ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 84-93.

УДК 517.91

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э.М. МУХАМАДИЕВ, И.Д. НУРОВ, М.Ш. ХАЛИЛОВА

Аннотация. Работа посвящена выявлению предельных циклов в окрестности состояний равновесий негладких динамических систем. Получены новые фазовые портреты, которые не наблюдаются в линейном случае. Использован метод сшивания решений из двух полуплоскостей. Наряду с использованием стандартных пакетов, построен новый пакет программ для численного построения фазовых портретов.

Ключевые слова: динамические системы, негладкость, устойчивость, фазовая плоскость, предельный цикл.

Mathematics Subject Classification: 37G15, 34C05

Негладкие эффекты имеют важное значение в различных разделах физики, механики, биологии, экономики и т.д. [1-7]. Функционирование системы с негладкими элементами, как правило, зависит от одного или нескольких параметров. Изменение каких-либо параметров может влиять на структуру решений в целом, или переводить систему из одного состояния в другое. Следует отметить, что модели негладких систем описываются посредством дифференциальных уравнений с негладкими, релейными или гистерезисными нелинейностями.

Задачи исследования предельных циклов в негладких динамических системах, как правило, достаточно сложны, и поэтому при их исследовании эффективным представляется применение численных методов. Следовательно, актуальными будут разработка программы и компьютерное моделирование поведения предельных циклов негладких (модельных и кусочно-линейных) динамических систем.

Настоящая работа посвящена исследованию общих кусочно-линейных уравнений второго порядка

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \tag{1}$$

где a, b, c — вещественные числа, а λ — скалярный параметр.

Отправным пунктом для авторов послужила работа [5], где исследовано конкретное кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + y' + y + \frac{3}{2}|y' - \lambda| = 0, \tag{2}$$

зависящее от параметра λ. Уравнение (2) имеет единственную особую точку (состояние равновесия)

$$y = -\frac{3}{2}|\lambda|, \;\; y' = 0, \;\; \forall\lambda \in R.$$

В работе [5] приведены анализ и сравнение фазовых портретов системы, соответствующей уравнению (2), и с помощью компьютерного моделирования установлено существование предельного цикла при определенных значениях параметра λ.

E.M. Mukhamsdiev, I.D. Nurov, M.Sh. Khalilova, Limiting cycles of piece-linear second order differential equations.

Поступила 1 июня 2013 г.

Ниже проведен полный анализ поведения траектории уравнения (1) при $\lambda = 0$ в зависимости от значений коэффициентов a, b, c и получены (теоремы 1 и 2) общие условия существования предельных циклов в зависимости от значения коэффициентов a, b, c и параметра λ.

Линейное уравнение. Сначала рассмотрим линейное уравнение, которое получается из уравнения (1) при $c = 0, \lambda = 0$:

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{3}$$

Фазовый портрет соответствующей системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1, \end{cases} \tag{4}$$

определяется корнями μ_1 и μ_2 характеристического уравнения

$$\mu^2 + a\mu + b = 0. \tag{5}$$

Возможны следующие случаи (более подробно см., напр., [8]).

1. Числа μ_1 и μ_2 вещественны и разных знаков, что соответствует выполнению неравенства $b < 0$. Тогда траектории системы (4) (кроме идущих по прямым $x_2 = \mu_1 x_1, x_2 = \mu_2 x_1$) похожи на гиперболы, и в этом случае особая точка называется *седлом*.

2. Числа μ_1 и μ_2 вещественны и одного знака, причем $\mu_1 > \mu_2$ $(0 < 4b < a^2)$. Тогда траектории системы сходны с дугами парабол, касающимися прямой $x_2 = \mu_2 x_1$ в точке $(0, 0)$, если $\mu_2 > 0$ (a>0), или прямой $x_2 = \mu_1 x_1$, если $\mu_1 < 0$ (a<0); полупрямые $x_2 = \mu_1 x_1, x_2 = \mu_2 x_1$ $(x_1 > 0$ или $x_1 < 0$) тоже являются траекториями. В этом случае особая точка называется *узлом* (устойчивым узлом, если $\mu_1 < 0$, и неустойчивым узлом, если $\mu_2 > 0$). Если $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, то особая точка называется *вырожденным узлом*. Вырожденный узел является устойчивым, если $\mu_1 = \mu_2 < 0$ $(4b = a^2, a > 0)$, и неустойчивым, если $\mu_1 = \mu_2 > 0$ $(4b = a^2, a < 0)$.

3. Числа $\mu_1 = \alpha + i\beta$ и $\mu_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$ комплексны $(4b > a^2,\quad \alpha = -a/2,$ $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2)$. В этом случае траектории совершают бесконечно много оборотов вокруг особой точки — начала координат. При $\alpha = 0$ траектории-окружности и особая точка называется *центром*, а при $\alpha \neq 0$ особая точка называется *фокусом*. Фокус устойчивый, если $\alpha < 0$, и неустойчивый, если $\alpha > 0$.

Кусочно-линейное уравнение. Рассмотрим кусочно-линейное уравнение второго порядка

$$y'' + ay' + by + c|y'| = 0, \tag{6}$$

где $c \neq 0$. Уравнение (6) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_2|, \end{cases} \tag{7}$$

где $x_1 = y, \quad x_2 = y'$. Если $b \neq 0$, то система (7) имеет единственную особую точку $(0, 0)$. Подробно остановимся на изучении поведения траектории кусочно-линейной системы (7) в фазовой плоскости (x_1, x_2). Мы выделим те особенности фазового портрета кусочно-линейных систем, которые не наблюдаются в линейных системах.

Уравнение (6) "склеивается" из линейных уравнений

$$y'' + (a + c)y' + by = 0, \quad \text{если} \quad y' > 0 \tag{8}$$

и

$$y'' + (a - c)y' + by = 0, \quad \text{если} \quad y' \leqslant 0. \tag{9}$$

Обозначим через $\mu_1^\pm$ и $\mu_2^\pm$ корни характеристического уравнения

$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0, \tag{10}$$

соответствующего уравнениям (8) и (9):

$$\mu_1^{\pm} = -\frac{1}{2}\left\{(a \pm c) - \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b}\right\}, \qquad \mu_2^{\pm} = -\frac{1}{2}\left\{(a \pm c) + \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b}\right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $b \neq 0$. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. Числа $\mu_1^{\pm}$ и $\mu_2^{\pm}$ вещественны, причем $\mu_1^{+}\mu_2^{+} < 0$. Эти условия эквивалентны условию отрицательности коэффициента b : $b < 0$ и, следовательно, $\mu_1^{-}\mu_2^{-} = b < 0$. Тогда траектории (кроме идущих по полупрямым $x_2 = \mu_1^{+}x_1, x_2 = \mu_1^{-}x_1, \quad x_1 > 0$ и $x_2 = \mu_2^{+}x_1, x_2 = \mu_2^{-}x_1, \quad x_1 < 0$) похожи на гиперболы и расположены в секторах, образованных лучами

$$x_2 = \mu_1^{-}x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_1^{+}x_1 \quad \text{при} \quad x_1 > 0;$$
$$x_2 = \mu_1^{+}x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_2^{+}x_1 \quad \text{при} \quad x_2 > 0;$$
$$x_2 = \mu_2^{+}x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_2^{-}x_1 \quad \text{при} \quad x_1 < 0;$$
$$x_2 = \mu_1^{-}x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_2^{-}x_1 \quad \text{при} \quad x_2 < 0.$$

В этом случае особую точку кусочно-линейной системы назовем *седлом.*

Случай 2. Числа $\mu_1^{\pm}, \quad \mu_2^{\pm}$ вещественны и одного знака. Эти условия в терминах коэффициентов эквивалентны выполнению неравенств

$$0 < 4b \leqslant \min\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\}, \quad |c| < |a|.$$

Если все числа $\mu_1^{\pm}, \quad \mu_2^{\pm}$ отрицательны (что соответствует условию $a > 0$), траектории системы (7) являются касающимися прямой $x_2 = \mu_1^{+}x_1$ при $x_1 < 0$ или прямой $x_2 = \mu_1^{-}x_1$ при $x_1 > 0$ в точке $(0,0)$; полупрямые $x_2 = \mu_1^{+}x_1, \quad x_2 = \mu_2^{+}x_1$ при $x_1 < 0$ и $x_2 = \mu_1^{-}x_1, \quad x_2 = \mu_2^{-}x_1$ при $x_1 > 0$ тоже являются траекториями системы (7). В этом случае особую точку назовем *узлом.* Так как по всем траекториям происходит движение к точке $(0,0)$ при $t \to \infty$, то точка $(0,0)$ является устойчивым узлом.

Если все числа $\mu_1^{\pm}, \quad \mu_2^{\pm}$ положительны (что соответствует условию $a < 0$), траектории системы (7) являются касающимися прямой $x_2 = \mu_2^{-}x_1$ при $x_1 < 0$ или прямой $x_2 = \mu_2^{+}x_1$ при $x_1 > 0$ в точке $(0,0)$; полупрямые $x_2 = \mu_1^{+}x_1, \quad x_2 = \mu_2^{+}x_1$ при $x_1 > 0$ и $x_2 = \mu_1^{-}x_1, \quad x_2 = \mu_2^{-}x_1$ при $x_1 < 0$ тоже являются траекториями системы (7). И в этом случае особую точку назовем *узлом.* Так как по всем траекториям происходит движение к точке $(0,0)$ при $t \to -\infty$, то точка $(0,0)$ является неустойчивым узлом.

Случай 3. Числа μ_1^{+}, μ_2^{+} и μ_1^{-}, μ_2^{-} вещественны и $\mu_1^{+}\mu_2^{+} > 0$, $\mu_1^{-}\mu_2^{-} > 0$, $\mu_1^{+}\mu_1^{-} < 0$. Эти условия в терминах коэффициентов эквивалентны выполнению неравенств

$$0 < 4b \leqslant \min\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\}, \quad |a| < |c|.$$

Если $\mu_1^{+} > 0$, то $\mu_2^{+} > 0$, $\mu_1^{-} < 0$ и $\mu_2^{-} < 0$ (что соответствует условию $c < 0$), все траектории системы (7), проходящие из точек открытого сектора, образованного лучами $x_2 = \mu_1^{+}x_1$ и $x_2 = \mu_1^{+}x_1$ ($x_2 = \mu_1^{-}x_1$ и $x_2 = \mu_1^{-}x_1$) при $x_1 > 0$, являются касающимися прямой $x_2 = \mu_2^{+}x_1$ ($x_2 = \mu_1^{-}x_1$) в точке $(0,0)$; полупрямые $x_2 = \mu_1^{+}x_1$, $x_2 = \mu_2^{+}x_1$ и $x_2 = \mu_1^{-}x_1$, $x_2 = \mu_2^{-}x_1$ при $x_1 > 0$ тоже являются траекториями системы (7). Все траектории системы (7), проходящие из точек $(x_1, 0), x^1 > 0$ ($(x_1, 0), x^1 < 0$), стремятся к точке $(0,0)$ (неограниченно удаляются в бесконечность) при $t \to \pm\infty$ и заполняют сектор между лучами $x_2 = \mu_1^{-}x_1$ и $x_2 = \mu_2^{+}x_1$, содержащийся в полуплоскости $x_1 > 0$ ($x_2 = \mu_1^{+}x_1$ и $x_2 = \mu_2^{-}x_1$, содержащий полуплоскость $x_1 < 0$).

Если $\mu_1^{+} < 0$, то $\mu_2^{+} < 0$, $\mu_1^{-} > 0$ и $\mu_2^{-} > 0$ (что соответствует условию $c > 0$).

Таким образом, нулевая особая точка содержит узловой сектор и эллиптический сектор.

Случай 4. Из двух пар чисел $\mu_{1,2}^{+}, \mu_{1,2}^{-}$ одна пара — комплексные числа, а другая — вещественные числа. Эти условия в терминах коэффициентов эквивалентны выполнению неравенств

$$\min\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\} < 4b \leqslant \max\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\}.$$

Пусть $\mu^-_{1,2}$ — комплексные, а $\mu^+_{1,2}$ — вещественные и положительные. Этому случаю соответствуют условия

$$(a-c)^2 < 4b \leqslant (a+c)^2, \quad c < 0.$$

Тогда траектории, образованные полупрямыми $x_2 = \mu^+_1 x_1$ и $x_2 = \mu^+_2 x_1$ при $x_1 > 0$, расположены в первой четверти, и вдоль всех траекторий, проходящих из точек сектора, образованного этими полупрямыми в первой четверти, происходит движение от точки $(0,0)$ при возрастании времени t. Все остальные траектории системы (7), отличные от особой точки, проходят через точки $(x_1, 0), x_1 > 0$ $((x_1, 0), x_1 < 0)$, стремятся к точке $(0,0)$ при $t \to -\infty$ и асимптотически приближаются к полупрямой $x_2 = \mu^+_1 x_1, \quad x_1 > 0$ в бесконечности при $t \to +\infty$. Отметим, что при $t \to -\infty$ все ненулевые траектории, кроме $x_2 = \mu^+_1 x_1, x_1 > 0$, приближаются к точке $(0,0)$, касаясь прямой $x_2 = \mu^+_2 x_1$, и при $t \to +\infty$ все ненулевые траектории, кроме $x_2 = \mu^+_2 x_1, x_1 > 0$, асимптотически приближаются к полупрямой $x_2 = \mu^+_1 x_1, \quad x_1 > 0$. В этом случае особую точку назовем неустойчивым *полуузлом.*

Если $\mu^-_{1,2}$ — комплексные, а $\mu^+_{1,2}$ вещественные отрицательные, что соответствует условиям

$$(a-c)^2 < 4b \leqslant (a+c)^2, \quad c > 0,$$

то траектории, образованные полупрямыми $x_2 = \mu^+_1 x_1$ и $x_2 = \mu^+_2 x_1$, при $x_1 < 0$, расположены во второй четверти, и вдоль всех траекторий, проходящих из точек сектора, образованного этими полупрямыми во второй четверти, происходит движение к точке $(0,0)$ при возрастании времени t; все остальные траектории системы (7), отличные от особой точки, проходят через точки $(x_1, 0), x_1 > 0$ $((x_1, 0), x_1 < 0)$, стремятся к точке $(0,0)$ при $t \to +\infty$ и асимптотически приближаются к полупрямой $x_2 = \mu^+_2 x_1, \quad x_1 < 0$ при $t \to -\infty$. Аналогично выше приведенному случаю при $t \to +\infty$ все ненулевые траектории, кроме $x_2 = \mu^+_2 x_1, x_1 < 0$, приближаются к точке $(0,0)$, касаясь прямой $x_2 = \mu^+_1 x_1$, и при $t \to -\infty$ все ненулевые траектории, кроме $x_2 = \mu^+_1 x_1, x_1 < 0$, асимптотически приближаются к полупрямой $x_2 = \mu^+_2 x_1, \quad x_1 < 0$. В этом случае особую точку назовем устойчивым *полуузлом.*

Возможны еще следующие два случая, когда $\mu^+_{1,2}$ — комплексные, а $\mu^-_{1,2}$ — вещественные положительные, что соответствуют условиям

$$(a+c)^2 < 4b \leqslant (a-c)^2, \quad c > 0,$$

и когда $\mu^+_{1,2}$ — комплексные, а $\mu^-_{1,2}$ — вещественные отрицательные, что соответствует условиям

$$(a+c)^2 < 4b \leqslant (a-c)^2, \quad c < 0.$$

В этих случаях собственные лучи $x_2 = \mu^-_1 x_1, \quad x_2 < 0$ и $x_2 = \mu^-_2 x_1, \quad x_2 < 0$ системы (7) лежат соответственно в третьей и четвертой четвертях, и поведения траектории системы аналогичны рассмотренным выше случаям. Особая точка является соответственно неустойчивым и устойчивым полуузлом. Этому соответствует рис. 1.

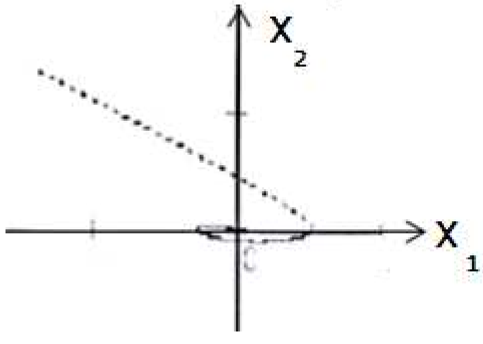

Рис. 1.

Случай 5. Числа $\mu^+_{1,2}, \quad \mu^-_{1,2}$ — комплексные, что эквивалентно условию

$$4b > \max\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству $4b > \{|a|+|c|\}^2$. По коэффициентам a, b, c определим число

$$\gamma = \frac{a+c}{\sqrt{4b-(a+c)^2}} + \frac{a-c}{\sqrt{4b-(a-c)^2}}.$$

Ниже на рис. 2 приведена графическая иллюстрация

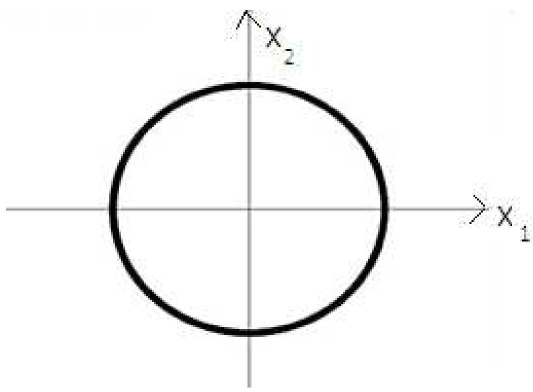

Рис. 2.

Лемма 1. *Пусть коэффициенты удовлетворяют неравенству* $4b > \{|a|+|c|\}^2$. *Тогда числа* γ *и* a *либо одновременно равны нулю, либо имеют одинаковый знак.*

Доказательство. Если $a = 0$, то ясно, что $\gamma = 0$. Обратно, пусть $\gamma = 0$. Тогда имеет место равенство $(a+c)^2(4b-(a-c)^2) = (a-c)^2(4b-(a+c)^2)$, из которого следует, что $a = 0$. Таким образом, $\gamma = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$. Следовательно, знаки чисел γ и a при $4b > \{|a|+|c|\}^2$, $a \neq 0$ не зависят от c. Но при $c = 0$ имеет место равенство $sgn(\gamma) = sgn(a)$. Лемма доказана.

Имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть числа* $\mu^+_{1,2}, \quad \mu^-_{1,2}$ *— комплексные. Тогда ненулевые траектории системы (7) совершают бесконечно много оборотов вокруг особой точки* $(0,0)$*; при* $t \to +\infty$ *приближаются к ней, если* $a > 0$*; удаляются от нее если* $a < 0$*; являются замкнутыми, если* $a = 0$. Этому соответствует рис. 3.

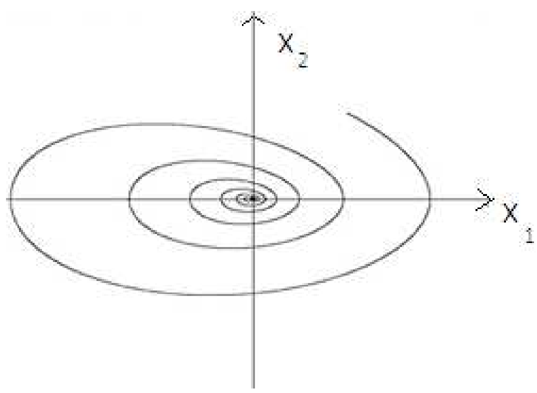

Рис. 3.

Доказательство. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y(t) = \exp(\alpha^+ t)\left\{C_1 \cos(\beta^+ t) + C_2 \sin(\beta^+ t)\right\},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а

$$\alpha^+ = -\frac{a+c}{2}, \quad \beta^+ = \frac{1}{2}\sqrt{4b-(a+c)^2}, \quad \mu^+_{1,2} = \alpha^+ \pm \beta^+ i.$$

Отсюда, для частного решения $y_+(t)$, удовлетворяющего начальным условия $y_+(0) = y_0 < 0$, $y'_+(0) = 0$, имеем

$$y_+(t) = \frac{y_+(0)}{\beta^+}\exp(\alpha^+ t)\left\{\beta^+ \cos(\beta^+ t) - \alpha^+ \sin(\beta^+ t)\right\}.$$

Это решение удовлетворяет условиям

$$y'_+(t) > 0, \quad 0 < t < t_1 \equiv \frac{\pi}{\beta^+}, \quad y'_+(t_1) = 0, \quad y_+(t_1) > 0.$$

Аналогично проверяется, что функция

$$y_-(t) = \frac{y_-(t_1)}{\beta^-}\exp(\alpha^-(t-t_1))\left\{\beta^- \cos(\beta^-(t-t_1)) - \alpha^- \sin(\beta^-(t-t_1))\right\},$$

где

$$\alpha^- = -\frac{a-c}{2}, \quad \beta^- = \frac{1}{2}\sqrt{4b-(a-c)^2}, \quad \mu^-_{1,2} = \alpha^- \pm \beta^- i$$

является решением уравнения (9), и если $y_-(t_1) > 0$, то удовлетворяет условиям

$$y'_-(t) > 0, \quad t_1 < t < t_2 \equiv t_1 + \frac{\pi}{\beta^-}, \quad y'_-(t_2) = 0, \quad y_-(t_1) < 0.$$

Следовательно, если полагать $y_-(t_1) = y_+(t_1)$, то функция

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{если } 0 \leqslant t < t_1, \\ y_2(t), & \text{если } t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \end{cases}$$

является решением уравнения (6) и удовлетворяет условиям

$$y(0) = y_+(0), \quad y'(0) = y'_+(0) = 0, \quad y(t_2) = y(0)\exp(-\gamma\pi), \quad y'(t_2) = y'_-(t_2) = 0.$$

Таким образом траектория $(x_1(t), x_2(t)) = (y(t), y'(t))$ решения системы (7) за промежуток времени $[0, t_2]$ совершает полный оборот вокруг особой точки $(0,0)$ и возвращается на исходный луч $(x_1, 0)$, $x_1 < 0$. При этом начальная точка $(y_+(0), 0)$ переходит в точку $\exp(-\gamma\pi)(y_+(0), 0)$. Отсюда и из леммы 1 следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что если выполнено условие $4b > \{|a| + |c|\}^2$, то особая точка $(0,0)$ является фокусом при $a \neq 0$ и центром при $a = 0$, причем фокус устойчивый, если $a > 0$ и неустойчивый, если $a < 0$; качественное поведение траектории не зависит от конкретного значения коэффициента c.

Предельные циклы кусочно-линейных уравнений, зависящих от параметра. Рассмотрим уравнение, зависящее от параметра, вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \tag{11}$$

где a, b, c — вещественные числа, а λ — скалярный параметр. Уравнение (11) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - bx_1 - c|x_2 - \lambda|. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) при $b \neq 0$ имеет единственную особую точку $(-c|\lambda|/b, 0)$, которая зависит от коэффициентов c, b и параметра λ уравнения.

Нас интересует изменение фазового портрета системы (12) в зависимости от значений коэффициентов и параметра уравнения.

Лемма 3. *Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенствам:*

$$(a-c)^2 < 4b \leqslant (a+c)^2. \tag{13}$$

Тогда для любого λ все решения системы (12) ограничены при $t > 0$, если $a + c > 0$ и при $t < 0$, если $a + c < 0$.

Доказательство. Пусть $a + c > 0$. Если некоторое решение $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ системы (12) неограничено при $t > 0$, то существует последовательность t_k, $0 < t_k < t_{k+1}$, $k = 1, 2, ...$ такая, что $t_k \to \infty$ и $|x(t_k)| \to \infty$ при $k \to \infty$. Выберем числа $\tau_k \in [0, t_k]$ такие, что

$$|x(\tau_k)| = \max_{0\leqslant t\leqslant t_k} |x(t)|.$$

Из неравенства $|x(\tau_k)| \geq |x(t_k)|$ следует $d_k \equiv x(\tau_k)| \to \infty$ и, следовательно, $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Функции

$$u_k(t) = x(\tau_k + t)/d_k, \quad -\tau_k \leqslant t \leqslant 0$$

удовлетворяют условиям

$$|u_k(0)| = 1, \quad |u_k(t)| \leqslant 1, \quad -\tau_k \leqslant t \leqslant 0$$

и являются решением системы

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -au_2 - bu_1 - c|u_2 - \lambda/d_k|. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть u^* — предельная точка последовательности $u_k(0)$. Тогда решение системы (7), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = u^*$, является ненулевым и ограниченным при $t \leqslant 0$. Но с другой стороны, в условиях леммы, согласно п. 4с. все решения системы неограничены при $t \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы для случая $a + c > 0$.

Аналогично рассматривается случай $a + c < 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенствам:*

$$(a+c)^2 < 4b \leqslant (a-c)^2. \tag{15}$$

Тогда для любого λ все решения системы (12) ограничены при $t > 0$, если $a - c > 0$ и при $t < 0$, если $a - c < 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенствам:*

$$\min\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\} < 4b \leqslant \max\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\}, \quad |a| < |c|. \tag{16}$$

Тогда для любого значения параметра λ, удовлетворяющего условию $ac\lambda > 0$, система (12) имеет предельный цикл.

Рис. 4 иллюстрирует утверждение теоремы.

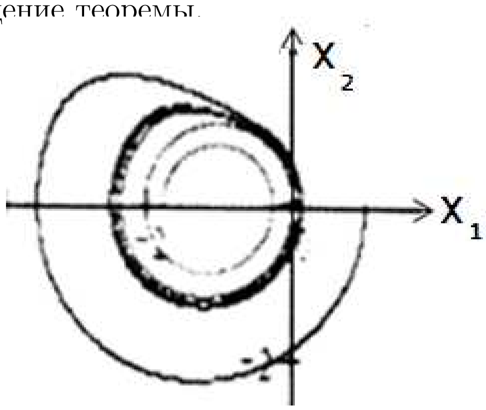

Рис. 4.

Доказательство. Пусть для определенности $(a-c)^2 < (a+c)^2$. Тогда условие (16) примет вид

$$(a-c)^2 < 4b \leqslant (a+c)^2, \quad |a| < |c|. \tag{17}$$

Отсюда следует, что знаки чисел a, c совпадают, и поэтому параметр удовлетворяет условию: $\lambda > 0$.

Особая точка $(-c\lambda/b, 0)$ системы (12) с некоторой окрестностью принадлежит полуплоскости $x_2 < \lambda$, где система (12) является линейной неоднородной системой вида

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -bx_1 - (a-c)x_2 - c\lambda. \end{cases} \tag{18}$$

Для корней $\mu_{1,2}^-$ характеристического уравнения линейной системы, соответствующей системе (18), имеем: $2\Re\mu_{1,2}^- = c - a$.

Если $c - a < 0$, то согласно п. 3, особая точка $(-c\lambda/b, 0)$ является устойчивым фокусом, и все отличные от особой точки траектории системы (18), выходящие в момент времени $t = 0$ из точек, принадлежащих достаточно малой окрестности особой точки, при $t > 0$ остаются в полуплоскости $x_2 < \lambda$ и приближаются к точке $(-c\lambda/b, 0)$ при $t \to \infty$.

Но с другой стороны, так как $c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) > 0$, то $(c+a) < 0$. В силу леммы 3, все решения системы (12) ограничены при $t < 0$. В силу устойчивости особой точки $(-c\lambda/b, 0)$, она не может быть α-предельной точкой этих траекторий. Отсюда, в силу теоремы Пуанкаре-Бендиксона (см., напр.,[9]), следует существование предельного цикла у системы (12).

Если $c - a > 0$, то заменой времени t на $-t$ приходим к рассмотренному выше случаю.

Доказательство теоремы в случае, когда $(a-c)^2 > (a+c)^2$, проводится аналогично с использованием леммы 4. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенствам:*

$$4b > \max\left\{(a+c)^2, (a-c)^2\right\}, \quad a \neq 0. \tag{19}$$

Тогда для любого значения параметра λ все решения системы (12) ограничены при $t \geq 0$, если $a > 0$ и при $t \leqslant 0$, если $a < 0$.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 3 с использованием леммы 1.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенствам (19). Тогда система (12) имеет предельный цикл для любого $\lambda > 0$, если $a(c-a) > 0$, и любого $\lambda < 0$, если $a(c+a) < 0$.*

Иллюстрацией этой теоремы является рис. 5.

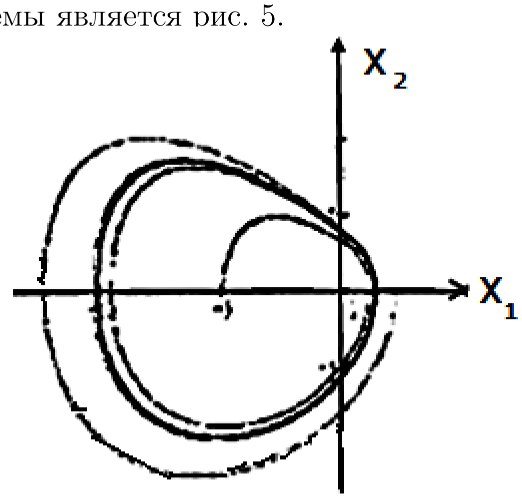

Рис. 5.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$ и $a > 0$. Условие $a(c-a) > 0$ эквивалентно выполнению неравенств $c > a > 0$. В этом случае особая точка $(-c\lambda/b, 0)$ системы (12) с некоторой окрестностью принадлежит полуплоскости $x_2 < \lambda$, где система (12) является линейной неоднородной системой (18).

Так как корни $\mu^{-}_{1,2}$ характеристического уравнения линейной системы, соответствующей системе (18), удовлетворяют условию $2\Re\mu^{-}_{1,2} = c - a$, то согласно п. 3, особая точка $(-c\lambda/b, 0)$ является неустойчивым фокусом, и все отличные от особой точки траектории системы (18), выходящие в момент времени $t = 0$ из точек, принадлежащих достаточно малой окрестности особой точки, при $t \leqslant 0$ остаются в полуплоскости $x_2 < \lambda$ и приближаются к точке $(-c\lambda/b, 0)$ при $t \to -\infty$.

В силу леммы 5, все траектории системы (12) ограничены при $t > 0$. В то же время особая точка $(-c\lambda/b, 0)$ не может быть ω-предельной точкой этих траекторий. Отсюда, в силу теоремы Пуанкаре-Бендиксона (см., напр.,[9]), следует существование предельного цикла у системы (12).

Аналогично рассматривается случай, когда $\lambda < 0$ и $a > 0, a + c < 0$.

Если $a < 0$, то заменой времени t на $-t$, приходим к рассмотренным выше случаям. Теорема доказана.

Представляет интерес изучение устойчивости или неустойчивости полученных предельных циклов.

Определение 1. Положение равновесия $z_0 = (-c|\lambda|/b, 0)$ системы (7) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого z, для которого $\|z - z_0\| < \delta$, решение $\varphi(t, z)$ системы (7) с начальным условием $\varphi(0, z) = z$ продолжается на всю полуось $t > 0$ и удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, z) - z_0\| < \varepsilon$ для всех $t > 0$.

Определение 2. Предельным циклом называется замкнутая траектория [9], у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, неограниченно приближающимися к этой замкнутой траектории при $t \longrightarrow +\infty$ или при $t \longrightarrow -\infty$. Предельный цикл называется устойчивым, если все траектории приближаются к нему только при $t \longrightarrow +\infty$, и вполне неустойчивым — если все траектории приближаются к нему при $t \longrightarrow -\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия*

$$(a - c)^2 < 4b \leqslant (a + c)^2. \tag{20}$$

Тогда предельный цикл системы (7) является устойчивым при a>0 и вполне неустойчивым при a<0.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия*

$$(a - c)^2 < 4b \leqslant (a + c)^2. \tag{21}$$

Тогда предельный цикл системы (7) является устойчивым при $0 < a < -c$ *и* $\lambda < 0$, *и неустойчивым при* $-c < a < 0$.

Теорема 5. *В условиях теоремы 2 предельный цикл системы (7) является устойчивым при* $a > 0$, *и вполне неустойчивым при* $a < 0$.

В рамках данной работы доказательства теорем $(3-5)$ вытекают, в частности, из вышеприведенных случаев $(1-5)$.

Численная реализация

Построен алгоритм и пакет программ аналитического и численного исследования предельных циклов, математические модели которых содержат модульные и кусочно-линейных нелинейности. Проведена программная реализация этого алгоритма для некоторых моделей, в частности для уравнений (6) и (11).

Разработанные алгоритмы являются новыми. Использован метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Результаты, полученные посредством этого пакета, проиллюстрированы рисунками (1-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* Матем. сборник. 1966. 51. РЖМат. 960. 317 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* Наука, М. 1976. 496 с.
3. M. di Bernardo,Budd C., A.R. Champneys, P. Kowalezyk*Piece–wise smooth dynamical system.* Appl. Math. Sci., vol. 103. London: Springer. 2008. 183 p.
4. Иванов А.П. *Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах //* Нелинейная динам. 2012. Т 8, № 2. С. 231–247.
5. R.I. Leine, D.H. Van Campen *European Journal of Mechanigs A/Solids.* 2006. 25. P. 595–616.
6. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем.* М.: МЦНМОб. 2005. 454 с.
7. Синай Я.Г. *Теория фазовых переходов.* М.: Наука. 1980. 207 с.
8. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* УРСС. М. 2004. 239 с.
9. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1970. 720 с.

Эргашбой Мирзоевич Мухамадиев,
Вологодский государственный технический университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г.Вологда, Россия
E-mail: `E-mail: emuhamadiev@rambler.ru`

Исхокбой Джумаевич Нуров,
Российско-Таджикский(славянский)университет,
ул. Мирзо-Турсун-заде, 30,
734025, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: `E-mail: nid1@mail.ru`

Мохчехра Шавкатовна Халилова,
Институт математики Академии наук республики Таджикистан,
ул. Айни 299/4,
734063, г. Душанбе,Таджикистан
E-mail: `E-mail: mshkh@inbox.ru`