text{ то } q = 0, \tag{9}$$

то можно ввести функционал на $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$, называемый функционалом регуляризованного следа, который совпадает с функционалом следа на ядерных операторах.

Прежде чем дать определение регуляризованного следа, введем понятие регуляризованного интеграла для конормальных плотностей.

5.1. Регуляризованный интеграл. Пусть μ — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ плотность, заданная на компактном многообразии X с отмеченным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально, и индексное семейство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (9). На многообразии X зададим риманову метрику g_X. Определим непрерывную функцию r на X по формуле $r(p) = \varrho(p,X^0)$, где ϱ — геодезическое расстояние от точки p до подмногообразия X^0.

Определение 14. *Регуляризованный интеграл от плотности μ по X определяется формулой*

$$\int\limits_X^r \mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int\limits_{\substack{X\\ r(p)>\varepsilon}} \mu + 2\ln\varepsilon \int\limits_{X^0} \mu\,|_{X^0}\Big). \tag{10}$$

Здесь $\mu\,|_{X^0}$ — плотность на X^0, определяемая следующим образом. В нормальной системе координат $\exp(U) \to (-\varepsilon,\varepsilon)\times X^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ около X^0 запишем $\mu = u(x,x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|$, где u — конормальная функция на $(-\varepsilon,\varepsilon)\times X^0$ с отмеченным подмногообразием $\{0\}\times X^0$, $|dx^0|$ — фиксированная гладкая плотность на X^0. Поскольку индексное семейство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (9), легко видеть, что u продолжается до непрерывной функции на $(-\varepsilon,\varepsilon)\times X^0$. Положим

$$\mu\,|_{X^0} = u(0,x^0)|dx^0|.$$

Легко проверить, что $\mu\,|_{X^0}$ не зависит от выбора плотности $|dx^0|$.

Можно показать, что предел в правой части равенства (10) существует. Следует отметить, что регуляризованный интеграл зависит от выбора римановой метрики g_X.

5.2. Регуляризованный след. Пусть X — компактное многообразие и $A : C^\infty(X,\Omega^{\frac12}_X) \to C^\infty(X,\Omega^{\frac12}_X)$ — интегральный оператор с гладким ядром $k_A \in C^\infty(X\times X,\Omega^{\frac12}_{X\times X})$, действие которого на полуплотность $\mu \in C^\infty(X,\Omega^{\frac12})$ задаётся формулой (2). Напомним, что такой оператор A определяет ограниченный оператор в пространстве $L^2(X,\Omega^{\frac12}_X)$. Этот оператор является ядерным, причём

$$\mathrm{Tr}(A) = \int\limits_X k_A\,|_\Delta\,, \tag{11}$$

где $\Delta = \{(x,x) \in X\times X : x \in X\}$.

Здесь гладкая плотность $k_A\,|_\Delta$ на X определяется следующим образом. Пусть dv_X — гладкая положительная плотность на X. Запишем

$$k_A = K_A(p_1,p_2)|dv_X(p_1)|^{\frac12}|dv_X(p_2)|^{\frac12}, \quad p_1,p_2\in X,$$

где $K_A \in C^\infty(X\times X)$. Положим

$$k_A\,|_\Delta = K_A(p,p)|dv_X(p)|.$$

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора плотности dv_X.

Пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, g_X — риманова метрика на X. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально. Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ с ядром $k_A \in C^\infty(X\times X\setminus(X^0\times X)\cup(X\times X^0),\Omega^{\frac12}_{X^2})$. Предположим, что индексное семейство $\mathcal{E}_O$ удовлетворяет условию (9).

Определение 15. *Регуляризованный след оператора A определяется по формуле*

$$\text{r-Tr}(A) = \int\limits_X^r k_A\,|_\Delta\,.$$

Можно показать, что $k_A\,|_\Delta$ является конормальной плотностью на (X,X^0) относительно индексного семейства $\mathcal{E}_O$, и потому регуляризованный интеграл от $k_A\,|_\Delta$ по X корректно определён.

5.3. Регуляризованный след коммутатора. Как и выше, пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, g_X — риманова метрика на X. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально. Функционал регуляризованного следа r-Tr на алгебре $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ не является следовым функционалом, т.е. регуляризованный след r-Tr$([A,B])$ коммутатора операторов $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$, вообще говоря, не равен нулю. Основным результатом этого раздела является формула, дающая выражение для регуляризованного следа коммутатора $\text{r-Tr}([A,B])$ в терминах некоторых интегральных операторов на подмногообразии X^0, ассоциированных с операторами A и B.

Начнем с определения класса операторов, для которого справедлива упомянутая выше формула.

Определение 16. *Скажем, что $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, если $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$ для некоторых индексных семейств $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_O$ и выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что, если $\varrho(x, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(y, X^0) < \delta$ или $\varrho(y, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(x, X^0) < \delta$, то $k_A(x, y) = 0$.*
2. *$\mathcal{E}_O$ удовлетворяет условию (9).*
3. *Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности X^0. Существуют такие m, M, $0 < m < M < \infty$, что носитель функции $\widetilde{K}_A$, определённой формулой (4), содержится в множестве всех $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$, таких, что $m < |s| < M$.*

Используя теорему 4, нетрудно показать, что $\mathcal{K}(X, X^0)$ является алгеброй.

Прежде чем сформулировать утверждение о регуляризованном следе коммутатора, введем понятия определяющего оператора и определяющего семейства, ассоциированных с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, которые необходимы нам для формулировки данной теоремы.

Из условия (2) определения 16 следует, что для оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ существует предел:

$$\lim_{x \to 0} \widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) =: \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0), \tag{12}$$

где $\widetilde{K}_A$ — функция, определяемая формулой (4).

Определение 17. *Определяющим оператором, ассоциированным с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, называется оператор:*

$$I(A) : C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times X^0}) \to C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times X^0}),$$

действие которого на полуплотность $\mu = u(x, x^0) \left|\frac{dx}{x} dx^0\right|^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{(R\setminus\{0\})\times X^0})$ задаётся формулой:

$$I(A)\mu = I(A)u(x, x^0) \left|\frac{dx}{x} dx^0\right|^{\frac{1}{2}},$$

где

$$I(A)u(x, x^0) = \int\limits_{X^0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_A(0, s, x^0, x_1^0) u\left(\frac{x}{s}, x_1^0\right) \frac{ds}{s} dx_1^0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^0 \in X^0.$$

Следующее понятие является аналогом известного понятия конормального символа (см., например, [13, 16]) в рассматриваемой ситуации.

Определение 18. *Определяющими семействами оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ называются семейства $\{I^\pm(A, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ интегральных операторов на X^0 с гладкими ядрами, задающимися формулами:*

$$K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_0^{+\infty} s^{-i\lambda} \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{s},$$

$$K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_{-\infty}^{0} |s|^{-i\lambda} \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{|s|}.$$

Функция $\lambda \mapsto K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$ (соотв. $\lambda \mapsto K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$) является преобразованием Меллина функции $\widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0)$ (соотв. $\widetilde{K}_A(0, -s, x_1^0, x_2^0)$) по переменной s на полуоси $(0, +\infty)$. Поскольку $\widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0)$ является гладкой финитной функцией по $s \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при фиксированных x_1^0, $x_2^0 \in X^0$, по теореме Пэли-Винера функции $K_{I^\pm(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$ корректно определены для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и являются целыми функциями.

Справедливы следующие свойства определяющих операторов:

1. $I(A \circ B) = I(A) \circ I(B)$.
2. $I^+(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)$.
3. $I^-(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda)$.

Теорема 7. *Если $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}(X, X^0)$, то*

$$\text{r-Tr}([A, B]) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + \partial_\lambda I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)) d\lambda,$$

где знак tr *означает след интегрального оператора на X^0.*

Доказательство. По определению имеем:

$$\text{r-Tr}[(A, B)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\int\limits_{\substack{X \\ r(p) > \varepsilon}} (k_{AB} - k_{BA})\,|_\Delta + 2 \ln \varepsilon \int\limits_{X^0} ((k_{AB} - k_{BA})\,|_\Delta)\Big|_{X^0} \Bigg).$$

Определим отображение $R : X \times X \to X \times X$ по формуле $R(p_1, p_2) = (p_2, p_1)$. Тогда можно записать

$$\int\limits_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{AB})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} \left(\int\limits_X k_A(p_1, p_2) k_B(p_2, p_1) \right) = \int\limits_{\substack{X \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2),$$

где последний интеграл следует понимать как интеграл от плотности $k_A R^* k_B$ на $X \times X$ по множеству $\{(p_1, p_2) \in X \times X : r(p_1) > \varepsilon\}$. Аналогично,

$$\int\limits_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{X \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_B R^* k_A(p_1, p_2) = \int\limits_{\substack{X \times X \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности $V = \exp(U)$ подмногообразия X^0. В частности, $V = \{p \in X : r(p) < \varepsilon_1\}$. Получаем, что

$$\int\limits_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{X \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int\limits_{\substack{X \times X \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) =$$

$$= \int\limits_{\substack{V \times V \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int\limits_{\substack{V \times V \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V \times (X \setminus V) \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int\limits_{\substack{(X \setminus V) \times V \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) +$$

$$+\int\limits_{\substack{(X\setminus V)\times X\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) - \int\limits_{\substack{X\times(X\setminus V)\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

Легко видеть, что для любого $0<\varepsilon<\varepsilon_1$:

$$\int\limits_{\substack{(X\setminus V)\times X\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{(X\setminus V)\times X} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

$$\int\limits_{\substack{X\times(X\setminus V)\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{X\times(X\setminus V)} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

По условию (1) определения 16 существует такое $\varepsilon_2>0$, что если $p_1\notin V$ и $r(p_2)<\varepsilon_2$ или $r(p_1)<\varepsilon_2$ и $p_2\notin V$, то $k_A(p_1,p_2)=k_B(p_1,p_2)=0$. Следовательно, для любого $0<\varepsilon<\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

$$\int\limits_{\substack{(X\setminus V)\times V\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{(X\setminus V)\times V} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

$$\int\limits_{\substack{V\times(X\setminus V)\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{V\times(X\setminus V)} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

Следовательно, получаем:

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA}-k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{V\times V\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) - \int\limits_{\substack{V\times V\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2). \tag{13}$$

В окрестности $(V\setminus X^0)\times(V\setminus X^0)$ возьмем локальную систему координат $(x,s,x_1^0,x_2^0)\in\Pi_\varepsilon\times X^0\times X^0$, задаваемую формулами (3). В этих координатах отображение R записывается в виде

$$R(x,s,x_1^0,x_2^0)=\left(\frac{x}{s},\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0\right).$$

Равенство (13) примет вид

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA}-k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{X^0\times X^0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon|s|}\widetilde{K}_A(x,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B\left(\frac{x}{s},\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0\right)\frac{dx}{|x|}\right)\frac{ds}{|s|}dx_1^0dx_2^0,$$

где функции $\widetilde{K}_A$ и $\widetilde{K}_B$ определяются формулой (4).

Используя условия (2) и (3) определения 16, отсюда нетрудно вывести, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA}-k_{BA})\,|_\Delta =$$

$$=\int\limits_{X^0\times X^0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon|s|}\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B\left(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0\right)\frac{dx}{|x|}\right)\frac{ds}{|s|}dx_1^0dx_2^0=$$

$$=2\int\limits_{X^0\times X^0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)\frac{ds}{|s|}dx_1^0dx_2^0.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\int\limits_{X^0}\left((k_{AB}-k_{BA})\Big|_\Delta\right)\Big|_{X^0}=0.$$

Используя связь преобразования Меллина с преобразованием Фурье и равенство Парсеваля для преобразования Фурье, можно доказать, что, если $f_1,f_2\in L^2((0,+\infty),\frac{ds}{s})$, то преобразования Меллина $M(f_1),M(f_2)$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, и имеет место формула

$$\int\limits_0^{+\infty}f_1(s)\overline{f_2(s)}\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[M(f_1)](\lambda)\overline{[M(f_2)](\lambda)}d\lambda.$$

Применяя эту формулу в случае, когда

$$f_1(s)=\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0),\quad f_2(s)=\overline{\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)},\quad s>0,$$

получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)\frac{ds}{s}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_\lambda K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0,x_2^0)K_{I^+(B,\lambda)}(x_2^0,x_1^0)d\lambda.$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)\frac{ds}{|s|}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_\lambda K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0,x_2^0)K_{I^-(B,\lambda)}(x_2^0,x_1^0)d\lambda.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
\text{r-Tr}([A,B]) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA} - k_{BA})\,|_{\Delta} = \\
&= -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{X^0\times X^0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\partial_\lambda K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0,x_2^0) K_{I^+(B,\lambda)}(x_2^0,x_1^0) \\
&\quad + \partial_\lambda K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0,x_2^0) K_{I^-(B,\lambda)}(x_2^0,x_1^0)) d\lambda dx_1^0 dx_2^0 = \\
&= -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I^+(A,\lambda)\circ I^+(B,\lambda) + \partial_\lambda I^-(A,\lambda)\circ I^-(B,\lambda)) d\lambda.
\end{aligned}$$

□

A. Доказательство теоремы 5

Пусть $u \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}^0}_{phg}(Y, Y^0, G)$. Необходимо показать, что $f^*u \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, f^*G)$.

Прежде всего, отметим, что ограничение отображения f на $f^{-1}(Y\setminus Y^0)$ определяет отображение $f : f^{-1}(Y\setminus Y^0) \to Y\setminus Y^0$. Поскольку u является гладким сечением на $Y\setminus Y^0$, f^*u является гладким на $f^{-1}(Y\setminus Y^0)$, в частности, поскольку $f^{-1}(Y^0)\subset X^0$, на $X\setminus X^0$.

Остается доказать, что сечение f^*u является конормальным в произвольной точке $p\in X^0$. Предположим, для определенности, что точка $p\in X_1\cap\ldots\cap X_\ell$ и $p\notin X_{\ell+1}\cup\ldots\cup X_r$. Пусть $f(p)=p_0$. Предположим, что $p_0\in Y_1\cap\ldots\cap Y_{\ell_0}$ и $p_0\notin Y_{\ell_0+1}\cup\ldots\cup Y_{r_0}$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x_1,\ldots,x_\ell,x^0)\in D_1\times D_2$ и адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1,\ldots,y_{\ell_0},y^0)\in D_1^0\times D_2^0$, где $D_1\subset\mathbb{R}^\ell$; $D_2\subset\mathbb{R}^{m-\ell}$; $D_1^0\subset\mathbb{R}^{\ell_0}$; $D_2^0\subset\mathbb{R}^{n-\ell_0}$. Без потери общности, мы можем предполагать, что ограничение расслоения G на заданную окрестность точки p_0 тривиально, следовательно, мы можем отождествить ограничение сечения u на эту окрестность с функцией. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что u — скалярная функция.

Случай $\ell_0=\ell=0$ был уже рассмотрен в начале доказательства. В этом случае $p_0\in Y\setminus Y^0$ и $p\in X\setminus X^0$.

Рассмотрим случай, когда $\ell_0=0$ и $\ell>0$. В этом случае $p_0\in Y\setminus Y^0$ и $p\in X^0$. Так как $p_0\in Y\setminus Y^0$, имеют место равенства

$$e_f(X_j,Y_i)=0;\quad \forall i=1,\ldots,r_0;\quad \forall j=1,\ldots,\ell. \tag{14}$$

Так как $f^*u\in C^\infty(f^{-1}(Y\setminus Y^0), f^*G)$, f^*u является гладкой в точке p, поэтому f^*u — конормальная в точке p относительно тривиального индексного семейства, что в силу (14) согласуется с формулой (5).

Дальнейшее доказательство теоремы проведём индукцией по $\ell_0\ge 1$. Поскольку $f^{-1}(Y^0)\subset X^0$, $\ell>0$.

База индукции: $\ell_0=1$. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}
&e_f(X_j,Y_1)=0;\quad \forall j=\ell+1,\ldots,r;\\
&e_f(X_j,Y_i)=0;\quad \forall i=2,\ldots,r_0;\quad \forall j=1,\ldots,r.
\end{aligned}\tag{15}$$

Так как u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}^0$, справедливо разложение:

$$u(y_1,y^0)\sim\sum_{(z,q)\in E_1^0} a_{z,q}(y^0)y_1^z\ln^q|y_1|,$$

где $a_{z,q}\in C^\infty(D_2^0)$, $E_1^0=\mathcal{E}^0(Y_1)$.

Так как f — относительное отображение, в локальных координатах отображение f записывается в виде:

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}, \quad f : (x, x^0) \mapsto (y_1, y^0),$$

где

$$y_1 = b_1(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}}, \quad y^0 = g(x, x^0), \tag{16}$$

b_1 — гладкая, нигде не обращающаяся в ноль функция на $D_1 \times D_2$ и $g : D_1 \times D_2 \to D_2^0$ — гладкое отображение.

Пусть N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Обозначим: $u = u_N + r_N$, где

$$u_N(y_1, y^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1^0\\ z\leqslant N}} a_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Соответственно, получаем, что $f^*u = f^*u_N + f^*r_N$. Имеем:

$$f^*u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1^0\\ z\leqslant N}} (g^*a_{z,q})(x, x^0) b_1^z(x, x^0) x_1^{\gamma_{11}z} \ldots x_\ell^{\gamma_{1\ell}z} \times$$
$$\times \left(\ln |b_1(x, x^0)| + \gamma_{11} \ln |x_1| + \ldots + \gamma_{1\ell} \ln |x_\ell|\right)^q .$$

Так как $g : D_1 \times D_2 \to D_2^0$ — гладкое отображение и $a_{z,q} \in C^\infty(D_2^0)$, мы имеем $g^*a_{z,q} \in C^\infty(D_1 \times D_2)$. Поэтому f^*u_N можно записать в виде:

$$f^*u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1^0\\ z\leqslant N}} d_{z,q}(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}z} \ln^q |x_j|,$$

где $d_{z,q} \in C^\infty(D_1 \times D_2)$. Отсюда сразу получается, что f^*u_N конормальна относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, задаваемого формулой (5).

По условию, для любых $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\beta_0 \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$ существует такая постоянная C_1, что:

$$\left|(y_1\partial_{y_1})^{\alpha_0} \partial_{y^0}^{\beta_0} r_N(y_1, y^0)\right| \leqslant C_1 |y_1|^{N+1}.$$

Отсюда, используя представление (16), получаем для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-\ell}$ существует такая постоянная C_3, что:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta f^*r_N\right| \leqslant C_3 |x_1|^{\gamma_{11}(N+1)}. \tag{17}$$

Пусть N_1 — произвольное натуральное число. Поскольку f^*u_N конормальна в точке p относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, справедливо разложение:

$$f^*u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1\\ z\leqslant N_1}} h_{z,q}^N(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| + \varrho_{N,N_1},$$

где $h_{z,q}^N$ — конормальные функции относительно индексного семейства $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}(X_2), \ldots, \mathcal{E}(X_r))$ и ϱ_{N,N_1} удовлетворяет оценкам

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \varrho_{N,N_1}\right| \leqslant C_6 |x_2|^{M_2} \ldots |x_\ell|^{M_\ell} |x_1|^{N_1+1} \tag{18}$$

При заданном N_1 выберем N таким, чтобы было выполнено неравенство:

$$N_1 + 1 < \gamma_{11}(N + 1). \tag{19}$$

В силу неравенств (17), (18), (19) имеем:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(f^* r_N + \varrho_{N,N_1}\right)\right| \leqslant C_7 |x_2|^{M_2^0} \ldots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{N_1+1},$$

где $M_j^0 = \min(0, M_j) \quad \forall j = 2, \ldots, \ell$. Окончательно получаем, что:

$$f^* u = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z \leqslant N_1}} h_{z,q}^N(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| + f^* r_N + \varrho_{N,N_1},$$

откуда следует, что $h_{z,q}^N$ не зависит от N при $N_1 + 1 < \gamma_{11}(N+1)$. Обозначим $h_{z,q}^N(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) = h_{z,q}(x_2, \ldots, x_\ell, x^0)$. Следовательно:

$$f^* u \sim \sum_{(z,q)\in E_1} h_{z,q}(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

и тем самым $f^* u$ является конормальной функцией относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Шаг индукции. Зафиксируем $\ell > 1$. Предположим, что верно следующее утверждение. Пусть Z, W — гладкие многообразия, Z^0 и W^0 — стратифицированные подмногообразия Z и W соответственно. Пусть задано относительное отображение $h : (Z, Z^0) \to (W, W^0)$ и произвольное векторное расслоение H над W. Пусть на подмногообразии W^0 задано индексное семейство $\mathcal{F}^0$. Пусть также точка $p \in Z_1 \cap \ldots \cap Z_\ell$ и $p \notin Z_{\ell+1} \cup \ldots \cup Z_r$. Пусть $h(p) = p_0$. Пусть $p_0 \in W_1 \cap \ldots \cap W_{k_0}$ и $p_0 \notin W_{k_0+1} \cup \ldots \cup W_{r_0}$, при этом $k_0 < \ell_0$. Пусть u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{F}^0$, тогда $h^* u$ конормальна в точке p относительно индексного семейства $\mathcal{F}$, где каждое индексное множество $\mathcal{F}(Z_j)$ индексного семейства $\mathcal{F}$ на Z^0 имеет вид:

$$\mathcal{F}(Z_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_i e_h(Z_j, W_i) z_i, \sum_i q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{F}^0(W_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где суммирование ведется по таким $i = 1, \ldots, r_0$, для которых $e_f(Z_j, W_i) \neq 0$.

Пусть функция u, отображение f, точки p и p_0 такие, как в формулировке теоремы. Докажем, что $f^* u$ является конормальной функцией в точке p. По условию, имеем:

$$\begin{aligned} &e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = 1, \ldots, \ell_0; \quad \forall j = \ell+1, \ldots, r; \\ &e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = \ell_0+1, \ldots, r_0; \quad \forall j = 1, \ldots, r. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}^0$, существует такая окрестность V точки p_0, $\varkappa_0(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0} \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{m-\ell_0}$, что функция u определена и является гладкой на множестве $V \setminus X^0$, и для любого $(y_2, \ldots, y_{\ell_0}, y^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0 - 1} \times V_2$ имеет место асимптотическое разложение при $y_1 \to 0$:

$$u(y, y^0) \sim \sum_{(z,q)\in E_1^0} a_{z,q}(y_2, \ldots, y_{\ell_0}, y^0) y_1^z \ln^q |y_1|,$$

где $E_1^0 = \mathcal{E}^0(Y_1)$, функции $a_{z,q}$ конормальные на $(-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0 - 1} \times V_2 \subset Z$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}_0'$.

Здесь мы рассматриваем многообразие $Z = \mathbb{R}^{\ell_0 - 1} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}$ с координатами $(y_2, \ldots, y_{\ell_0}, y^0)$, где $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 2, \ldots, \ell_0$, $y^0 \in \mathbb{R}^{m-\ell_0}$, наделенное стратифицированным подмногообразием $Z^0 = \{y_2 = 0\} \cup \ldots \cup \{y_{\ell_0} = 0\}$. Индексное семейство $\mathcal{E}_0'$ на Z^0 задается формулой $\mathcal{E}_0'(\{y_j = 0\}) = E_j^0$, где $j = 2, \ldots, \ell_0$.

Так как f — относительное отображение, в локальных координатах отображение f записывается в виде:

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to \mathbb{R}^{\ell_0} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}, \quad (x, x^0) \mapsto (y_1, \ldots, y_{\ell_0}, y^0),$$

где

$$y_i = b_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}}, \quad i = 1, \dots, \ell_0, \quad y^0 = F(x, x^0),$$

b_i — гладкие, нигде не обращающиеся в ноль на X функции.

Введём отображение

$$g : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to \mathbb{R}^{\ell_0 - 1} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}, \quad (x, x^0) \mapsto (y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0),$$

где

$$y_i = b_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}}, \quad i = 2, \dots, \ell_0, \quad y^0 = F(x, x^0).$$

Заметим, что g является относительным отображением, причём

$$e_g(X_j, Y_i) = e_f(X_j, Y_i); \quad \forall j = 1, \dots, \ell; \quad \forall i = 2, \dots, \ell_0. \tag{21}$$

Пусть N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Обозначим: $u = u_N + r_N$, где

$$u_N(y, y^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leqslant N}} a_{z,q}(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Соответственно, получаем, что $f^* u = f^* u_N + f^* r_N$. Имеем:

$$f^* u_N(x_1, \dots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leqslant N}} (g^* a_{z,q})(x, x^0) b_1^z(x, x^0) x_1^{\gamma_{11} z} \dots x_\ell^{\gamma_{1\ell} z} \times$$
$$\times \left(\ln |b_1(x, x^0)| + \gamma_{11} \ln |x_1| + \dots + \gamma_{1\ell} \ln |x_\ell| \right)^q.$$

Существует такая окрестность U точки p, $\varkappa(U) = (-\delta, \delta)^\ell \times U_2$, где окрестность $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$, что $g(U) \subset V$. Так как g — относительное отображение, $a_{z,q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}'}((-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0 - 1} \times V_2)$, в силу (21) и предположения индукции, получаем, что: $g^* a_{z,q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\tilde{\mathcal{E}}}((-\delta, \delta)^\ell \times U_2)$, где индексное множество $\tilde{\mathcal{E}}(X_j)$ индексного семейства $\tilde{\mathcal{E}}$ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{E}}(X_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_{i=2}^{r_0} e_f(X_j, Y_i) z_i, \sum_{i=2}^{r_0} q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{E}^0(Y_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где суммирование ведется по таким $i = 2, \dots, r_0$, для которых $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$.

Следовательно, $f^* u_N$ можно записать в виде:

$$f^* u_N(x_1, \dots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leqslant N}} d_{z,q}(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j} z} \ln^q |x_j|,$$

где $d_{z,q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\tilde{\mathcal{E}}}((-\delta, \delta)^\ell \times U_2)$. Отсюда следует, что $f^* u_N$ — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

По условию, найдутся вещественные числа $M_2, \dots, M_{\ell_0}$, такие что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{\ell_0}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{m-\ell_0}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$ такая, что:

$$\left| (y\partial_y)^\alpha \partial_{y^0}^\beta r_N(y, y^0) \right| \leqslant C |y_2|^{M_2} \cdot \ldots \cdot |y_{\ell_0}|^{M_{\ell_0}} |y_1|^{N+1}.$$

Отсюда следует, что при $|x_j| < 1$:

$$\left| f^* r_N(x, x^0) \right| \leqslant C_1 |x_2|^{M_2^0 + \gamma_{12}(N+1)} \dots |x_\ell|^{M_\ell^0 + \gamma_{1\ell}(N+1)} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1) + M_1^0}$$
$$\leqslant C_4 |x_2|^{M_2^0} \dots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1) + M_1^0}.$$

где

$$M_j^0 = \sum_{i=2}^{\ell_0} \gamma_{ij} M_i, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Аналогичные оценки справедливы для производных:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta f^* r_N\right| \leqslant C_5 |x_2|^{M_2^0} \ldots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1)+M_1^0}. \tag{22}$$

Аналогично случаю $\ell = 1$, отсюда выводится, что f^*u является конормальной функцией относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

B. Доказательство теоремы 6

Пусть $\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}}(X, X^0, f^*G \otimes \Omega_X)$. Покажем, что $f_*\mu$ корректно определена и $f_*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(Y, Y^0, G \otimes \Omega_Y)$.

Пусть $p_0 \notin Y^0$. Покажем, что $f_*\mu$ — гладкая плотность в точке p_0. В окрестности точки p_0 возьмём локальную систему координат с координатами $y^0 \in D_2^0 \subset \mathbb{R}^m$. Возьмём произвольную точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. Так как f — относительное расслоение, в локальных координатах отображение f имеет вид $y^0 = f(x, x^0)$, где $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x^0}\right) = m$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p систему координат, что f имеет вид проекции:

$$y^0 = f(x, x^0) = (x_1^0, \ldots, x_m^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2. \tag{23}$$

В силу компактности X, существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s}, $s = 1, \ldots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \bigcup \bigcup\limits_{s=1}^{d} V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X), s = 0, \ldots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\operatorname{supp}\psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0)$, $\operatorname{supp}\psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \ldots, d$, $\psi_s \geq 0, \sum\limits_{s=0}^{d} \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0, что $\sum\limits_{s=1}^{d} \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и в доказательстве теоремы 5, без потери общности, можно предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X. В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left|\frac{dx}{x} dx^0\right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{p_0}$. Тогда $f^*\varphi \in C^\infty(X)$, причем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, f^*\varphi\rangle = \int\limits_{f^{-1}(U_{p_0})} \mu(m)\varphi(f(m)).$$

Используя разбиение единицы и локальные координаты, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{D_1 \times D_2} \psi_s(x, x^0)\mu(x, x^0)\varphi(f(x, x^0))\frac{dx}{x} dx^0. \tag{24}$$

Принимая во внимание формулу (23), формула переписывается в виде

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \int\limits_{U_{p_0}} F(y^0)\varphi(y^0) dy^0, \tag{25}$$

где F задается формулой

$$F(y^0)=\sum_{s=1}^{d}\int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell-m}}\psi_s(x,y^0,x^0_{m+1},\dots,x^0_{n-\ell})\times$$
$$\times\,\mu(x,y^0,x^0_{m+1},\dots,x^0_{n-\ell})\frac{dx}{x}dx^0_{m+1}\dots dx^0_{n-\ell}. \quad (26)$$

Так как $p\in X_1\cap\ldots\cap X_\ell$ и $p\notin X_{\ell+1}\cup\ldots\cup X_r$ и $f(p)\notin Y^0$, имеем $e_f(X_j,Y_i)=0$, если $j=1,\dots,\ell$, $i=1,\dots,r_0$. Отсюда получаем, что $\inf\mathcal{E}(X_j)>0$ для любого $j=1,\dots,\ell$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\mu(x,y^0,x^0_{m+1},\dots,x^0_{n-\ell})|<C|x_1|^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot|x_\ell|^{\varepsilon_\ell},$$

где $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell$ — некоторые положительные числа. Отсюда следует, что интеграл, стоящий в правой части (26), сходится равномерно, и, тем самым, функция F является гладкой в окрестности точки p_0. Согласно (25), ограничение плотности $f_*\mu$ на U_{p_0} корректно определено и совпадает с гладкой плотностью $F(y^0)|dy^0|$. Поэтому $f_*\mu$ корректно определена как гладкая плотность на $Y\setminus Y^0$.

Пусть $p_0\in Y^0$. Предположим, что $p_0\in Y_1\bigcup\ldots\bigcup Y_{\ell_0}$ и $p_0\notin Y_{\ell_0+1}\bigcup\ldots\bigcup Y_{r_0}$, $\ell_0\neq 0$. Докажем, что $f_*\mu$ — конормальная в точке p_0.

Случай $\ell_0=1$. Возьмём адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1,y^0)\in D_1^0\times D_2^0\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-1}$. Возьмём точку $p\in X$ такую, что $f(p)=p_0$. Предположим, что $p\in X_1\cap\ldots\cap X_\ell$ и $p\notin X_{\ell+1}\cup\ldots\cup X_r$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x,x^0)\in D_1\times D_2\subset\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}$. В данных системах координат отображение f записывается в виде: $(y_1,y^0)=f(x,x^0)$, где: $y_1=b_1(x,x^0)x_1^{\gamma_{11}}\dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}}$, функция b_1 — гладкая и нигде не обращается в ноль; $y^0=g(x,x^0)$. Так как $f(p)=p_0$, хотя бы одно из чисел $\gamma_{11},\gamma_{12},\dots,\gamma_{1\ell}$ больше нуля. Пусть для определённости $\gamma_{11}>0$. Тогда, без потери общности, можно считать, что $b_1(x,x^0)\equiv 1$, так как в окрестности нуля можно сделать замену переменных:

$$\widetilde{x}_1=b_1(x,x^0)^{\frac{1}{\gamma_{11}}}x_1;\quad \widetilde{x}_j=x_j,\quad \forall j=2,\dots,\ell;\quad \widetilde{x}^0=x^0.$$

Якобиан данной замены обозначим через $w(x,x^0)$. Легко видеть, что $w(0,x^0)\neq 0$ для любого $x^0\in D_2$.

По условию (4) определения 13 имеем $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial x^0}\right)=m-1$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p систему координат, что g имеет вид проекции:

$$y^0=g(x,x^0)=(x^0_1,\dots,x^0_{m-1}),\quad x\in D_1,\quad x^0\in D_2.$$

В силу компактности X, существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s}, $s=1,\dots,d$, что $X=(X\setminus f^{-1}(p_0))\bigcup\bigcup_{s=1}^{d}V_{p_s}$. Пусть $\psi_s\in C^\infty(X), s=0,\dots,d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\operatorname{supp}\psi_0\subset X\setminus f^{-1}(p_0)$, $\operatorname{supp}\psi_s\subset V_{p_s}$ для $s=1,\dots,d$, $\psi_s\geq 0, \sum_{s=0}^{d}\psi_s=1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0, что $\sum_{s=1}^{d}\psi_s(m)=1$ для любого $m\in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и выше, будем предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X. В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu=\mu(x,x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{p_0}$. Тогда $f^*\varphi \in C^\infty(X)$, причем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, f^*\varphi\rangle = \int\limits_{f^{-1}(U_{p_0})} \mu(m)\varphi(f(m)).$$

Используя разбиение единицы и локальные координаты, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \psi_s(x, x^0)\mu(x, x^0)\varphi(x_1^{\gamma_{11}} \dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}}, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)\frac{dx}{x}dx^0. \tag{27}$$

Так как $\ell_0 = 1$, по определению 11 хотя бы одно из чисел $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1\ell}$ больше нуля. Пусть для определённости числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1k_1} > 0$, $\gamma_{1,k_1+1} = \dots = \gamma_{1\ell} = 0$, где $k_1 \leqslant \ell$. Обозначим: $\mu_s(x, x^0) = \frac{1}{\gamma_{11}}\psi_s(x, x^0)\mu(x, x^0)$. Равенство (27) записывается в виде

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \gamma_{11}\sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(x, x^0)\varphi(x_1^{\gamma_{11}} x_2^{\gamma_{12}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)\frac{dx}{x}dx^0.$$

Сделав замену переменных

$$y_1 = x_1^{\gamma_{11}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, \quad t_j = x_j \quad \forall j = 2, \dots \ell; \quad y^0 = (x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$$

в интеграле, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)\times$$

$$\times\, \varphi(y_1, y^0)\frac{dy_1}{y_1}\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell}dy^0 dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Следовательно, для любого (y_1, y^0) из некоторой окрестности точки p_0 плотность $f_*\mu$ задается формулой

$$f_*\mu = \sum_{s=1}^{d} \nu_s(y_1, y^0)\left|\frac{dy_1}{y_1}dy^0\right|,$$

где функции $\nu_s(y_1, y^0)$ имеют вид:

$$\nu_s(y_1, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-1} \times \mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)$$

$$\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell}dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0,$$

Так как при $j = k_1 + 1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, интеграл в последней формуле сходится, следовательно, ν_s — гладкая функция при $y_1 \neq 0$.

Зафиксируем s. Докажем конормальность функции ν_s при $y_1 = 0$ относительно индексного множества E_1^0. Запишем

$$\nu_s(y_1, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-k_1}} \mu_s^1(y_1, t_{k_1+1}, \dots, t_\ell, y^0)\frac{dt_{k_1+1}}{t_{k_1+1}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell}, \tag{28}$$

где

$$\mu_s^1(y_1, t_{k_1+1}, \dots, t_\ell, y^0) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k_1-1}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \tag{29}$$

Доказательство теоремы 6 при $\ell_0 = 1$ завершается при помощи следующего утверждения.

Предложение 2. *Если функция $\mu_s(x_1, \dots, x_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)$ финитна и конормальна по переменным $(x_1, \dots, x_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1, \dots, E_\ell)$ и $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1k_1} > 0$, то функция μ_s^1, задаваемая формулой (29), конормальна по переменным $(y_1, t_{k_1+1}, \dots, t_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_{k_1+1}, \dots, E_\ell)$, где*

$$E_1^0 = \overline{\bigcup}_{j=1,\dots,k_1} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1j}}, q \right) : (z, q) \in E_j \right\}.$$

Если предложение 2 доказано, то, применяя утверждение теоремы 6 к функции μ_s^1 в случае $\ell_0 = 0$ и принимая во внимание, что при $j = k_1 + 1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, из формулы (28) получаем, что функция ν_s является конормальной при $y_1 = 0$, что завершает доказательство теоремы 6 при $\ell_0 = 1$.

Доказательство предложения 2. Так как при $y_1 \neq 0$ подынтегральное выражение — гладкая, финитная функция, интеграл абсолютно сходится, и μ_s^1 является гладкой функцией.

Докажем конормальность функции μ_s^1 при $y_1 = 0$.

Случай $k_1 = \ell = 1$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0. \tag{30}$$

Так как μ_s — конормальная функция при $x_1 = 0$ относительно индексного множества E_1, мы имеем:

$$\mu_s(x_1, x^0) \sim \sum_{(z,q)\in E_1} a_{z,q}(x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

где $a_{z,q}$ — гладкие функции. Обозначим $\mu_s = \mu_N + r_N$, где

$$\mu_N(x_1, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z\leqslant N}} a_{z,q}(x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Согласно формуле (30), функция μ_s^1 представляется в виде $\mu_s^1 = \nu_N + \tilde{r}_N$, где

$$\nu_N(y_1, y^0) = \frac{1}{\gamma_{11}^q} \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z\leqslant N}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} a_{z,q}(y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) y_1^{\frac{z}{\gamma_{11}}} \ln^q |y_1| dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0$$

и

$$\tilde{r}_N(y_1, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} r_N(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0.$$

Имеем

$$\nu_N(y_1, y^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z\leqslant N}} h_{z,q}(y^0) y_1^{\frac{z}{\gamma_{11}}} \ln^q |y_1|,$$

где

$$h_{z,q}(y^0) = \frac{1}{\gamma_{11}^q} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} a_{z,q}(y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0.$$

Поскольку $a_{z,q}$ являются гладкими финитными функциями, функция ν_N конормальна при $y_1 = 0$ относительно индексного множества $E_1^0 = \{(\frac{z}{\gamma_{11}}, q) : (z,q) \in E_1\}$.

По определению, для любого $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мульти-индекса β_0 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left| \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_0} \partial_{x^0}^{\beta_0} r_N(x_1, x^0) \right| < C_1 |x_1|^{N+1}.$$

Поэтому, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мульти-индекса β найдётся постоянная C_2, такая что

$$\left| \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{\alpha} \partial_{y^0}^{\beta_0} \tilde{r}_N(y_1, y^0) \right| < C_2 |y_1|^{\frac{N+1}{\gamma_{11}}}.$$

Отсюда немедленно получаем, что

$$\mu_s^1(y_1, y^0) \sim \sum_{(z,q) \in E_1^0} h_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Рассмотрим случай $k_1 = \ell = 2$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m-1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \frac{dt}{t} dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0. \tag{31}$$

Так как функция $\mu_s(x_1, x_2, x^0)$ конормальна в точке $(x_1, x_2) = (0,0)$ относительно индексного семейства (E_1, E_2), мы имеем:

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) \sim \sum_{(z_1, q_1) \in E_1} a_{z_1, q_1}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1|,$$

где $a_{z_1,q_1}(x_2, x^0)$ — конормальные функции при $x_2 = 0$ относительно индексного множества E_2. По определению, для любого натурального N_1 имеет место представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) = \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leqslant N_1}} a_{z_1, q_1}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1| + r_{N_1}(x_1, x_2, x^0).$$

Функция $a_{z_1,q_1}(x_2, x^0)$ допускает асимптотическое разложение

$$a_{z_1, q_1} \sim \sum_{(z_2, q_2) \in E_2} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|,$$

b_{z_1,q_1,z_2,q_2} — гладкие функции. Поэтому для любого натурального N_2 имеет место представление

$$a_{z_1, q_1}(x_2, x^0) = a_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0) + r_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0),$$

где

$$a_{z_1 q_1 N_2} = \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leqslant N_2}} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|.$$

Таким образом, получаем представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) = \mu_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) + r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0),$$

где

$$\mu_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) = \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leqslant N_1}} \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leqslant N_2}} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(x^0) x_2^{z_2} x_1^{z_1} \ln^{q_2} |x_2| \ln^{q_1} |x_1|,$$

$$r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0)=r_{N_1}(x_1,x_2,x^0)+\sum_{\substack{(z_1,q_1)\in E_1\\ z_1\leqslant N_1}} r_{z_1q_1N_2}(x_2,x^0)x_1^{z_1}\ln^{q_1}|x_1|,$$

N_1, N_2 — натуральные числа, которые будут выбраны позже.

По условию существует M_1 такое, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1 такая, что:

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_{N_1}(x_1,x_2,x^0)\right|<C_1|x_1|^{M_1}|x_2|^{N_2+1}.$$

Более того, для любого $\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_2, такая что

$$\left|(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_{z_1q_1N_2}(x_2,x^0)\right|<C_2|x_2|^{N_2+1}.$$

Отсюда следует, что существует $\tilde{M}_1$ такое, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0)\right|<C_1|x_1|^{\tilde{M}_1}|x_2|^{N_2+1}. \tag{32}$$

Учитывая тот факт, что $\mu_s(x_1,x_2,x^0)=0$ при $|x_1|>\varepsilon$ или $|x_2|>\varepsilon$, согласно (31), получаем представление

$$\mu_s^1(y_1,y^0)=\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)+\tilde{r}_{N_1N_2}(y_1,y^0),$$

где

$$\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)=\sum_{\substack{(z_1,q_1)\in E_1\\ z_1\leqslant N_1}}\sum_{\substack{(z_2,q_2)\in E_2\\ z_2\leqslant N_2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m-1}}\Bigg(\int\limits_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}}\varepsilon^{-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}}^{\varepsilon} b_{z_1,q_1,z_2,q_2}(y^0,x_m^0,\dots,x_{n-2}^0)$$
$$t^{z_2-\frac{z_1\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}y_1^{\frac{z_1}{\gamma_{11}}}\ln^{q_2}|t|\left(\gamma_{11}\ln|y_1|-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\ln|t|\right)^{q_1}\frac{dt}{t}\Bigg)dx_m^0\dots dx_{n-2}^0.$$

$$\tilde{r}_{N_1N_2}(y_1,y^0)\quad=\quad\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m-1}}\Bigg(\int\limits_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}}\varepsilon^{-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}}^{\varepsilon} r_{N_1N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}},t,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-2}^0)\frac{dt}{t}\Bigg)dx_m^0\dots dx_{n-2}^0.$$

Вычисляя явно интеграл по t, можно показать, что функция $\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)$ записывается в виде:

$$\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)=\sum_{\substack{(z_1,q_1)\in E_1\\ z_1\leqslant N_1}} d^1_{z_1,q_1}(y^0)y_1^{\frac{z_1}{\gamma_{11}}}\ln^{q_1}|y_1|+\sum_{\substack{(z_2,q_2)\in E_2\\ z_2\leqslant N_2}} d^2_{z_2,q_2}(y^0)y_1^{\frac{z_2}{\gamma_{12}}}\ln^{q_2}|y_1|+$$
$$+\sum d^3_{z_1,q_1,z_2,q_2}(y^0)y_1^{\frac{z_2}{\gamma_{12}}}\ln^{q_1+q_2+1}|y_1|,$$

где третья сумма берется по всем наборам $(z_1,q_1)\in E_1, z_1\leqslant N_1$, $(z_2,q_2)\in E_2, z_2\leqslant N_2$ таким, что $\frac{z_1}{\gamma_{11}}=\frac{z_2}{\gamma_{12}}$.

Оценим $\tilde{r}_{N_1N_2}$. Разбив интеграл по t в сумму двух интегралов, получаем

$$\tilde{r}_{N_1N_2}(y_1,y^0)=\tilde{r}^1_{N_1N_2}(y_1,y^0)+\tilde{r}^2_{N_1N_2}(y_1,y^0),$$

где

$$\tilde r^1_{N_1N_2}(y_1,y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \Bigg(\int\limits_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}}\varepsilon^{-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}}^{y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}}} r_{N_1N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x^0_m,\dots,x^0_{n-2})\frac{dt}{t}\Bigg) dx^0_m\dots dx^0_{n-2}.$$

$$\tilde r^2_{N_1N_2}(y_1,y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \Bigg(\int\limits_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}}}^{\varepsilon} r_{N_1N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x^0_m,\dots,x^0_{n-2})\frac{dt}{t}\Bigg) dx^0_m\dots dx^0_{n-2}.$$

Используя (32), получаем оценку

$$|\tilde r^1_{N_1N_2}(y_1,y^0)| < C\left(|y_1|^{\frac{\tilde M_1+N_2+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_2+1}{\gamma_{12}}}\right).$$

Чтобы оценить $\tilde r^2_{N_1N_2}$, воспользуемся аналогичным представлением

$$r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0) = \tilde r_{N_2}(x_1,x_2,x^0) + \sum_{\substack{(z_2,q_2)\in E_2\\ z_2\leqslant N_2}} \tilde r_{z_2q_2N_1}(x_1,x^0)x_2^{z_2}\ln^{q_2}|x_2|,$$

откуда следует, что существует $\tilde M_2$ такое, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial^{\beta_2}_{x^0} r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0)\right| \leqslant C_1|x_1|^{N_1+1}|x_2|^{\tilde M_2}. \tag{33}$$

Используя (33), получаем оценку

$$|\tilde r^2_{N_1N_2}(y_1,y^0)| < C\left(|y_1|^{\frac{\tilde M_2+N_1+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_1+1}{\gamma_{12}}}\right).$$

Таким образом, имеем

$$|\tilde r_{N_1N_2}(y_1,y^0)| < C\left(|y_1|^{\frac{\tilde M_1+N_2+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_2+1}{\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{\tilde M_2+N_1+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_1+1}{\gamma_{12}}}\right).$$

Отсюда легко следует конормальность функции $\mu^1_s(y_1,y^0)$ при $y_1=0$ относительно индексного множества

$$E^0_1 = \left\{\left(\frac{z}{\gamma_{11}},q\right) : (z,q)\in E_1\right\}\bigcup\left\{\left(\frac{z}{\gamma_{12}},q\right) : (z,q)\in E_2\right\}.$$

Рассмотрим случай $k_1=2,\ell>k$**.** Сначала предположим, что $k_1=2,\ell=3$. В этом случае функция μ^1_s имеет вид:

$$\mu^1_s(y_1,t_3,y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-m-2}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t_2, t_3, y^0, x^0_m,\dots,x^0_{n-3})\frac{dt_2}{t_2} dx^0_m\dots dx^0_{n-3}. \tag{34}$$

Так как функция $\mu_s(x_1,x_2,x_3,x^0)$ конормальна в точке $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ относительно индексного семейства (E_1,E_2,E_3), мы имеем:

$$\mu_s(x_1,x_2,x_3,x^0) \sim \sum_{(z_3,q_3)\in E_3} a_{z_3,q_3}(x_1,x_2,x^0)x_3^{z_3}\ln^{q_3}|x_3|,$$

где $a_{z_3,q_3}(x_1,x_2,x^0)$ — конормальные функции в точке $(x_1,x_2)=(0,0)$ относительно индексного семейства (E_1,E_2). По определению, для любого натурального N имеет место представление

$$\mu_s(x_1,x_2,x_3,x^0)=\sum_{\substack{(z_3,q_3)\in E_3\\ z_3\leqslant N}} a_{z_3,q_3}(x_1,x_2,x^0)x_3^{z_3}\ln^{q_3}|x_3|+r_N(x_1,x_2,x_3,x^0).$$

Согласно формуле (34), функция μ_s^1 представляется в виде $\mu_s^1=\nu_N+\tilde r_N$, где

$$\nu_N(y_1,t_3,y^0)=\sum_{\substack{(z_3,q_3)\in E_3\\ z_3\leqslant N}} b_{z_3,q_3}(y_1,y^0)t_3^{z_3}\ln^{q_3}|t_3|,$$

где

$$b_{z_3,q_3}(y_1,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-m-2}} a_{z_3,q_3}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}},t_2,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-3}^0)\frac{dt_2}{t_2}dx_m^0\dots dx_{n-3}^0.$$

и

$$\tilde r_N(y_1,t_3,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-m-2}} r_N(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}},t_2,t_3,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-3}^0)\frac{dt_2}{t_2}dx_m^0\dots dx_{n-3}^0.$$

Согласно предложению 2 в случае $k_1=\ell=2$, функции $b_{z_3,q_3}(y_1,y^0)$ являются конормальными в точке $y_1=0$ относительно индексного множества E_1^0. Поэтому, функция $\nu_N(y_1,t_3,y^0)$ является конормальной в точке $(y_1,t_3)=(0,0)$ относительно индексного множества (E_1^0,E_3).

По определению существуют такие M_1 и M_2, что для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}(x_3\partial_{x_3})^{\alpha_3}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_N(x_1,x_2,x_3,x^0)\right|<C_1|x_1|^{M_1}|x_2|^{M_2}|x_3|^{N+1}.$$

Используя эти оценки, можно показать, что существует такая постоянная M, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(y_1\partial_{y_1})^{\alpha_1}(t_3\partial_{t_3})^{\alpha_2}\partial_{y^0}^{\beta}\tilde r_N(y_1,t_3,y^0)\right|<C_1|y_1|^{M}|t_3|^{N+1}.$$

Это завершает доказательство предложения 2 в случае $k_1=2,\ell=3$.

Случай $k_1=2$ **и произвольного** $\ell>k$ доказывается аналогичным образом индукцией по ℓ.

Доказательство предложения 2 **при произвольных** k_1 **и** $\ell\geq k_1$ завершается при помощи индукции по k_1.

Предположим, что утверждение предложения 2 верно при любом $k_1<k$, при любом $\ell\geq k_1$ и для любой функции μ_s. Докажем утверждения предложения 2 при $k_1=k$, при любом $\ell\geq k_1$ и для любой функции μ_s.

Начнем с рассмотрения случая $k_1=\ell=k$. В этом случае представим функцию μ_s^1, задаваемую формулой (29), в следующем виде

$$\mu_s^1(y_1,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}}\widetilde{\mu}(y_1t_k^{-\gamma_{1k}},t_k,y^0)\frac{dt_k}{t_k},$$

где

$$\widetilde{\mu}(z_1,t_k,y^0)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{k-2}\times\mathbb{R}^{n-m-k+1}}\mu_s(z_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}\dots t_{k-1}^{-\frac{\gamma_{1,k-1}}{\gamma_{11}}},t_2,\dots,t_k,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-k}^0)\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}}dx_m^0\dots dx_{n-k}^0.$$

Из утверждения предложения 2 в случае, когда $k_1 = k-1, \ell = k$ следует, что функция $\widetilde{\mu}(z_1, t_k)$ конормальна по (z_1, t_k) относительно индексного семейства $(\widetilde{E}_1^0, E_k)$, где

$$\widetilde{E}_1^0 = \overline{\bigcup}_{j=1,\ldots,k-1} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1j}}, q \right) : (z,q) \in E_j \right\}.$$

Применяя утверждение предложения 2 в случае, когда $k_1 = \ell = 2$, получаем, что функция $\nu_s(y_1, y^0)$ конормальна по переменной y_1 относительно индексного семейства

$$\widetilde{E}_1^0 \overline{\bigcup} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1k}}, q \right) : (z,q) \in E_k \right\} = E_1^0.$$

Случай $k_1 = k$ и произвольного $\ell > k_1$ доказывается аналогично как выше индукцией по ℓ. Доказательство предложения 2 закончено. □

Докажем теорему 6 в случае $\ell_0 = 2$. Возьмём адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1, y_2, y^0) \in D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2}$. Возьмём точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. По условию без потери общности можно предполагать, что в данных системах координат отображение f записывается в виде: $(y_1, y_2, y^0) = f(x, x^0)$, где $y_1 = b_1(x, x^0) x_1^{\gamma_{11}} \ldots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}$, $y_2 = b_2(x, x^0) x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \ldots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}$; функции b_1 и b_2 — гладкие, нигде не обращаются в ноль; числа $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1k_1}, \gamma_{2,k_1+1}, \ldots, \gamma_{2,k_2} > 0$, $k_1 < k_2 \leqslant \ell$; $y^0 = g(x, x^0)$. Как и в случае $\ell_0 = 1$, не ограничивая общность, можно положить, что $b_1(x, x^0) \equiv b_2(x, x^0) \equiv 1$.

По условию (4) определения 13 имеем $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial x^0}\right) = m-2$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p_0 систему координат, что g имеет вид проекции:

$$g(x, x^0) = (x_1^0, \ldots, x_{m-2}^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2.$$

В силу компактности X существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s}, $s = 1, \ldots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \bigcup \bigcup\limits_{s=1}^{d} V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X)$, $s = 0, \ldots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\operatorname{supp}\psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0)$, $\operatorname{supp}\psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \ldots, d$, $\psi_s \geq 0$, $\sum\limits_{s=0}^{d} \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0, что $\sum\limits_{s=1}^{d} \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и выше, будем предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X. В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{p_0}$. Обозначая

$$\mu_s(x, x^0) = \frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{2,k_1+1}} \psi_s(x, x^0) \mu(x, x^0),$$

получаем:

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \gamma_{11}\gamma_{2,k_1+1} \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(x, x^0) \times$$
$$\times \varphi(x_1^{\gamma_{11}} \ldots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \ldots x_\ell^{\gamma_{2,k_2}}, x_1^0, \ldots, x_{m-2}^0) \frac{dx}{x} dx^0.$$

Сделав замену переменных

$$y_1 = x_1^{\gamma_{11}} \ldots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}; \quad y_2 = x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \ldots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}; \quad y^0 = (x_1^0, \ldots, x_{m-2}^0);$$

$$t_j = x_j \quad \forall j = 2, \dots, k_1, k_1+2, \dots, \ell;$$

в интеграле, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1},$$
$$y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{-\frac{\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_{k_2}^{-\frac{\gamma_{2k_2}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)\varphi(y_1, y_2, y^0)$$
$$\frac{dy_1}{y_1}\frac{dy_2}{y_2}\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell} dy^0 dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Следовательно, для любого (y_1, y_2, y^0) плотность $f_*\mu$ задаётся формулой

$$f_*\mu = \sum_{s=1}^{d} \nu_s(y_1, y_2, y^0)\left|\frac{dy_1}{y_1}\frac{dy_2}{y_2}dy^0\right|,$$

где функции $\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ имеют вид:

$$\nu_s(y_1, y_2, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-2}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1},$$
$$y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{-\frac{\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_{k_2}^{-\frac{\gamma_{2k_2}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)$$
$$\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Так как при $j = k_2+1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, интеграл в последней формуле сходится, следовательно, $\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ — гладкая функция при $y_1 y_2 \neq 0$.

Докажем конормальность функции $\nu_s(y_1, y_2, y_0)$ в точке $(0,0)$ относительно индексного семейства (E_1^0, E_2^0). Запишем функцию $\nu_s(y_1, y_2, y_0)$ в виде:

$$\nu_s(y_1, y_2, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-k_2}} \chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0)\frac{dt_{k_2+1}}{t_{k_2+1}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell},$$

где

$$\chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k_2-k_1-1}} \chi\left(y_1, y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{-\frac{\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_\ell^{-\frac{\gamma_{2\ell}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0\right)\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\dots\frac{dt_{k_2}}{t_{k_2}},$$

и

$$\chi(y_1, \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{k_1-1}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1},$$
$$\tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Из предложения 2 следует, что функция $\chi(y_1, \tau_{k_1+1}, \tau_{k_1+2}, \dots, \tau_\ell, y^0)$ является конормальной по переменным $(y_1, \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_{k_1+1}, \dots, E_\ell)$ и функция $\chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0)$ является конормальной по переменным $(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_2^0, E_{k_2+1}, \dots, E_\ell)$. Конормальность функции

$\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ в точке $(y_1, y_2) = (0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1^0, E_2^0) следует из утверждения теоремы 6 в случае $\ell_0 = 0$, принимая во внимание условие $\inf E_j > 0$, $\forall j = k_2 + 1, \ldots, \ell$. Тем самым, случай $\ell_0 = 2$ доказан.

Доказательство теоремы 6 в случае произвольного $\ell_0 > 2$ проводится аналогичным образом индукцией по ℓ_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.Álvarez López, Yu.A. Kordyukov *Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one.* In: Foliations: Geometry and Dynamics. (Warsaw, 2000). P. 159–183. World Sci. Publishing. River Edge, NJ, 2002.
2. Соболев С.Л. *Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений* // Матем. сб., 2(44):3. 1937. С. 465–499.
3. Стернин Б.Ю. *Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности* // Тр. ММО, 15, УРСС. М. 1966. С. 38–108.
4. Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. *Относительная эллиптическая теория и задача Соболева* // Матем. сб. 187:11. 1996. С. 115–144.
5. Стернин Б.Ю. *Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева* // Доклады АН СССР. 230:2. 1976. С. 287–290.
6. Стернин Б.Ю. *Проблемы типа С.Л. Соболева в случае подмногообразий с многомерными особенностями* // Доклады АН СССР. 189. 1969. С. 732–735.
7. Стернин Б.Ю. *Эллиптические морфизмы (оснащения эллиптических операторов) для подмногообразий с особенностями* // Доклады АН СССР. 200. 1971. С. 45–48.
8. Стернин Б.Ю. *Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями.* МИЭМ, М. 1974. 108 с.
9. Стернин Б.Ю., Савин А.Ю. *Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями* // Дифференциальные уравнения. 49:4. 2013. С. 513–527.
10. Стернин Б.Ю., Савин А.Ю. *Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями* // Дифференциальные уравнения. 50:2. 2014. С. 229–241.
11. R.B. Melrose *Pseudodifferential operators, corners and singular limits* // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990) P. 217–234, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
12. R.B. Melrose *Calculus of conormal distributions on manifolds with corners* // Internat. Math. Res. Notices 1992. no. 3. P. 51–61.
13. R.B. Melrose *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem. Research Notes in Mathematics, 4.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.
14. Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. *Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов* // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. 29. РУДН. М. 2008. С. 131–164.
15. D. Grieser *Basics of the b-calculus* // Approaches to singular analysis (Berlin, 1999). P. 30–84. Oper. Theory Adv. Appl. 125. Birkhauser. Basel. 2001.
16. V.E. Nazaikinskii, A.Yu. Savin, B.W. Schulze, B.Yu.Sternin *Elliptic theory on singular manifolds.* Chapman Hall//CRC, Boca Raton, FL. 2006.

Юрий Аркадьевич Кордюков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Виктор Александрович Павленко,
ФГБОУ ВПО Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50-летия Октября, 4,
450080, г. Уфа, Россия
E-mail: PVA100186@mail.ru