

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА НЕПОДОБНЫХ ПОДАЛГЕБР СУММЫ ДВУХ ИДЕАЛОВ

Д.Т. СИРАЕВА

Аннотация. Рассматривается двенадцатимерная алгебра Ли L_{12} , допускаемая уравнениями газовой динамики с уравнением состояния специального вида. Алгебра Ли L_{12} является прямой суммой двух идеалов L_{11} и Y_1 . Для алгебры Ли L_{11} , допускаемой уравнениями газовой динамики с произвольным уравнением состояния, оптимальная система неподобных подалгебр построена с точностью до внутренних автоморфизмов. Используя оптимальную систему для алгебры Ли L_{11} , в работе получена оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов L_{11} и Y_1 , а также правило построения таких подалгебр.

Ключевые слова: алгебра Ли, оптимальная система, газовая динамика.

Mathematics Subject Classification: 35Q99

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения газовой динамики (УГД) имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}\rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ S_t + (\vec{u} \cdot \nabla)S &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь \vec{u} – скорость, ρ – плотность, S – энтропия, p – давление связаны уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

Уравнения (1) с уравнением состояния общего вида допускают максимальную алгебру Ли L_{11} , для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена [1]. Для алгебр Ли, допускаемых УГД с уравнениями состояний специального вида [2], оптимальные системы построены не для всех алгебр. Они не построены для алгебр Ли $L_{11} \oplus \{Y_1\}$, $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p\}$ и $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$, где $Y_1 = \partial_p$, $Y_p = \rho \partial_\rho + p \partial_p$, $Y_{p^2} = 2\rho p \partial_\rho + p^2 \partial_p$. В данной работе будет построена оптимальная система неподобных подалгебр для $L_{11} \oplus \{Y_1\}$, которая есть прямая сумма двух идеалов.

Уравнения газовой динамики с произвольным уравнением состояния инвариантны при действии группы G_{11} – группы Галилея, расширенной равномерным растяжением:

- 1°. $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$ (переносы по пространству),
- 2°. $t' = t + a_o$ (перенос по времени),
- 3°. $\vec{x}' = O\vec{x}, \vec{u}' = O\vec{u}, OO^T = 1, \det O = 1$ (вращения),
- 4°. $\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}, \vec{u}' = \vec{u} + \vec{b}$ (Галилеевы переносы),
- 5°. $t' = tc, \vec{x}' = c\vec{x}$ (равномерное растяжение).

D.T. SIRAEVA, OPTIMAL SYSTEM OF NON-SIMILAR SUBALGEBRAS OF SUM OF TWO IDEALS.

© СИРАЕВА Д.Т. 2014.

Работа поддержана грантом № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220 и грантом РФФИ 14-01-97027.

Поступила 5 августа 2013 г.

Группе G_{11} соответствует алгебра Ли L_{11} с базисом из операторов, записанных в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z, \\
 X_4 &= t\partial_x + \partial_u, & X_5 &= t\partial_y + \partial_\nu, & X_6 &= t\partial_z + \partial_w, \\
 X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + \nu\partial_w - w\partial_\nu, \\
 X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\
 X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_\nu - \nu\partial_u, & X_{10} &= \partial_t, \\
 X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Коммутаторы базисных операторов запишем в табл. 1, где вместо операторов $X_i, i = \overline{1, 11}$, стоят их индексы i :

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1							-3	2			1
2							3	-1			2
3							-2	1			3
4							-6	5		-1	
5							6	-4		-2	
6							-5	4		-3	
7		-3	2		-6	5		-9	8		
8		3	-1		6	-4		9	-7		
9		-2	1		-5	4		-8	7		
10				1	2	3					10
11	-1	-2	-3							-10	

2. ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА НЕПОДОБНЫХ ПОДАЛГЕБР L_{12}

Если уравнение состояния общего вида, то максимальная алгебра Ли, допускаемая уравнениями (1) есть L_{11} . Для специальных уравнений состояния возникают дополнительные операторы, расширяющие допускаемую алгебру до L_k, k — размерность алгебры. Неизоморфные алгебры приведены в работе [3]. Для почти всех алгебр оптимальные системы неподобных подалгебр построены. Осталось построить оптимальные системы для алгебр Ли, являющихся прямой суммой двух идеалов (3 случая). Здесь будет построена оптимальная система подалгебр для двух 12-и мерных алгебр Ли, которые изоморфны друг другу. Это алгебры Ли №9: $L_{11} \oplus Y_1$ с уравнением состояния $p = f(\rho) + g(S)$ и №3: $L_{11} \oplus Y_{\bar{p}}$ с уравнением состояния $\bar{p} = \bar{\rho} \bar{f}(\bar{g}(S) \bar{\rho})$, где $Y_1 = \partial_p, Y_{\bar{p}} = \bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}} + \bar{p} \partial_{\bar{p}}$. Эти алгебры эквивалентны. Действительно, при замене $\rho = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}, p = \ln \bar{p}$ следует $Y_1 = Y_{\bar{p}}$, а операторы из L_{11} не меняются. Из уравнений состояния в силу замены следует тождество $\ln(\bar{\rho} \bar{f}(\bar{g}(S) \bar{\rho})) = f(\bar{f}(\bar{g}(S) \bar{\rho})) + g(S)$. Замена $\tau = \bar{\rho} \bar{g}(S)$ дает равенство $-f(\bar{f}(\tau)) + \ln(\tau \bar{f}(\tau)) = \ln(\bar{g}(S)) + g(S)$, в котором переменные τ и S разделились. Можно считать, что обе части равенства равны нулю: $g(S) = -\ln(\bar{g}(S)); \ln(\tau \bar{f}(\tau)) = f(\bar{f}(\tau))$. Следовательно, функции \bar{g}, \bar{f} определяются через функции g, f , то есть уравнения состояния согласованы. При этом в системе (1) изменится только первое уравнение $D \ln \bar{p} = (1 + \rho f'(\rho)) D \ln \rho$, если $f(\rho)$ не постоянно.

Коммутатор Y_1 со всеми операторами $X_i, i = \overline{1, 11}$ равен нулю. Значит, алгебра L_{12} есть прямая сумма двух идеалов $L_{12} = L_{11} \oplus \{Y_1\}$. Далее перечисляются подалгебры различных размерностей с помощью известных подалгебр из L_{11} [4, приложение]. При этом будут использованы внутренние автоморфизмы, которые получаются при решении

задачи с начальными данными для линейного уравнения $X'_a = [X', Y]$, $X' |_{a=0} = X$, $Y = X_i, Y_1, i = \overline{1, 11}$ [2, с. 533] в алгебре Ли L_{12} , где $X = x^i X_i + y^0 Y_1$, $X' = x^{i'} X_i + y^0 Y_1$. Все внутренние автоморфизмы компактно записаны в табл. 2.

Таблица 2

T	$p_1(x') = p_1(x) + x^{11} \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_1 \times p_3(x)$
Г	$p_1(x') = p_1(x) - x^{10} \vec{\alpha}_2, p_2(x') = p_2(x) - \vec{\alpha}_2 \times p_3(x)$
O	$p_1(x') = Op_1(x), p_2(x') = Op_2(x), p_3(x') = Op_3(x)$
A_{10}	$p_1(x') = p_1(x) + a_{10} p_2(x), x^{10'} = x^{10} + a_{10} x^{11}$
A_{11}	$p_1(x') = a_{11} p_1(x), x^{10'} = a_{11} x^{10}$
B_1	$y^{o'} = b_1 y^o$
ε_1	$p_1(x') = -p_1(x), p_2(x') = -p_2(x)$
ε_2	$p_2(x') = -p_2(x), x^{10'} = -x^{10}$

где $\vec{\alpha}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\alpha}_2 = (a_4, a_5, a_6)$, a_{10}, a_{11}, b_1 — параметры автоморфизмов, O — матрица вращения, заданная углами поворота вокруг одной из ортогональных осей, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — замеченные дискретные автоморфизмы.

Выводится правило построения n -мерных неподобных подалгебр в $L_{12} = L_{11} \oplus Y_1$, где $n=2, 3, \dots, 12$ с помощью внутренних автоморфизмов.

Подалгебра размерности n в L_{12} задается базисом $\alpha_1 Y_1 + Z_1, \alpha_2 Y_1 + Z_2, \dots, \alpha_n Y_1 + Z_n$. Можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, то есть подалгебра из L_{12} существенна. Тогда автоморфизм B_1 делает $\alpha_1 = 1$. Вычитание умноженного на соответствующий коэффициент оператора $Y_1 + Z_1$ из остальных дает $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Оператор Z_1 определен с точностью до линейной комбинации операторов Z_2, \dots, Z_n . Коммутаторы базисных операторов подалгебры $Z_1 + Y_1, Z_2, \dots, Z_n$ таковы:

$$[Z_1 + Y_1, Z_j] = \sum_{k=2}^n c_{1j}^k \cdot Z_k = [Z_1, Z_j] \quad (3)$$

так как $[Y_1, Z_j] = 0$; $[Z_j, Z_k] = \sum_{l=2}^n c_{jk}^l \cdot Z_l, k = 2 \dots n$.

Значит, Z_2, \dots, Z_n — идеал размерности $n - 1$ в алгебре $Y_1 + Z_1, Z_2, \dots, Z_n \subset L_{12}$ и идеал в подалгебре $Z_1, \dots, Z_n \subset L_{11}$, если $Z_1 \neq 0$. Таким образом, перечислить подалгебры в L_{12} можно так. Выбрать подалгебры Z_2, \dots, Z_n из оптимальной системы L_{11} . Далее, приписать к базисным операторам оператор $Z_1 + Y_1$, где из Z_1 вычтена линейная комбинация операторов Z_2, \dots, Z_n . Вид оператора Z_1 уточняется вычислением коммутатора по формуле (3). Простейший вид для Z_1 получается внутренними автоморфизмами, сохраняющими операторы Z_2, \dots, Z_n .

Замечание. Если получится, что $Z_1 = 0$, то это тривиальная подалгебра L_{12} . В табл. 3 такие подалгебры не заносятся.

Пример вычисления подалгебры из оптимальной системы для L_{12} . К подалгебре из L_{11} с номером 3.35, с базисом $a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, a^2 + b^2 = 1$ в соответствии с правилом вычисления добавляется оператор $Y_1 + x_1 X^1 + \dots + x_{11} X^{11}$, из которого вычтена линейная комбинация операторов $a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6$. Вычисляются коммутаторы:

$$\begin{aligned} [a1 + 4, Y_1 + x_1 X^1 + \dots + x_{11} X^{11}] &= -ax^8 X_3 + ax^9 X_2 + ax^{11} X_1 - x^8 X_6 + x^9 X_5 - \\ &\quad - x^{10} X_1 = \lambda_1(a1 + 4) + \mu_1(b3 + 5) + \gamma_1(b2 - 6) \\ [b3 + 5, Y_1 + x_1 X^1 + \dots + x_{11} X^{11}] &= -bx^7 X_2 + bx^8 X_1 + bx^{11} X_3 + x^7 X_6 - x^9 X_4 - \\ &\quad - x^{10} X_2 = \lambda_2(a1 + 4) + \mu_2(b3 + 5) + \gamma_2(b2 - 6) \\ [b2 - 6, Y_1 + x_1 X^1 + \dots + x_{11} X^{11}] &= bx^7 X_3 - bx^9 X_1 + bx^{11} X_2 + x^7 X_5 - x^8 X_4 + \\ &\quad + x^{10} X_3 = \lambda_3(a1 + 4) + \mu_3(b3 + 5) + \gamma_3(b2 - 6). \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых базисных операторах дает систему уравнений: $ax^{11} = 0; ax^9 = bx^8; -ax^8 = bx^9; bx^8 = -ax^9; -bx^7 - x^{10} = -bx^7; bx^{11} = 0; -bx^9 = -ax^8; x^{10} = 0; a^2 + b^2 = 1$. Ее решение таково: $x^8 = x^9 = x^{10} = x^{11} = 0$. Значит, подалгебра примет вид $a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + x^1X_1 + x^2X_2 + x^3X_3 + x^7X_7$. Внутренние автоморфизмы упрощают вид подалгебры.

Если $x^7 \neq 0$, то автоморфизмы T, A_{11} (табл. 2) делают $a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + \varepsilon1 + 7, a^2 + b^2 = 1$. Получили подалгебру 4.42 из табл. 3. Если $x^7 = 0$, то следует $a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + c1 + d2 + e3$. Автоморфизм O поворачивает одновременно вокруг осей x^1 и x^4 векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ на угол φ . Угол φ можно выбрать так, чтобы коэффициент при 3 после преобразования равнялся нулю ($\tan \varphi = \frac{-e}{d}$), а заменой базиса второй и третий операторы подалгебры примут прежний вид. В результате получим подалгебру $a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6, Y_1 + c1 + d2, a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ с номером 4.43 из табл. 3.

Теорема 1. Все неподобные нетривиальные подалгебры L_{12} сводятся в следующую Табл. 3, в которой r — размерность подалгебры, i — порядковый номер подалгебры данной размерности, в последних двух колонках приведен номер подалгебр из L_{11} , по которым построена подалгебра в L_{12} . При этом если отбросить оператор, содержащий Y_1 , то получится подалгебра на единицу меньшей размерности из оптимальной системы для L_{11} .

Таблица 3
Оптимальная система неподобных подалгебр для L_{12}

r	i	Базис подалгебры	i (L ₁₁)	
			r-1, i	r, i
2	1	$b4 + c7 + 11, Y_1 + a4 + 7$	1.1	2.1
	2	$a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	1.2, 1.3	2.1
	3	$10, Y_1 + 7 + a11$	1.10	2.2, 2.5
	4	$4 + 10, Y_1 + a1 + 7$	1.9	2.3
	5	$7 + c(4 + 10), Y_1 + a1 + 4 + 10$	1.5	2.3
6	6	$1 + 7, Y_1 + 10$	1.4	2.4
	7	$10, Y_1 + 1 + 7$	1.10	2.4
	8	$7 + \varepsilon10, Y_1 + 10; \varepsilon = 0 \vee 1$	1.3, 1.6	2.5
	9	$10, Y_1 + 7$	1.10	2.5
	10	$10, Y_1 + 11$	1.10	2.6
11	11	$b4 + 7 + a11, Y_1 + 4; a \neq 0$	1.1	2.7
	12	$4, Y_1 + 7 + a11$	1.12	2.7, 2.10
	13	$1, Y_1 + b4 + 7 + a11; a \neq 0$	1.13	2.8
	14	$\varepsilon1 + 7, Y_1 + 4$	1.3, 1.4	2.9, 2.10
	15	$4, Y_1 + \varepsilon1 + 7$	1.12	2.9, 2.10
16	16	$\varepsilon1 + 7, Y_1 + 1$	1.3, 1.4	2.11
	17	$a4 + 7, Y_1 + 1, a \neq 0$	1.2	2.11
	18	$a4 + 7 + 10, Y_1 + 1$	1.5	2.12
	19	$1, Y_1 + a4 + 7 + \varepsilon10$	1.13	2.11, 2.12
	20	$a4 + 11, Y_1 + 5$	1.7	2.13, 2.14
21	21	$4, Y_1 + a5 + 11$	1.12	2.14
	22	$1, Y_1 + a4 + b5 + 11$	1.13	2.15
	23	$10, Y_1 + 1$	1.10	2.17

	24	$1, Y_1 + 10$	1.13	2.17
	25	$4 + 10, Y_1 + a1 + 3$	1.9	2.18
	26	$3, Y_1 + 4 + a6 + 10$	1.13	2.18
	27	$4 + 10, Y_1 + 1$	1.9	2.19
	28	$1, Y_1 + 4 + 10$	1.13	2.19
	29	$a1 + c3 + 5, Y_1 + b1 + d2 + 6; a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1$	1.11	2.20
	30	$3 + 5, Y_1 + 2 - 6$	1.11	2.21
	31	$5, Y_1 + 6$	1.12	2.22
	32	$3 + 4, Y_1 + 2$	1.11	2.23
	33	$a1 + 2, Y_1 + 3 + 4$	1.13	2.23
	34	$b2 + 4, Y_1 + a1 + 2$	1.11, 1.12	2.24
	35	$a1 + 2, Y_1 + 4$	1.13	2.24
	36	$3 + 4, Y_1 + 1$	1.11	2.25
	37	$1, Y_1 + 3 + 4$	1.13	2.25
	38	$4, Y_1 + 1$	1.12	2.26
	39	$1, Y_1 + 4$	1.13	2.26
	40	$a2 + 3, Y_1 + 2$	1.13	2.27
3	1	$a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	2.1	3.3
	2	$10, 7 + a11, Y_1 + 11$	2.2, 2.5	3.2
	3	$a1 + 7, 4 + 10, Y_1 + 1$	2.3	3.6
	4	$1 + 7, 10, Y_1 + 1$	2.4	3.5
	5	$7, 10, Y_1 + 1$	2.5	3.5
	6	$10, 11, Y_1 + 7$	2.6	3.2
	7	$4, 7 + a11, Y_1 + 11$	2.7, 2.10	3.3
	8	$1, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, a \neq 0, c^2 + d^2 = 1$	2.8	3.4, 3.12
	9	$4, \varepsilon1 + 7, Y_1 + 1$	2.9, 2.10	3.13
	10	$1, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	2.11	3.4
	11	$1, a4 + 7, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	2.11	3.5, 3.6, 3.13
	12	$1, a4 + 7 + 10, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	2.12	3.5, 3.6, 3.18
	13	$4, 11, Y_1 + 5$	2.13	3.21
	14	$4, 11, Y_1 + 7$	2.13	3.3
	15	$4, a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, a \neq 0, b^2 + c^2 = 1$	2.14	3.21
	16	$1, a4 + b5 + 11, Y_1 + c4 + d5 + e6, c^2 + d^2 + e^2 = 1$	2.15, 2.16	3.22, 3.23, 3.24
	17	$1, a4 + 11, Y_1 + c4 + 7$	2.15, 2.16	3.4
	18	$1, 10, Y_1 + a2 + b4, a^2 + b^2 = 1$	2.17	3.28, 3.29, 3.33
	19	$1, 10, Y_1 + a4 + 7$	2.17	3.5
	20	$3, 4 + a6 + 10, Y_1 + b1 + c2 + d6, b^2 + c^2 + d^2 = 1$	2.18	3.27, 3.30, 3.31, 3.32

21	$1, 4 + 10, Y_1 + a2 + b4, a^2 + b^2 = 1$	2.19	3.28, 3.29, 3.31
22	$1, 4 + 10, Y_1 + b4 + 7$	2.19	3.6
23	$a1 + c3 + 5, b1 + d2 + 6, Y_1 + e1 + f3 + \varepsilon4, a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1, (e^2 + f^2 = 1, \varepsilon = 0)$	2.20	3.34
24	$3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a4 + 7, a \neq 0$	2.21	3.9
25	$3 + 5, 2 - 6, Y_1 + \varepsilon1 + 7$	2.21	3.9
26	$3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a1 + b2, a^2 + b^2 = 1$	2.21	3.37, 3.40
27	$3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a2 + 4$	2.21	3.34, 3.35
28	$5, 6, Y_1 + a4 + 11$	2.22	3.21
29	$5, 6, Y_1 + a2 + 4$	2.22	3.35, 3.36
30	$a1 + 2, 3 + 4, Y_1 + b1 + c3 + d5 + e6, b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1$	2.23	3.37, 3.44
31	$a1 + 2, 4, Y_1 + b5 + c6 + 11$	2.24	3.22
32	$a1 + 2, 4, Y_1 + d1 + e3 + f5 + h6, d^2 + e^2 + f^2 + h^2 = 1$	2.24	3.37, 3.38, 3.39, 3.41, 3.42, 3.45
33	$1, 3 + 4, Y_1 + a5 + b6 + 10$	2.25	3.27, 3.28
34	$1, 3 + 4, Y_1 + a2 + b5 + 6$	2.25	3.37
35	$1, 3 + 4, Y_1 + a3 + 5$	2.25	3.37
36	$1, 3 + 4, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	2.25	3.44
37	$1, 4, Y_1 + 7 + a10 + b11, a \cdot b = 0$	2.26	3.12, 3.13, 3.18
38	$1, 4, Y_1 + a5 + 11$	2.26	3.23, 3.24
39	$1, 4, Y_1 + a5 + 10$	2.26	3.27, 3.29
40	$1, 4, Y_1 + a3 + 5$	2.26	3.37
41	$1, 4, Y_1 + 2$	2.26	3.45
42	$2, 3, Y_1 + a4 + 7 + b11$	2.27	3.14, 3.15, 3.17
43	$2, 3, Y_1 + a4 + b5 + 11$	2.27	3.25, 3.26
44	$2, 3, Y_1 + a4 + b5 + 10$	2.27	3.30, 3.31, 3.32, 3.33

	45	$2, 3, Y_1 + 4 + b5$	2.27	3.42, 3.43
	46	$2, 3, Y_1 + 5$	2.27	3.45
	47	$2, 3, Y_1 + 1 + b5$	2.27	3.44, 3.46
	48	$2, 3, Y_1 + a4 + 7 + b10, b \neq 0$	2.27	3.19, 3.20
4	1	$7, 8, 9, Y_1 + 11$	3.1	4.1
	2	$7, 8, 9, Y_1 + 10$	3.1	4.2
	3	$1, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	3.4	4.5
	4	$1, 10, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1$	3.5	4.3, 4.7
	5	$1, 4 + 10, a4 + 7, Y_1 + 4$	3.6	4.7
	6	$1, 10, a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	3.7	4.3, 4.12
	7	$5, 6, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, a \neq 0, c^2 + d^2 = 1$	3.8	4.4, 4.15
	8	$3 + 5, 2 - 6, a1 + b4 + 7, Y_1 + c1 + d4, c^2 + d^2 = 1$	3.9	4.17, 4.20
	9	$5, 6, \varepsilon 1 + a4 + 7, Y_1 + b1 + c4, b^2 + c^2 = 1$	3.10, 3.11	4.16, 4.18, 4.19
	10	$5, 6, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	3.11	4.4
	11	$1, 4, 7 + a11, Y_1 + 11$	3.12, 3.13	4.5
	12	$1, 4, 7, Y_1 + 10$	3.13	4.7
	13	$2, 3, b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	3.14	4.6, 4.21
	14	$2, 3, a4 + 7, Y_1 + b4 + 11, a \neq 0$	3.15	4.6
	15	$2, 3, a4 + 7, Y_1 + b1 + c4, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	3.15	4.21, 4.22, 4.24
	16	$2, 3, 1 + 7, Y_1 + a4 + 10$	3.16	4.10, 4.11
	17	$2, 3, 1 + 7, Y_1 + a1 + b4, a^2 + b^2 = 1$	3.16	4.22, 4.24
	18	$2, 3, 7, Y_1 + a4 + 11$	3.17	4.6
	19	$2, 3, 7, Y_1 + a4 + 10$	3.17	4.9, 4.11
	20	$2, 3, 7, Y_1 + a1 + b4, a^2 + b^2 = 1$	3.17	4.21, 4.24
	21	$1, 4, 7 + 10, Y_1 + 10$	3.18	4.7
	22	$2, 3, a4 + 7 + a10, Y_1 + b1 + c(4 + 10), b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	3.19	4.11, 4.25
	23	$2, 3, 7 + 10, Y_1 + a1 + b10, a^2 + b^2 = 1$	3.20	4.9, 4.10, 4.25
	24	$5, 6, a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	3.21	4.4, 4.26
	25	$1, a4 + 5, b4 + c6 + 11, Y_1 + d4 + e6, d^2 + e^2 = 1$	3.22	4.27, 4.28, 4.29
	26	$1, 4, a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	3.23	4.29

27	$1, 4, 11, Y_1 + 7$	3.24	4.5
28	$1, 4, 11, Y_1 + 5$	3.24	4.29
29	$2, 3, a4 + b5 + 11, Y_1 + c4 + d5 + e6, c^2 + d^2 + e^2 = 1, b \neq 0$	3.25	4.30, 4.31
30	$2, 3, a4 + 11, Y_1 + b4 + 7$	3.26	4.6
31	$2, 3, a4 + 11, Y_1 + b4 + c5, b^2 + c^2 = 1$	3.26	4.30, 4.32
32	$3, a1+b2+6, 4+10, Y_1+c1+d2, c^2+d^2 = 1$	3.27	4.35, 4.36
33	$1, 2 + 4, 10, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	3.28	4.37, 4.38
34	$1, 4, 10, Y_1 + a7 + 11$	3.29	4.7, 4.12
35	$1, 4, 10, Y_1 + 7$	3.29	4.7
36	$2, 3, 4 + a5 + 10, Y_1 + b1 + c5 + d6, b^2 + c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	3.30	4.35, 4.39
37	$2, 3, 5+10, Y_1+a1+b5+c6, a^2+b^2+c^2 = 1$	3.31	4.36, 4.37, 4.38, 4.39
38	$2, 3, \varepsilon 4 + 10, Y_1 + a1 + 7$	3.32, 3.33	4.9, 4.10, 4.11
39	$2, 3, 4 + 10, Y_1 + a1 + b5, a^2 + b^2 = 1$	3.32	4.35, 4.39
40	$2, 3, 10, Y_1 + a1 + b5, a^2 + b^2 = 1$	3.33	4.37, 4.38, 4.40
41	$-a2+b3+4, a1+d2-c3+5, -b1+c2+e3+6, Y_1+f1+g2+h3, f^2+g^2+h^2 = 1, a^2(e-d)^2 + b^2e^2 + c^2d^2 = 1$	3.34	4.41
42	$a1+4, b3+5, b2-6, Y_1+\varepsilon 1+7, a^2+b^2 = 1$	3.34, 3.35	4.17, 4.18
43	$a1+4, b3+5, b2-6, Y_1+c1+d2, a^2+b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$	3.35	4.41, 4.42
44	$4, 5, 6, Y_1 + a7 + 11$	3.36	4.15, 4.26
45	$4, 5, 6, Y_1 + \varepsilon 1 + 7$	3.36	4.16, 4.18
46	$4, 5, 6, Y_1 + 1$	3.36	4.43
47	$a1 + 3, b1 + 5, c1 + d2 + 6, Y_1 + e1 + f2 + 4, e^2 + f^2 = \varepsilon, b^2 + c^2 + d^2 = 1$	3.37	4.41
48	$a1+3, b1+5, c1+d2+6, Y_1+e1+f2, e^2+f^2 = 1, b^2 + c^2 + d^2 = 1$	3.37	4.44, 4.47
49	$a1 + 3, 5, 6, Y_1 + b4 + 11$	3.38	4.27, 4.28, 4.29
50	$a1 + 3, 5, 6, Y_1 + b1 + c2 + 4, b^2 + c^2 = \varepsilon$	3.38	4.41, 4.43
51	$a1 + 3, 5, 6, Y_1 + b1 + c2, b^2 + c^2 = 1$	3.38	4.46, 4.47
52	$1, 3 + 5, a2 + 6, Y_1 + b2 + c3 + 4, a \neq -1$	3.39	4.41

	53	$1, 3 + 5, a2 + 6, Y_1 + b2 + c3, b^2 + c^2 = 1$	3.39, 3.40	4.44, 4.47
	54	$1, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a4 + 7$	3.40	4.20
	55	$1, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + b2 + c3 + 4$	3.40	4.41, 4.42
	56	$1, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 11$	3.41	4.19, 4.28
	57	$1, 5, 6, Y_1 + b4 + 7$	3.41	4.19
	58	$1, 5, 6, Y_1 + a2 + b3 + 4, a^2 + b^2 = \varepsilon$	3.41	4.41, 4.43
	59	$1, 5, 6, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	3.41	4.47
	60	$2, 3, 4, Y_1 + 7 + b11, b \neq 0$	3.42	4.21
	61	$2, 3, 4, Y_1 + b1 + 7$	3.42	4.21, 4.22
	62	$2, a1 + 3, 4, Y_1 + \varepsilon1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1$	3.42	4.44, 4.47
	63	$2, a1 + 3, 4, Y_1 + 1$	3.42, 3.43	4.48
	64	$2, 3, 4, Y_1 + a7 + 11$	3.43	4.21
	65	$2, 3, 4, Y_1 + \varepsilon1 + 7$	3.43	4.21, 4.22
	66	$2, 3, 4, Y_1 + \varepsilon1 + a5 + b6, a^2 + b^2 = 1$	3.43	4.44, 4.47
	67	$1, 2, 3 + 4, Y_1 + a5 + b6 + 10$	3.44	4.35, 4.36, 4.37
	68	$1, 2, 3 + 4, Y_1 + a5 + 6$	3.44	4.44, 4.45
	69	$1, 2, 3 + 4, Y_1 + a3 + 5$	3.44	4.45
	70	$1, 2, 3 + 4, Y_1 + 3$	3.44	4.48
	71	$1, 2, 4, Y_1 + a5 + b6 + c10 + d11, c^2 + d^2 = 1$	3.45	4.30, 4.35, 4.36, 4.38
	72	$1, 2, 4, Y_1 + b5 + 6$	3.45	4.47
	73	$1, 2, 4, Y_1 + a3 + b5, a^2 + b^2 = 1$	3.45	4.45, 4.46, 4.48
	74	$1, 2, 3, Y_1 + a4 + 7 + \varepsilon10 + c11, c \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$	3.46	4.23, 4.24, 4.25
	75	$1, 2, 3, Y_1 + a4 + 11$	3.46	4.33, 4.34
	76	$1, 2, 3, Y_1 + \varepsilon4 + 10$	3.46	4.39, 4.40
	77	$1, 2, 3, Y_1 + 4$	3.46	4.48
5	1	$7, 8, 9, 10, Y_1 + 11$	4.2	5.1
	2	$1, a4 + 7, 10, b4 + 11, Y_1 + 4$	4.3	5.2
	3	$5, 6, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	4.4	5.4
	4	$2, 3, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	4.6	5.6

5	1, 4, 10, $7 + a11, Y_1 + 11$	4.7	5.2
6	2, 3, 10, $7 + a11, Y_1 + 11$	4.8, 4.9	5.3
7	2, 3, $\varepsilon 1 + 7, 10, Y_1 + 1$	4.9, 4.10	5.8
8	2, 3, $a1 + 7, 4 + 10, Y_1 + 1$	4.11	5.9
9	1, 4, 10, 11, $Y_1 + 7$	4.12	5.2
10	2, 3, 10, $a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1$	4.13, 4.14	5.10
11	2, 3, 10, 11, $Y_1 + 7$	4.14	5.3
12	4, 5, 6, 7 + $a11, Y_1 + 11, a \neq 0$	4.15	5.4
13	4, 5, 6, 7, $Y_1 + a1 + b11, a^2 + b^2 = 1$	4.16	5.4, 5.18
14	$a1 + 4, 3 + 5, 2 - 6, b1 + 7, Y_1 + 1$	4.17	5.25
15	$a1 + 4, 5, 6, b1 + 7, Y_1 + 1, a^2 + b^2 = 1$	4.18	5.18
16	1, 5, 6, $b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1$	4.19	5.5, 5.18
17	1, 3 + 5, $2 - 6, a4 + 7, Y_1 + 4$	4.20	5.25
18	2, 3, 4, $7 + a11, Y_1 + 11, a \neq 0$	4.21	5.6
19	2, 3, 4, 7, $Y_1 + b1 + c11, b^2 + c^2 = 1$	4.21	5.6, 5.24
20	2, 3, 4, 1 + 7, $Y_1 + 1$	4.22	5.24
21	1, 2, 3, $b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	4.23	5.7, 5.23
22	1, 2, 3, $a4 + 7, Y_1 + b4 + c11, b^2 + c^2 = 1$	4.24	5.7, 5.24
23	1, 2, 3, $a4 + 7, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	4.24	5.8, 5.9, 5.24
24	1, 2, 3, $a4 + 7 + 10, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	4.25	5.8, 5.9, 5.28
25	4, 5, 6, 11, $Y_1 + 7$	4.26	5.4
26	1, $a4 + 5, 6, b4 + 11, Y_1 + 4, a \neq 0$	4.27	5.29
27	1, 5, 6, $a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	4.28	5.5, 5.29
28	1, 4, 6, $a5 + 11, Y_1 + 5$	4.29	5.29
29	2, 3, $a4 + 6, b4 + c5 + 11, Y_1 + d4 + e5, d^2 + e^2 = 1$	4.30	5.30, 5.31 5.32
30	2, 3, 4, $a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	4.31	5.32
31	2, 3, 4, 11, $Y_1 + 7$	4.32	5.6
32	2, 3, 4, 11, $Y_1 + 5$	4.32	5.32
33	1, 2, 3, $a4 + 11, Y_1 + b4 + 7$	4.33, 4.34	5.7
34	1, 2, 3, $a4 + 11, Y_1 + b4 + c5, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	4.33	5.33
35	1, 2, 3, 11, $Y_1 + 4$	4.34	5.34
36	2, 3, $a1 + 5, 4 + b6 + 10, Y_1 + c1 + d6, c^2 + d^2 = 1$	4.35	5.13, 5.15, 5.17
37	2, 3, $a1 + 5, 6 + 10, Y_1 + b1 + c6, b^2 + c^2 = 1$	4.36	5.14, 5.16, 5.17
38	2, 3, 1 + 5, 10, $Y_1 + a1 + b6, a^2 + b^2 = 1$	4.37	5.12, 5.14, 5.16
39	2, 3, 5, 10, $Y_1 + a6 + 11$	4.38	5.10

40	$2, 3, 5, 10, Y_1 + a1 + b6, a^2 + b^2 = 1$	4.38	5.12, 5.14, 5.16
41	$1, 2, 3, 4 + 10, Y_1 + a4 + 7$	4.39	5.9
42	$1, 2, 3, 4 + 10, Y_1 + a4 + b5, a^2 + b^2 = 1$	4.39	5.17
43	$1, 2, 3, 10, Y_1 + a4 + 7 + b11$	4.40	5.8
44	$1, 2, 3, 10, Y_1 + a4 + b11, a^2 + b^2 = 1$	4.40	5.11, 5.12
45	$1, a2 + b3 + 4, c3 + 5, d2 + 6, Y_1 + 3, a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1$	4.41	5.36
46	$1, 4, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + 7$	4.42	5.25
47	$1, 4, 3 + 5, 2 - 6, Y_1 + a2 + b3, a^2 + b^2 = 1$	4.42	5.36
48	$1, 4, 5, 6, Y_1 + 7 + a11$	4.43	5.18
49	$1, 4, 5, 6, Y_1 + 11$	4.43	5.29
50	$1, 4, 5, 6, Y_1 + 2$	4.43	5.35
51	$2, 1 + a3, 3 + 5, 6, Y_1 + b3 + c4, b^2 + c^2 = 1$	4.44	5.36, 5.37
52	$2, 3, 1 + 5, 6, Y_1 + a4 + 10$	4.45	5.13, 5.14
53	$2, 3, 1 + 5, 6, Y_1 + 4$	4.45	5.36
54	$2, 3, 1 + 5, 6, Y_1 + 1$	4.45	5.37
55	$2, 3, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 11$	4.46	5.19 ¹ , 5.31
56	$2, 3, 5, 6, Y_1 + a4 + b7 + 10$	4.46	5.15, 5.16, 5.26, 5.27
57	$2, 3, 5, 6, Y_1 + 4 + a7$	4.46	5.20, 5.35
58	$2, 3, 5, 6, Y_1 + a1 + b7, a^2 + b^2 = 1$	4.46	5.21, 5.22, 5.37
59	$1 + a3, 2, 5, 6, Y_1 + b4 + 11$	4.47	5.30, 5.32
60	$1 + a3, 2, 5, 6, Y_1 + b3 + c4, b^2 + c^2 = 1$	4.47	5.35, 5.36, 5.37
61	$1, 2, 3, 4, Y_1 + 7 + a11, a \neq 0$	4.48	5.23
62	$1, 2, 3, 4, Y_1 + 7 + a10$	4.48	5.24, 5.28
63	$1, 2, 3, 4, Y_1 + a5 + b10, a^2 + b^2 = 1$	4.48	5.12, 5.17, 5.37
64	$1, 2, 3, 4, Y_1 + a5 + 11$	4.48	5.33, 5.34
6	1	$1, 5, 6, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	5.5
	2	$1, 2, 3, a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	5.7

¹в работе [4], Приложение. Оптимальная система подалгебр основной алгебры, в подалгебре 5.19 опечатка, см. книгу [1], Приложение, Табл. 2, подалгебру 5.10.

3	$1, 2, 3, 10, b4+7+a11, Y_1+c4+d11, c^2+d^2=1$	5.8	6.3, 6.11
4	$1, 2, 3, a4+7, 4+10, Y_1+4$	5.9	6.11
5	$2, 3, 5, 10, a6+11, Y_1+6$	5.10	6.12
6	$1, 2, 3, 10, 11, Y_1+a4+7$	5.11	6.3
7	$1, 2, 3, 10, 11, Y_1+4$	5.11	6.14
8	$1, 2, 3, 10, 4+a11, Y_1+b4+7$	5.12	6.3, 6.11
9	$1, 2, 3, 10, 4+a11, Y_1+b4+c5, b^2+c^2=1$	5.12	6.13, 6.14, 6.21
10	$2, 3, a1+5, 6, 4+10, Y_1+1, a \neq 0$	5.13	6.22
11	$2, 3, 1+5, 6, 10, Y_1+1$	5.14	6.21
12	$2, 3, 5, 6, \varepsilon4+10, Y_1+a1+b7, a^2+b^2=1$	5.15, 5.16	6.8, 6.9, 6.10, 6.21, 6.22
13	$1, 2, 3, 6, 4+10, Y_1+a4+b5, a^2+b^2=1$	5.17	6.21, 6.22
14	$1, 4, 5, 6, 7+a11, Y_1+11$	5.18	6.4
15	$2, 3, 5, 6, 7+a11, Y_1+b4+c11, b^2+c^2=1$	5.19, 5.22	6.6, 6.15, 6.17
16	$2, 3, 5, 6, a4+7, Y_1+b4+11, a \neq 0$	5.20	6.6
17	$2, 3, 5, 6, a4+7, Y_1+b1+c4, b^2+c^2=1, a \neq 0$	5.20	6.16, 6.17, 6.19
18	$2, 3, 5, 6, 1+7, Y_1+a4+10$	5.21	6.9, 6.10
19	$2, 3, 5, 6, 1+7, Y_1+4$	5.21	6.16
20	$2, 3, 5, 6, 1+7, Y_1+1$	5.21	6.19
21	$2, 3, 5, 6, 7, Y_1+4+b10$	5.22	6.10, 6.17
22	$2, 3, 5, 6, 7, Y_1+10$	5.22	6.8
23	$2, 3, 5, 6, 7, Y_1+1$	5.22	6.19
24	$1, 2, 3, 4, 7+a11, Y_1+11$	5.23, 5.24	6.5
25	$1, 2, 3, 4, 7, Y_1+10$	5.24	6.11
26	$2, 3, 5, 6, a4+7+a10, Y_1+b1+c4+c10, b^2+c^2=1, a \neq 0$	5.26	6.10, 6.20
27	$2, 3, 5, 6, 7+10, Y_1+a1+b10, a^2+b^2=1$	5.27	6.8, 6.9, 6.20
28	$1, 2, 3, 4, 7+10, Y_1+10$	5.28	6.11
29	$1, 4, 5, 6, 11, Y_1+7$	5.29	6.4
30	$2, 3, 5, 6, b4+11, Y_1+7$	5.30	6.6
31	$2, 3, a4+5, 6, b4+11, Y_1+4$	5.30, 5.31	6.23
32	$2, 3, 5, 6, b4+11, Y_1+c4+7$	5.30, 5.31	6.6
33	$2, 3, 4, 6, a5+11, Y_1+5$	5.32	6.23
34	$1, 2, 3, 4, 11, Y_1+7$	5.33, 5.34	6.5

	35	1, 2, 3, 4, $a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1$	5.33, 5.34	6.24
	36	2, 3, 4, 5, 6, $Y_1 + a7 + 11$	5.35	6.15, 6.23
	37	2, 3, 4, 5, 6, $Y_1 + a1 + b7, a^2 + b^2 = 1$	5.35	6.16, 6.17, 6.25
	38	2, 3, 4, 5, 1 + 6, $Y_1 + 1$	5.36	6.25
	39	1, 2, 3, 5, 6, $Y_1 + a4 + b7 + 11$	5.37	6.18, 6.24
	40	1, 2, 3, 5, 6, $Y_1 + a4 + b7 + c10, a^2 + b^2 + c^2 = 1$	5.37	6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.25
7	1	4, 5, 6, 7, 8, 9, $Y_1 + 11$	6.1	7.2
	2	1, 2, 3, 7, 8, 9, $Y_1 + 11$	6.2	7.1
	3	1, 2, 3, 7, 8, 9, $Y_1 + 10$	6.2	7.3
	4	1, 2, 3, $a4 + 7, 10, b4 + 11, Y_1 + 4$	6.3	7.5
	5	2, 3, 5, 6, $a4 + 7, b4 + 11, Y_1 + 4$	6.6	7.8
	6	2, 3, 5, 6, 7 + $a11, 10, Y_1 + 11$	6.7, 6.8	7.4
	7	2, 3, 5, 6, $\varepsilon1 + 7, 10, Y_1 + 1$	6.8, 6.9	7.6
	8	2, 3, 5, 6, $a1 + 7, 4 + 10, Y_1 + 1$	6.10	7.7
	9	1, 2, 3, 4, 7 + $a11, 10, Y_1 + 11$	6.11	7.5
	10	2, 3, 5, 6, 10, 11, $Y_1 + 7$	6.12	7.4
	11	1, 2, 3, 4, 10, $a5 + 11, Y_1 + b5 + c6, b^2 + c^2 = 1, a \neq 0$	6.13	7.10
	12	1, 2, 3, 4, 10, 11, $Y_1 + 7$	6.14	7.5
	13	1, 2, 3, 4, 10, 11, $Y_1 + 5$	6.14	7.10
	14	2, 3, 4, 5, 6, 7 + $a11, Y_1 + 11$	6.15, 6.17	7.8
	15	2, 3, 4, 5, 6, 1 + 7, $Y_1 + 1$	6.16	7.12
	16	2, 3, 4, 5, 6, 7, $Y_1 + 1$	6.17	7.12
	17	1, 2, 3, 5, 6, $b4 + 7 + a11, Y_1 + c4 + d11, c^2 + d^2 = 1, a \neq 0$	6.18	7.9, 7.11
	18	1, 2, 3, 5, 6, $a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	6.19	7.9
	19	1, 2, 3, 5, 6, $a4 + 7 + \varepsilon10, Y_1 + b4 + c10, b^2 + c^2 = 1$	6.19, 6.20	7.6, 7.7, 7.12, 7.13
	20	1, 2, 3, 5, 6, 10, $Y_1 + a4 + b7 + c11, a^2 + b^2 + c^2 = 1$	6.21	7.6, 7.10, 7.14
	21	1, 2, 3, 5, 6, 4 + 10, $Y_1 + a4 + b7, a^2 + b^2 = 1$	6.22	7.7, 7.14
	22	2, 3, 4, 5, 6, 11, $Y_1 + 7$	6.23	7.8
	23	1, 2, 3, 5, 6, $a4 + 11, Y_1 + b4 + c7, b^2 + c^2 = 1$	6.24	7.9, 7.15
	24	1, 2, 3, 4, 5, 6, $Y_1 + a7 + 11$	6.25	7.11, 7.15
	25	1, 2, 3, 4, 5, 6, $Y_1 + a7 + b10, a^2 + b^2 = 1$	6.25	7.12, 7.13, 7.14

8	1	1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, $Y_1 + 11$	7.3	8.1
	2	1, 2, 3, 5, 6, 10, $b_4 + 7 + a_{11}, Y_1 + c_4 + d_{11}, c^2 + d^2 = 1$	7.6	8.2, 8.3
	3	1, 2, 3, 5, 6, $a_4 + 7, 4 + 10, Y_1 + 10$	7.7	8.3
	4	1, 2, 3, 5, 6, $a_4 + 7, b_4 + 11, Y_1 + 4$	7.9	8.4
	5	1, 2, 3, 5, 6, 10, $a_4 + 11, Y_1 + b_4 + c_7, b^2 + c^2 = 1$	7.10	8.2, 8.5
	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + $a_{11}, Y_1 + 11$	7.11, 7.12	8.4
	7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + $\varepsilon_{10}, Y_1 + 10$	7.12, 7.13	8.3
	8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, $Y_1 + a_7 + b_{11}, a^2 + b^2 = 1$	7.14	8.3, 8.5
	9	1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, $Y_1 + 7$	7.15	8.4
9	1	1, 2, 3, 5, 6, $a_4 + 7, 10, b_4 + 11, Y_1 + 4$	8.2	9.1
	2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + $a_{11}, 10, Y_1 + 11$	8.3	9.1
	3	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, $Y_1 + 7$	8.5	9.1
10	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $Y_1 + 10$	9.2	10.2
	2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $Y_1 + 11$	9.2	10.1
11	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $Y_1 + 11$	10.2	11.1

Замечание. Если вычеркнуть Y_1 из последнего оператора базиса из L_{12} , то получится подалгебра из L_{11} , номер которой указан в последней колонке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
2. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. *Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография*. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2012. 659 с.
3. Хабиров С.В. *Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газодинамического типа* // УМЖ. 2011. Т. 3, № 2. С. 87–90.
4. Хабиров С.В. *Аналитические методы в газовой динамике*. Уфа. Гилем. 2003. 192 с.

Дилара Тахировна Сираева,
УГАТУ, НИЛ ГАММЕТТ,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: sirdilara@gmail.com