ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 4 (2013). С. 60-76.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

И.И. ГОЛИЧЕВ

Аннотация. Вводится регуляризация системы Навье-Стокса, решение которой совпадает с решением системы Навье-Стокса, если последнее существует. Регуляризованная нелинейная система сводится к решению последовательности линеаризованных систем. Для решения последней системы используется градиентный метод. Построен и обоснован модифицированный метод наискорейшего спуска, который возможно применять при наличии ограничений на управление и неограниченности множества Лебега.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, градиентный метод, регуляризация, априорные оценки

Mathematics Subject Classification: 49M20, 35Q30, 93C05

1. Введение.

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщенной системы уравнений Навье-Стокса

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + v_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f}(x,t), \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{2}$$

$$div\ \mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

в области $Q_T = \Omega \times [0,T]$, $S_T = S \times [0,T]$, S — граница области Ω, $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, $\mathbf{L}_2(Q_T) = \mathbf{G}(Q_T) \oplus \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$ — ортогональное разложение на градиентную и соленоидальную составляющие части пространства $\mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

$$div\ \mathbf{a} = 0, \ \ \mathbf{a}|_S = 0. \tag{4}$$

Здесь и далее, в основном, применяются обозначения, используемые в работе [3]. Для однозначной определенности давления будем считать, что $\int\limits_\Omega p(x,t)dx = 0$ почти всюду по t на [0,T].

Как отмечалось в работе [1], основная трудность при изучении задач (1) – (3) связана с вопросом – имеет ли место однозначная разрешимость в "целом" (т.е. при любом $t \in [0,T]$) начально-краевой задачи (1), (2). Обоснование того, что она имеет решение "в целом" упирается в доказательство априорной оценки одной из норм $\|\mathbf{v}_x(x,t)\|_2$, $\|\mathbf{v}\|_{q,r,Q_T}$, где параметры q и r удовлетворяют определенным условиям. Наличие оценки на $\|\mathbf{v}\|_{q,r,Q_T}$ влечет существование оценки на $\|\mathbf{v}_x(x,t)\|_2$ и наоборот. Ввиду такого положения, в литературе (см., например, [1], [2] и ссылки в этих книгах) рассматриваются многочисленные

I.I. Golichev, Modified gradient fastest descent method for solving linearized non-stationary Navier-Stokes equations.

Поступила 3 декабря 2013 г.

варианты регуляризации уравнений Навье-Стокса. Регуляризация, как правило, связана с введением в уравнение (1) дополнительных членов, содержащих малый параметр. При этом решение регуляризованной задачи должно стремиться к решению исходной задачи Навье-Стокса при $\varepsilon \to 0$, если это решение существует. При таком подходе возникает вопрос о физической обоснованности регуляризованной задачи, о выборе параметра ε и степени близости решений регуляризованной и исходной задачи.

Предлагаемый в работе [3] подход к решению задачи (1) – (3) также можно рассматривать как регуляризацию системы Навье-Стокса, состоящую в том, что в уравнении (1) в произведении $v_i\mathbf{v}_{x_i}$ почти всюду по t на [0,T] $\mathbf{v}$ заменяется его проекцией на шар $K_R(t) = \{\mathbf{v}(t) : \|\mathbf{v}_x(t)\| \leqslant R(t)\}$, где $R(t)$ — неубывающая, положительная функция. Здесь и далее $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$.

Проекция на шар K_R вычисляется по формуле $P_{K_R}\mathbf{v} = \alpha_R(t,\mathbf{v})\mathbf{v}$, где $\alpha_R(t,\mathbf{v}(t)) = min[1, R(t)/\,\|\mathbf{v}_x(t)\|]$. Таким образом, от уравнения (1) переходим к уравнению

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \alpha_R(t,\mathbf{v})v_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f}. \qquad (\acute{1})$$

Для решения регуляризованной задачи $(\acute{1})$, (2), (3) строится итерационный процесс

$$(5)$$

$$\mathbf{v}^{k+1}\big|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}^{k+1}\big|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \qquad (6)$$

$$div\ \mathbf{v}^{k+1} = 0, \qquad (7)$$

где $\alpha_k = \alpha_k(t) = \alpha_R(t,\mathbf{v}^k)$.

Обозначим через $\mathbf{V}_2$ пространство $\mathbf{W}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbf{L}_\infty(0,T;\mathbf{W}_2^1(\Omega))$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{2,1}(Q)} + \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\,\|\mathbf{v}_x\| \qquad (8)$$

В работе [3] доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, Ω — ограниченная область с границей $S \in C^2$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условиям (4); тогда задача $(\acute{1})$, (2), (3) имеет единственное решение $\mathbf{v}$, p с $\mathbf{v}_{xx}$, $\mathbf{v}_t$, p_x из $\mathbf{L}_2(Q_T)$, последовательности $\left\{\mathbf{v}^k\right\}_{k=0}^\infty$, $\left\{p^k\right\}_{k=1}^\infty$, определенные итерационным процессом (5) – (7), где $\alpha_k = min\left[1, R(t)\left\|\mathbf{v}_x^k\right\|^{-1}\right]$, $R(t)$ — ограниченная, неубывающая функция, сходятся к решению задачи $(\acute{1})$, (2), (3) при любом $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{V}_2$ и справедливы оценки:

$$\left\|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2} \leqslant c(q)q^k\left\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2}, \qquad (9)$$

$$\|p_k - p\|_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant c(q)q^k\left\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2} \qquad (10)$$

при любом $q \in (0,1)$, где $c(q)$ ограничена на отрезке $[\alpha,1]$ при любом $\alpha > 0$.

В работе [3] показано также, что утверждения теоремы 1 остаются в силе, если в нелинейном члене уравнения (1) $v_i\mathbf{v}_{x_i}$ вектор $\mathbf{v}(t)$ заменить его проекцией на шар $\{\mathbf{v}(t) \in \mathbf{L}_4(\Omega) : \|\mathbf{v}(t)\|_4 \leqslant R(t)\}$, или покоординатной проекцией вектора $\mathbf{v}(t)$ на отрезок $[R_1(t), R_2(t)]$, где $R_1(t), R_2(t)$ — ограниченные на интервале [0,T] функции.

Замечание 1. Обратим внимание, что доказанная теорема гарантирует сходимость итерационного процесса (5) - (7) на любом интервале $[0,T]$, на котором $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, а также существование и единственность решения задачи $(\acute{1})$, (2), (3).

Замечание 2. Если на интервале $[0,T_1]$ $(T_1 \leqslant T)$ решение $\mathbf{v}^*$, p_* задачи $(\acute{1})$, (2), (3) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{v}_x^*(t)\| \leqslant R(t) \qquad \forall t \in [0,T_1], \qquad (11)$$

то решение задачи (1) - (3) на этом интервале существует и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*, p = p_*$.

Действительно, если выполнено неравенство (11), то $\alpha\left(t,\mathbf{v}_x^*\right) = 1$, поэтому уравнения (1) и $(\acute{1})$ совпадают.

Замечание 3. Если на интервале $[0, T_1]$ $(T_1 \leqslant T)$ решение задачи (1)–(3) существует и выполняется оценка

$$\|\mathbf{v}_x(t)\| \leqslant M(t) \qquad \forall t \in [0, T_1], \tag{12}$$

где $M(t) \leqslant R(t)$, то на этом интервале оно совпадает с решением регуляризованной задачи $(\acute{1})$, (2), (3) .

Действительно, поскольку $\mathbf{v}$(t) лежит внутри шара $K_R(t)$, то $\mathbf{v}$(t) совпадает со своей проекцией на этот шар и, поэтому, $\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению $(\acute{1})$. Учитывая единственность решения задачи $(\acute{1})$, (2), (3) (в силу теоремы 1) и единственность решения задачи (1)–(3) при выполнении условия (12) (см. теорему $1\acute{2}$, гл. VI, работы [1]), убеждаемся в справедливости утверждения замечания.

Замечание 4. Учитывая замечание 2, нетрудно построить итерационный процесс, сходящийся к решению задачи (1)–(3) в случае, когда правая часть оценки (12) неизвестна, при условии, что решение задачи (1)–(3) существует и удовлетворяет ограничению (12) при некоторой неизвестной, но заведомо ограниченной на $[0, T_1]$ функции $M(t)$. Действительно, задаем некоторую положительную, ограниченную, неубывающую функцию $R_1(t)$ и решаем задачу $(\acute{1})$, (2), (3) при $R(t) = R_1(t)$, далее проверяем условие (12) при $M(t) = R_1(t)$. Если это условие выполнено, то задача (1)–(3) решена. Если это условие не выполнено, то полагаем $R_2(t) = R_1(t) + K$ (K — параметр метода) и повторяем итерационный процесс. Ясно, что после конечного числа шагов условие (12) будет выполнено и, следовательно, решена задача (1)–(3).

При реализации предлагаемого подхода возникает вопрос о выборе интегрального ограничения $R(t)$ или равномерных ограничений на скорость $R_1(t)$, $R_2(t)$. Оценки $\|\mathbf{v}_x(t)\|$ и $\|\mathbf{v})\|_4$ можно найти явно при $n = 2$ глобально и при $n = 3$ локально. Эти оценки на интервале $[t_0, t]$ зависят от начального условия $\|\mathbf{u}_x(t_0)\|(\|\mathbf{u}(t_0)\|_4)$, $\|f\|_{\mathbf{L}_2(Q^t_{t_0})}$, ν и констант из теорем вложения функций.

Во многих случаях такие оценки найти затруднительно, кроме того, в применении к конкретной задаче полученные оценки могут оказаться сильно загрубленными. В связи с этим в замечании 4 предлагается итерационный процесс, который позволяет найти априорную оценку, если ее решение с соответствующей оценкой на заданном интервале времени существует.

Априорную оценку вида $|\mathbf{v}| \leqslant N$ можно задать исходя из физических соображений, если нам заведомо известно, что скорость вязкой жидкости не превосходит заданной величины, то есть $|\mathbf{v}(t, x)| \leqslant N$, тогда можно положить $R_1(t) = -N$, $R_2(t) = N$. Далее заметим, что если решение таким образом регуляризованной задачи удовлетворяет выбранной априорной оценке, то ее решение совпадает с решением исходной задачи. Если полученное решение не удовлетворяет выбранной оценке, то либо неправильно оценена величина возможной скорости, либо исходная модель $(1) - (3)$ неадекватна изучаемому физическому процессу.

Из сказанного выше следует, что во многих случаях решение нелинейной системы Навье-Стокса можно свести к решению последовательности линейных задач.

К решению линейных задач имеются различные подходы, среди них отметим подход, основанный на градиентных методах минимизации функционала $J(\mathbf{v}) = \int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}|^2\, dxdt$, в котором давление p рассматривается как управление (см., например, [5]–[7]). Однако, построение обоснованного градиентного метода наталкивается на трудность, связанную с тем, что в рассматриваемых задачах (как и в большинстве реальных задач, где состояние системы описывается дифференциальными уравнениями) множества Лебега $\mathbf{M}_i(C) = \{u \in U_i : J_i(u) < C,\ i = 1, 2\}$ неограничены. В работе [5] эта трудность преодолевалась с помощью итеративной регуляризации метода проекции градиента. К сожалению, этот метод слишком медленно сходится.

В настоящей работе построен и обоснован модифицированный метод наискорейшего спуска, который можно применять при некоторых ограничениях на управление и неограниченность множества Лебега.

2. Градиентный метод решения линеаризованной задачи.

В предыдущем разделе показано, что при определенных условиях решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к решению последовательности задач (1.5)–(1.7). Опуская индекс k, запишем эту задачу в виде

$$L\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - grad\ p, \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{2}$$

$$div\ \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, $g_i \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условию (1.4). Здесь и далее при ссылке на формулы из другого раздела будет использована двойная нумерация, где первое число указывает номер раздела, а вторая – номер формулы внутри раздела.

Задачу (1)–(3) рассматриваем как обратную задачу определения $\mathbf{v}$ и p по дополнительным данным (3).

Основным способом решения обратных задач является сведение их к задачам оптимального управления. Рассмотрим два варианта таких задач.

Задача I. Найти минимум функционала $J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(\nabla u)|^2\, dxdt$ на множестве $U_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in W_2^{1,0}(Q_T) : \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, dx = 0,\ t \in [0,T] \right\}$, где $\nabla u = grad\ u$, $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение задачи $L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla u$ с условиями (2).

Задача II. Найти минимум функционала $J_2(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(\nabla u)|^2\, dxdt$ на множестве $U_2 = \overset{\circ}{L}_2(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, dx = 0, ; t \in [0,T] \right\}$, где $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение задачи $L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla u$ с условиями (2).

Отличие задачи II от задачи I состоит в том, что производные ∇u при $u \in L_2(Q_T)$ понимаются в обобщенном смысле и решение задачи (1) – (3) будем понимать также в обобщенном смысле.

Далее обозначим через H_l $(l = 1, 2)$ гильбертовы пространства

$$H_1 = W_2^{1,0}(Q_T),\ H_2 = \mathbf{L}_2(Q_T);$$

тогда U_l — подпространство пространства H_l $(l = 1, 2)$.

Решение задач I, II будем искать методом проекции градиента

$$u_{k+1} = P_{U_l}\left(u_k - \alpha_{k+1} J_l'(u_k)\right), \tag{4}$$

где P_{U_l} — оператор проектирования на множество U_l, $J_l'(u_k)$ — градиент функционала $J_l(u_k)$ в точке u_k $(l = 1, 2)$.

В следующем пункте будет показано, что имеют место формулы для вычисления градиентов:

$$J_1'(u) = -p(u), \tag{5_1}$$

где $p(u)$ определяется из разложения вектора $\mathbf{w}(u)$ на градиентную и соленоидальную части: $\mathbf{w}(u) = grad\ p(u) + \varphi$,

$$J_2'(u) = div\ \mathbf{w}(u). \tag{5_2}$$

Здесь $\mathbf{w}(u)$ — сопряженное состояние, определяемое для обеих задач как решение задачи

$$L^*\mathbf{w}(u) = -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - \frac{\partial}{\partial x_i}(g_i\mathbf{w}) = grad\ div\ \mathbf{v}(\nabla u), \tag{6}$$

$$\mathbf{w}|_{S_T} = 0,\ \mathbf{w}(x,T) = 0. \tag{7}$$

2.1. Дифференцируемость функционала $J_1(u)$. Рассмотрим сначала задачу I. Она записывается в виде

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(\nabla u)|^2\, dxdt \to inf;\ u \in U_1, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение уравнения

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - \nabla u \tag{9}$$

с начальными и краевыми условиями (2).

Доказательство существования решения задачи (1), (2) в пространстве $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$ и необходимые для обоснования формулы (5_1) оценки основываются на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{F}(x,t) \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} = (g_1,\ldots,g_n) \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $r \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$; тогда решение уравнения

$$L(\mathbf{v}) + r\mathbf{v} = \mathbf{F}, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

с краевыми и начальными условиями (2) существует, единственно, принадлежит пространству $\mathbf{W}_2^{2,1}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}\|_\lambda^2 \equiv \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\, \|\mathbf{v}_x(t)\|^2 + \nu\int\limits_0^T \|\Delta\mathbf{v}\|^2 dt + \lambda\int\limits_0^T \|\mathbf{v}_x(t)\|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant 4e^{\lambda T}\left(\nu^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{a}(x)\|^2\right), \tag{11}$$

где λ — константа, зависящая лишь от ν, констант c_2, c_3, c_4, c_7 из теорем вложения и второго энергетического неравенства (см. неравенства (13)–(15), (20) работы [3]), $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}$, $\|r\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}$.

Доказательство. Выбираем последовательность ограниченных на Q_T функций $\{\mathbf{F}^n\}$, $\{\mathbf{g}^n\}$, $\{r^n\}$, удовлетворяющих условиям:

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{F}^n - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \lim_{n\to\infty}\|\mathbf{g}^n - \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\|r^n - r\|_{L_{4,\infty}(Q_T)} = 0 \tag{12}$$

и рассмотрим последовательность задач

$$\mathbf{v}_t^n - \nu\Delta\mathbf{v}^n + g_i^n\mathbf{v}_{x_i}^n + r^n\mathbf{v} = \mathbf{F}^n, \tag{13}$$

$$\mathbf{v}^n|_{S_T} = 0,\quad \mathbf{v}^n|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{14}$$

Заметим, что последняя задача распадается на отдельные задачи по координатам вектора $\mathbf{v}^n$. Пользуясь известными результатами (см., например, [4], гл. III, §6) убеждаемся, что $\|\mathbf{v}^n\|_\lambda$ ограничена. Покажем, что имеется равномерная оценка $\|\mathbf{v}^n\|_\lambda \leqslant c_0$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Далее через C_i будем обозначать константы, зависящие от тех же величин, что и константа λ.

Обозначим $\widetilde{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n e^{-\lambda t}$; $\widetilde{\mathbf{F}}^n = \mathbf{F}^n e^{-\lambda t}$, тогда $\widetilde{\mathbf{v}}^n$ является решением задачи

$$\widetilde{\mathbf{v}}_t^n - \nu\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n + g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n + r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n + \lambda\widetilde{\mathbf{v}}^n = \widetilde{F}^n, \tag{13$'$}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}^n|_{S_T} = 0,\quad \widetilde{\mathbf{v}}^n|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{14$'$}$$

Умножим уравнение $(13')$ на $\Delta\widetilde{\mathbf{v}}$ и, интегрируя по частям по области Q_t, получим

$$\tfrac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\right\|^2+\nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\left((g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}+r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n),\,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\,|||_{0,t}^2=$$
$$=\left(\widetilde{\mathbf{F}}^n,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{a}_x\right\|^2. \qquad (15)$$

Здесь использовано обозначение $|||\cdot|||_{0,t}=\|\cdot\|_{L_2(Q_t)}$.

Из соотношений (12) следует, что существуют постоянные C_1, C_2, C_3 такие, что справедливы оценки

$$|||\mathbf{F}^n|||_{0,t}\leqslant C_1,\ \|\mathbf{g}^n(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}\leqslant C_2,\ \|r^n(t)\|_{L_4(\Omega)}\leqslant C_3\ \ \forall t\in[0,T]. \qquad (16)$$

Для оценки интегралов в левой части равенства (15) воспользуемся следующими соотношениями

$$|||g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n|||_{0,t}\leqslant\left(\int_0^t\int_\Omega|\mathbf{g}^n|^2\,|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_0^t\|\mathbf{g}^n\|_4^2\,\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\|_4^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant C_2\left(\int_0^t\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\|_4^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon\|\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}+c(\varepsilon)\|\Delta\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}$$

Здесь использовано неравенство

$$\left(\int_0^t\|\mathbf{w}_x\|_4^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon|||\Delta\mathbf{w}|||_{0,t}+c(\varepsilon)|||\mathbf{w}_x|||_{0,t}, \qquad (17)$$

которое справедливо для любого $w\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$.

Последнее неравенство, например, при $n=3$ можно получить следующим образом: $\int_0^t\|\mathbf{w}_x\|_2^4\,d\tau\leqslant c_3c_7\left(\int_0^t\|\mathbf{w}_x\|^{\frac{1}{2}}\,\|\Delta\mathbf{w}\|^{\frac{3}{4}}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c_3c_7\,|||\mathbf{w}_x|||_{0,t}^{\frac{1}{4}}\,|||\Delta\mathbf{w}|||_{0,t}^{\frac{3}{4}}$.

Здесь использовалась оценка из теоремы вложения $\|v\|_4\leqslant c_3\|v_x\|^{\frac{3}{4}}\|v\|^{\frac{1}{4}}$ (при $n=3$) и вторая энергетическая оценка $\|v_{xx}\|\leqslant c_7\|\Delta v\|$, справедливая для $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_2^2(\Omega)$. Далее, используя неравенство Юнга: $\left(ab\leqslant\frac{1}{m}\varepsilon_1^m a^m+\frac{m-1}{m}\varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}}b^{\frac{m}{m-1}}\right)$, где $m=\frac{4}{3}$, получаем неравенство (17).

Учитывая оценки (16) и оценку $\|\mathbf{v}\|_4\leqslant\bar{c}\|\mathbf{v}_x\|$ при $n=2,3$, легко убедиться в справедливости следующих неравенств

$$|||r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}\leqslant\left(\int_0^t\|r^n\|_4^2\,\|\widetilde{\mathbf{v}}^n\|_4^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_3\bar{c}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}. \qquad (18)$$

Из последних оценок следует, что

$$A_1=|\left(\left(g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n+r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n\right),\,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_t)}|\leqslant$$
$$\leqslant(\varepsilon|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}+(c(\varepsilon)+C_3\bar{c})\,|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t})\,|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\tfrac{1}{4\varepsilon}\left(c(\varepsilon)+C_3\bar{c}\right)^2|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}^2.$$

Полагая $\varepsilon=\frac{1}{8}\nu$, а $\lambda=4\nu^{-1}\left(c\left(\frac{\nu}{8}\right)+C_3\bar{c}\right)^2$, получаем

$$A_1\leqslant\tfrac{1}{4}\nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\tfrac{1}{2}\lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}.$$

Учитывая последнее неравенство, соотношение (15) и неравенство

$$A_2=|\left(\widetilde{\mathbf{F}}^n,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}|\leqslant\tfrac{1}{4}\nu|||\widetilde{\Delta\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\nu^{-1}|||\widetilde{\mathbf{F}}^n|||_{0,t},$$

получаем

$$\tfrac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\right\|^2+\tfrac{1}{2}\nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\tfrac{1}{2}\lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}^2\leqslant c_t^2,$$

где $c_t^2 = \nu^{-1}|||\widetilde{\mathbf{F}}^n|||_{0,t}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{a}_x\|^2$. Из последнего неравенства находим, что

$$[\widetilde{\mathbf{v}}^n]_{\lambda,t}^2 = \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\,\|\widetilde{\mathbf{v}}^n(\tau)\|^2 + \nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2 + \lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}^2 \leqslant 4c_t^2. \tag{19}$$

Далее покажем, что последовательность $\{\widetilde{\mathbf{v}}^n\}$ фундаментальна в метрике $[\cdot]_{\lambda,T} = \|\cdot\|_\lambda$.

Обозначим $\mathbf{z}^{n,l} = \widetilde{\mathbf{v}}^n - \widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}$ и заметим, что $\mathbf{z}^{n,l}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{z}_t^{n,l} - \nu\Delta\mathbf{z}^{n,l} + g_i^n\mathbf{z}_{x_i}^{n,l} + r^n\mathbf{z}^{n,l} + \lambda\mathbf{z}^{n,l} =$$
$$= \left(\widetilde{\mathbf{F}}^n - \widetilde{\mathbf{F}}^{n+l}\right) + \left(g_i^{n+l} - g_i^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{n+l} + \left(r^{n+l} - r^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l} \tag{20}$$

и условиям

$$\mathbf{z}^{n,l}\big|_{S_T} = 0,\ \ \mathbf{z}^{n,l}\big|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

К задаче (20), (21) можно применить неравенство (19), в котором

$$c_t^2 = c_t^2(n,l) = \nu^{-1}\left(|||\left(\widetilde{\mathbf{F}}^n - \widetilde{\mathbf{F}}^{n+l}\right) + \left(g_i^{n+l} - g_i^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{n+l} + \left(r^{n+l} - r^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}|||_{0,t}^2\right).$$

Учитывая условие (12), ограниченность последовательности $\{\widetilde{\mathbf{v}}^n\}$ в метрике $[\cdot]_{\lambda,T}$ и неравенство (17), получаем оценки

$$|||\left(\mathbf{g}^{n+l} - \mathbf{g}^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}|||_{0,T} \leqslant C_5\left\|\mathbf{g}^{n+l} - \mathbf{g}^n\right\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)},$$
$$|||\left(r^{n+l} - r^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}|||_{0,T} \leqslant C_6\left\|r^{n+l} - r^n\right\|_{L_{4,\infty}(Q_T)}.$$

Из условий (12), оценки (19) и последних двух неравенств следует сходимость последовательности $\{\widetilde{\mathbf{v}}^n\}$ в метрике $[\cdot]_{\lambda,T}$.

Легко показать, что $\underset{n\to\infty}{lim}\, g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n = g_i\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}$, $\underset{n\to\infty}{lim}\, r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n = r\widetilde{\mathbf{v}}$. Тогда из уравнения (13) следует, что $\{\widetilde{\mathbf{v}}_t^n\}_{n=0}^\infty$ сходится в метрике $\mathbf{L}_2(Q_T)$ к $\widetilde{\mathbf{v}}_t$. Таким образом, $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$.

Переходя в неравенстве (19) к пределу при $n\to\infty$ и учитывая очевидные неравенства: $\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\| \geq e^{-\lambda t}\|\mathbf{v}(t)\|$, $\|\widetilde{\mathbf{v}}_x(t)\| \geq e^{-\lambda t}\|\mathbf{v}_x(t)\|$, $\|\Delta\widetilde{\mathbf{v}}(t)\| \geq e^{-\lambda t}\|\Delta\mathbf{v}(t)\|$, $\left\|\widetilde{\mathbf{F}}\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}$, убеждаемся в справедливости неравенства (11). Из неравенства (11) вытекает единственность решения уравнения (10).

Следствие 1. Пусть $\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g}\in\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x)\in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$, $S\in C^2$; тогда уравнение:

$$L\mathbf{v} = \mathbf{f} - grad\ u$$

с краевыми и начальными условиями (2) при любом $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ имеет единственное решение из $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка:

$$\|\mathbf{v}\|_\lambda \leqslant C_7e^{\lambda T}\left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \|grad\ u\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \|\mathbf{a}_x\|\right). \tag{22}$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1 и, кроме того, $div\ \mathbf{g}\in\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, тогда задача (6), (7) при любом $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ имеет решение из $\mathbf{W}_2^{2,1}(\Omega)$ и справедлива оценка:

$$\|\mathbf{w}\|_\lambda \leqslant C_8e^{\lambda T}\|grad\ div\ \mathbf{v}(\nabla u)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим сначала, что в лемме 1 $\mathbf{g}$ — любая функция из $\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$. Записав левую часть уравнения (6) в виде

$$L^*\mathbf{w} \equiv -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - \mathbf{g}_i\mathbf{w}_{x_i} - div\ \mathbf{g}\mathbf{w}$$

и, сделав замену $t = T - \tau$, перейдем к уравнению вида (10) с произвольной правой частью $F\in\mathbf{L}_2(Q_T)$, а также однородными начальными и краевыми условиями. Воспользовавшись неравенством (11), получаем оценку (23).

Следствие 3. Пусть линейный оператор L определен дифференциальным выражением $L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}_i\mathbf{v}_{x_i}$ $(g\in\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T))$ на множестве функций из $D(L)\subset\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих однородным начальным и краевым условиям (2), тогда оператор L имеет ограниченный обратный, область его значений $R(L) = \mathbf{L}_2(Q_T)$ и является замкнутым. Первые два утверждения сразу следуют из леммы 1, замкнутость следует из первых двух свойств оператора L. Аналогичные утверждения справедливы для оператора L^*, определенного дифференциальным выражением в правой части уравнения (6) на множестве функций $\mathbf{w} \in D(L^*) \subset \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (7). Дифференцированием по частям легко убедиться, что L^* содержится в операторе $\tilde{L}^*$, сопряженном к L. То, что области определения операторов L^* и $\tilde{L}^*$ совпадают, легко показать. Действительно, пусть $z \in D\left(\tilde{L}^*\right)$, тогда, полагая $f = \tilde{L}^* z$, получаем соотношения $(Lx, z) = (x, f)\ \forall x \in D(L)$. С другой стороны, найдется такой элемент $w \in D\left(\tilde{L}^*\right)$, что $\tilde{L}^* w = f$, поэтому $(Lx, z - w) = 0\ \forall x \in D(L)$. Полагая $x = L^{-1}(z - w)$, получаем равенство $z = w$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия следствия 2 леммы 1; тогда функционал $J_1(u)$ дифференцируем в $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T) = U_1$ и его градиент удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Для доказательства формулы (5_1) на множестве $U_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ вводим метрику, эквивалентную метрике пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$ по скалярному произведению

$$(v, z)_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}} = \int\limits_{Q_T} v_{x_i} z_{x_i} dxdt = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z})_{\mathbf{L}_2(Q_T)}.$$

Тогда

$$J_1(u + h) - J_1(u) = \tfrac{1}{2}\left\|div\ \mathbf{v}(\nabla u + \nabla h)\right\|^2_{L_2(Q_T)} - \tfrac{1}{2}\left\|div\ \mathbf{v}(\nabla u)\right\|^2_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \left(div\ \mathbf{v}(\nabla u), div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right)_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\left\|div\ \mathbf{v}(\nabla h)\right\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{24}$$

В силу следствия 1, оператор L имеет обратный L^{-1}, в частности, $L^{-1}\mathbf{h} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}(h)$. Учитывая следствие 2 леммы 1, убеждаемся, что оператор L^* имеет обратный и $(L^*)^{-1}\, grad\ div\ u = \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — решение задачи (6), (7). В силу следствия 3 к лемме 1 L^* — оператор, сопряженный к L.

Используя введенный выше оператор L, преобразуем первое слагаемое правой части последнего равенства

$$\left(div\ \mathbf{v}(\nabla u), div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right)_{L_2(Q_T)} = -\left((L^*)^{-1}\nabla div\ \mathbf{v}(\nabla u), \nabla h\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} =$$

$$= -\left(P_{G(Q_T)}\mathbf{w}(u), \nabla u\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = -\left(\nabla p(u), \nabla h\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \left(-p(u), h\right)_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}}. \tag{25}$$

Учитывая неравенство (22), получаем следующие оценки:

$$\left\|div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant 2\left\|\overset{\circ}{\mathbf{v}}_x(\nabla h)\right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant 2\lambda^{-1}\left\|\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|^2_{\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda^{-1}C_7 e^{\lambda T}\left\|\nabla h\right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = 2\lambda^{-1}C_7 e^{\lambda T}\left\|h\right\|^2_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}}.$$

Из последнего соотношения и соотношений (24), (25) следует равенство (5_1).

Покажем, что $J_1'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть u^1 и u^2 принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, а $\mathbf{w}^1$ и $\mathbf{w}^2$ — соответствующие им решения задачи (6), (7). Тогда

$$\left\|J_1'(u^1) - J_1'(u^2)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)} = \left\|p(u^1) - p(u^2)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)} =$$

$$= \left\|\nabla p(u^1) - \nabla p(u^2)\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \left\|P_{G(Q_T)}\mathbf{w}^1 - P_{G(Q_T)}\mathbf{w}^2\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \tag{26}$$

Заметим, что $\mathbf{w} = \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2$ является решением задачи (6), (7), где $u = u^1 - u^2$.

Используя неравенства (23), (22) и неравенства $\|\mathbf{v}\| \leqslant c_4\|\mathbf{v}_x\|, \|\mathbf{v}_{xx}\| \leqslant c_7\|\Delta\mathbf{v}\|$, справедливые для любого $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$, находим

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant c_4 \|\mathbf{w}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\
\leqslant c_4\lambda^{-1}\|\mathbf{w}\|_\lambda \leqslant c_4\lambda^{-1}C_8e^{\lambda T}\left\|\nabla div\ \mathbf{v}\left(\nabla\left(u^1-u^2\right)\right)\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{n}c_4\lambda^{-1}c_7C_8e^{\lambda T}\left\|\Delta\mathbf{v}\left(u^1-u^2\right)\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{n}c_4c_7C_8\lambda^{-1}\nu^{-\frac{1}{2}}e^{\lambda T}\left\|\mathbf{v}\left(\nabla\left(u^1-u^2\right)\right)\right\|_\lambda \leqslant \\
\leqslant \sqrt{n}c_4c_7C_8\nu^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}C_7e^{\lambda T}\left\|\nabla\left(u^1-u^2\right)\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \\
= L_1\left\|u^1-u^2\right\|_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}}.
\end{gathered}$$

Из последнего неравенства и неравенства (26) следует, что градиент $J_1'(u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 = \sqrt{n}c_4c_7C_8\nu^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}C_7e^{\lambda T}$.

2.2. Дифференцируемость функционала $J_2(u)$. При рассмотрении задачи II нам потребуется использовать обобщенные решения задачи (1)–(3) в банаховом пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, полученное в результате замыкания множества гладких, равных нулю вблизи S_T функций по норме

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{v}(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{v}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}.$$

Назовем обобщенным решением задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ функцию $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0} \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$, для которой справедливо тождество

$$\begin{gathered}
\int\limits_{Q_T}\left(-\mathbf{v}\Phi_t + \nu\mathbf{v}_x\Phi_x\right)dxd\tau + \int\limits_\Omega \mathbf{v}(x,t)\,\Phi(x,t)\,dx + \int\limits_{Q_T} q_i\mathbf{v}_{x_i}\Phi\,dxd\tau = \\
= \int\limits_\Omega \mathbf{a}(x)\,\Phi(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_T} f\Phi\,dxd\tau, \qquad t\in(0,T)
\end{gathered} \tag{27}$$

при всех $\Phi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$ и равенство

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}(x,t)\|^2 + \nu\int\limits_0^t\|\mathbf{v}_x\|^2 d\tau = \int\limits_0^t (f,\mathbf{v})\,d\tau + \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 + \int\limits_{Q_T} divg\|\mathbf{v}\|^2\,dxd\tau. \tag{28}$$

Если выполнены условия теоремы 2, то решение задачи (1)–(3), очевидно, удовлетворяет соотношениям (27), (28) и, поэтому, решение обобщенной задачи существует.

Заметим, что если $S \in C^2$, то нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) из $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ при условии, что $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega), f \in \mathbf{L}_2(Q_T)$.

Это можно сделать с помощью предельного перехода в последовательности задач, в которых $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ заменяется последовательностью гладких функций $\mathbf{a}_n$ из $H(\Omega)$, сходящейся по норме $L_2(\Omega)$ (см., например, теорема 3, гл. IV, работа [1]).

Для доказательства формулы (5_2) и проверки условия Липшица для градиента $J_2'(u)$ функционала $J_2(u)$ потребуются оценки, аналогичные оценкам (22), (23), но в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$. При этом константы в полученных неравенствах можно получить явно, что дает возможность явно найти константу Липшица для градиента $J_2'(u)$, важную при исследовании сходимости градиентных методов решения экстремальных задач.

Существование и единственность решения задачи

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - grad\ u, \tag{29}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{30}$$

при любом $u \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,1}(Q_T)$, $\mathbf{a} \in L_2(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$ в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_t)$ следует из теоремы (4.1) (гл.III, работа [3]).

Умножая уравнение (29) на $\mathbf{v}e^{-2\lambda t}$ и дифференцируя по частям в области Q_t, получим равенство

$$\tfrac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\right\|^2 + \nu\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} + \lambda\||\widetilde{\mathbf{v}}|\|^2_{0,t} + \int_0^t (g_i\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}, \widetilde{\mathbf{v}})\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\mathbf{a}\right\|^2 + \int_0^t \left[\left(\widetilde{f}, \widetilde{\mathbf{v}}\right) + (\widetilde{u}, div\ \widetilde{\mathbf{v}})\right] d\tau, \qquad (31)$$

где $\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}e^{-\lambda t}$, $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}e^{-\lambda t}$, $\widetilde{u} = ue^{-\lambda t}$.

Рассмотрим два случая: случай ограниченных функций g_i и случай, когда $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$.

Пусть выполнено условие

$$\max_i |g_i(x,t)| \leqslant G \qquad \forall (x,t) \in Q_T, \qquad (32)$$

тогда

$$I_1 = \left|\int_0^t (g_i\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}, \widetilde{\mathbf{v}})\, d\tau\right| \leqslant G\||\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}|\|_{0,t}\||\widetilde{\mathbf{v}}|\|_{0,t} \leqslant \frac{\nu}{4}\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} + G^2\nu^{-1}\||\widetilde{\mathbf{v}}|\|^2_{0,t}. \qquad (33)$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$I_2 = \left|\int_0^t (\widetilde{u}, div\ \widetilde{\mathbf{v}})\, d\tau\right| \leqslant \int_0^t \|\widetilde{u}\|\,\|\widetilde{\mathbf{v}}_x\|\, d\tau \leqslant \frac{\nu}{4}\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} + \nu^{-1}\||\widetilde{u}|\|^2_{0,t}; \qquad (34)$$

$$I_3 = \left|\int_0^t \left(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{v}}\right) d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{f}}\right\|^2_{0,t} + \frac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}\right\|^2_{0,t}. \qquad (35)$$

Из соотношений (31), (33)–(35) следует неравенство

$$\tfrac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\right\|^2 + \tfrac{\nu}{2}\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} + \left[\lambda - \left(G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \tfrac{1}{2}\right)\right]\||\widetilde{\mathbf{v}}|\|^2_{0,t} \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{a}\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\||\widetilde{\mathbf{f}}|\|^2_{0,t} + \nu^{-1}\||u|\|^2_{0,t}.$$

Полагая $\lambda = G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$, получаем

$$\left\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\right\|^2 + \nu\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} \leqslant \left\|\mathbf{a}\right\|^2 + \||\widetilde{\mathbf{f}}|\|^2_{0,t} + 2\nu^{-1}\||u|\|_{0,t}.$$

Откуда находим оценку

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} \leqslant \left(1 + \nu^{-\frac{1}{2}}\right) e^{\lambda T}\left(\|\mathbf{a}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + 2\nu^{-1}\|u\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (36)$$

где $\lambda = G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$.

Если выполнены условия $\|g\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}} \leqslant G$, то для оценки интеграла I_1 воспользуемся неравенствами $\|v\|_4 \leqslant 2^{\frac{1}{4}}\|v_x\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}$, $n = 2$ и $\|v\|_4 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\|v_x\|^{\frac{3}{4}}\|v\|^{\frac{1}{4}}$, $n = 3$, справедливыми для $\forall v \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_2(\Omega)$, и неравенством Юнга $\left(ab \leqslant \frac{1}{m}\varepsilon_1^m a^m + \frac{m-1}{m}\varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}} b^{\frac{m}{m-1}}\right)$.

При $n = 2$, полагая $m = \frac{4}{3}$, $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{3}\nu\right)^{\frac{3}{4}}$, получим

$$I_1 \leqslant 2^{\frac{1}{4}}G\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^{\frac{3}{2}}_{0,t}\||\mathbf{v}|\|^{\frac{1}{2}}_{0,t} \leqslant \tfrac{\nu}{4}\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\nu}{3}\right)^{-\frac{3}{16}} G^4\||\widetilde{\mathbf{v}}|\|^2_{0,t},$$

а при $n = 3$, полагая $m = 7$, $\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{7}\nu\right)^{\frac{7}{8}}$, получим

$$I_1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}G\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^{\frac{7}{4}}_{0,t}\||\mathbf{v}|\|^{\frac{1}{4}}_{0,t} \leqslant \tfrac{\nu}{4}\||\widetilde{\mathbf{v}}_x|\|^2_{0,t} + 2\left(\tfrac{2}{7}\nu\right)^{-\frac{7}{64}} G^8\||\widetilde{\mathbf{v}}|\|^2_{0,t}.$$

Располагая этими оценками, получаем неравенство вида (36), где

$$\lambda = \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\nu}{3}\right)^{-\frac{3}{16}} G^4 + \nu^{-1} + \tfrac{1}{2} \qquad \text{при } n = 2,$$

$$\lambda = \lambda_3 = 2\left(\frac{2}{7}\nu\right)^{-\frac{7}{64}} G^8 + \nu^{-1} + \frac{1}{2} \qquad \text{при } n = 3. \tag{37}$$

Для оценки сопряженного состояния $\mathbf{w}$ умножим уравнение (6) на $\mathbf{w}e^{-2\lambda(T-t)}$ и проинтегрируем по области $Q_t^T = \Omega \times [t, T]$. Обозначив $\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}e^{-\lambda(T-t)}$, получим

$$\tfrac{1}{2}|||\widetilde{\mathbf{w}}|||^2 + \nu|||\widetilde{\mathbf{w}}_x|||^2 + \lambda|||\widetilde{\mathbf{w}}|||^2_{0,t} + \int\limits_t^T \left(g_i\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\mathbf{w}}_{x_i}\right) d\tau =$$

$$= -\int\limits_t^T \left(div\ v\left(\nabla u\ e^{-\lambda(T-t)}, div\ \widetilde{\mathbf{w}}\right)\right) d\tau.$$

Получили соотношение вида (31), если в последнем положить $\widetilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{w}}$, $\mathbf{a} = 0$, $\widetilde{\mathbf{f}} = 0$, $\widetilde{u} = div\ v\,(\nabla u)$. Таким образом, получаем оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{Q_T} \leqslant \left(1 + \nu^{-\frac{1}{2}}\right) e^{\lambda T} \|div\ v\,(\nabla u)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}, \tag{38}$$

где $\lambda = G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$, если g — ограниченная функция и λ определяется по формулам (37), если $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$.

Для доказательства формулы (5_2) воспользоваться непосредственно дифференцированием по частям здесь невозможно, поскольку не гарантирована принадлежность функций v и w пространству $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$. Воспользуемся предельным переходом, выбираем последовательности u_n, h_n, содержащиеся в U_1, таких, что $u_n \longrightarrow u$, $h_n \longrightarrow h$ в $L_2(Q_T)$. На последовательностях u_n, h_n справедливы равенства (24) и первое из равенств (25), из которых следует, что

$$J_2(u_n + h_n) - J_2(u_n) =$$

$$= -\left((L^*)^{-1}\nabla div\ \mathbf{v}(\nabla u_n), \nabla h_n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \tfrac{1}{2}\left\|div\ \mathring{\mathbf{v}}(\nabla h_n)\right\|^2_{L_2(Q_T)} =$$

$$= (div\ \mathbf{w}(u_n), h_n)_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\left\|div\ \mathring{\mathbf{v}}(\nabla h_n)\right\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{39}$$

Обозначим $\delta h_n = h - h_n$, $\delta u_n = u - u_n$, $\delta\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \mathbf{v}_n$, тогда $\delta\mathbf{v}_n$ является решением задачи (1), (2), где $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{f} = 0$, $u = \delta u_n$. Используя оценки (36), (37), получаем, что

$$\|div\ \delta\mathbf{v}_n\|_{L_2(Q_T)} \leqslant c\,\|\delta u_n\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\|div\ \mathbf{w}(\delta u_n)\|_{L_2(Q_T)} \leqslant c\,\|\delta u_n\|_{L_2(Q_T)}.$$

Переходя к пределу в соотношениях (39), получаем равенство

$$J_2(u+h) - J_2(u) = (div\ \mathbf{w}(u), h)_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\left\|div\ \mathring{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

Из оценки (36) следует, что $\left\|div\ \mathring{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|^2_{L_2(Q_T)} = O\left(\|h\|^2_{L_2(Q_T)}\right)$. Таким образом, формула (5_2) доказана.

Покажем, что $J_2'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Для этого воспользуемся неравенствами (38), (36), в результате получим

$$\left\|J_2'(u^1) - J_2'(u^2)\right\|_{L_2(Q_T)} = \|div\ \mathbf{w}(u^1) - div\ \mathbf{w}(u^2)\|_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \|div\ \mathbf{w}(u^1 - u^2)\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbf{w}(u^1 - u^2)\|_{Q_T} \leqslant$$

$$\leqslant C_9\,\|div\ \mathbf{v}(\nabla(u^1 - u^2))\|_{L_2(Q_T)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\,\|\mathbf{v}(\nabla(u^1 - u^2))\|_{Q_T} \leqslant C_{11}\,\|u^1 - u^2\|_{L_2(Q_T)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 3. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $div\ \mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(Q_T)$, $S \in C^2$, тогда функционал $J_2(u)$ дифференцируем в $L_2(Q_T)$ и его градиент удовлетворяет условию Липшица.

2.3. Сходимость модифицированного метода наискорейшего спуска. Решение задач I, II будем искать методом проекции градиента (4), где параметр α_{k+1} выбирается модифицированным методом наискорейшего спуска:

$$\alpha_{k+1} = min\left[\alpha'_{k+1}, \gamma\right]. \tag{40_1}$$

Здесь γ — достаточно большая величина (параметр метода), а α'_{k+1} определяется как в методе наискорейшего спуска:

$$f_k\left(\alpha'_{k+1}\right) = \min_{\alpha>0} f_k(\alpha), f_k(\alpha) = J\left(P_U\left(u_k - \alpha J'(u_k)\right)\right). \tag{40_2}$$

Поскольку предлагаемый метод может быть использован и в других задачах оптимизации, в которых множество U — всё пространство или подпространство, сформулируем утверждение в виде теоремы в абстрактном гильбертовом пространстве H.

Введем обозначения: $J_* = \inf\limits_U J(u)$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$, $C^{1,1}(U)$ — множество дифференцируемых функционалов, градиент которых удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 4. Пусть U — выпуклое, замкнутое множество из гильбертового пространства H, $J(u) \in C^{1,1}(U)$ — выпуклый функционал, множество U_* непусто и ограничено, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ определена по формуле (4) и выполнены условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|J'(u_k)\right\|^2 \leqslant b_1, \tag{41}$$

$$0 < \alpha_k < b_2, \tag{42}$$

тогда последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и слабо в H сходится к множеству U_*.

Доказательство. Обозначим $\rho(u, U_*) = \min\limits_{v\in U_*} \|u - v\|$; тогда по определению оператора проектирования

$$\begin{gathered}\rho^2(u_{k+1}, U_*) = \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_{k+1})\|^2 \leqslant \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_k)\|^2 = \\ = \left\|P_U\left(u_k - \alpha_{k+1}J'(u_k)\right) - P_U\left(P_{U_*}(u_k)\right)\right\|^2 \leqslant \\ \leqslant \left\|u_k - \alpha_{k+1}J'(u_k) - P_{U_*}(u_k)\right\|^2 = \\ = \rho^2(u_k, U_*) + \alpha_{k+1}^2\left\|J'(u_k)\right\|^2 - 2\alpha_{k+1}\left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right).\end{gathered} \tag{43}$$

Воспользовавшись необходимым и достаточным условием выпуклости дифференцируемого функционала на выпуклом множестве U

$$J(u) - J(v) \geq \left(J'(v), u - v\right) \qquad \forall u, v \in U,$$

полагая $v = u_k$, $u = P_{U_*}(u_k)$, получаем

$$0 \leqslant J(u_k) - J\left(P_{U_*}(u_k)\right) = J(u_k) - J_* \leqslant \left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right).$$

Таким образом, получаем

$$\left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right) \geq J(u_k) - J_* \geq 0. \tag{44}$$

Учитывая неравенства (43), (44), получаем, что

$$\rho^2(u_{k+1}, U_*) - \rho^2(u_k, U_*) \leqslant \alpha_{k+1}^2\left\|J'(u_k)\right\|^2. \tag{45}$$

Суммируя последнее неравенство от 0 до $m > 0$, и, учитывая условие (41), получаем

$$\rho^2(u_m, U_*) \leqslant \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1}^2 \left\| J'(u_k) \right\|^2 + \rho^2(u_0, U_*) \leqslant b_2^2 b_1 + \rho^2(u_0, U_*) = b_3. \tag{46}$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена в H, а из условия (41) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| J'(u_k) \right\| = 0$; тогда из неравенства (44) следует, что последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функционал $J(u)$. Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ограниченная и минимизирующая $J(u)$ на U.

Обозначим через W множество выпуклых комбинаций последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, то есть множество точек u, представимых в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k, \quad \alpha_k \geq 0\,(k = 0, 1, \ldots), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1.$$

Используя теорему 5, раб.[8](гл. 4, §8), легко показать, что $W \subset U$ и, поскольку U — замкнутое множество, замыкание $\overline{W}$ множества W также принадлежит U.

Последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и, следовательно, минимизирует $J(u)$ на $\overline{W}$. Из доказанного следует, что $J_*\left(\overline{W}\right) = \inf\limits_{u\in\overline{W}} J(u) = J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u)$, $\overline{W}_* = \left\{u \in \overline{W} : J(u) = J_*\right\} \in U_*$. Из ограниченности последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ следует ограниченность множества $\overline{W}$. Согласно теореме 6 (гл. 1, §3, раб. [8]), выпуклый, полуограниченный снизу функционал $J(u)$ на ограниченном, выпуклом, замкнутом множестве U из рефлексивного банахового пространства имеет непустое множество точек минимума U_*, и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ слабо сходится к U_*. Из слабой сходимости последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ к $\overline{W}_*$ следует ее слабая сходимость к U_*, теорема доказана.

Замечание 1. Если множество $\overline{W}$ компактно, то имеет место сильная сходимостью. Здесь можно воспользоваться теоремой 1 (гл. 1, §3, раб. [8]).

Замечание 2. Если U — подпространство гильбертового пространства H, P_U — оператор ортогонального проектирования на это подпространство, то
$u_{k+1} = u_k - P_U J'(u_k)$. В этом случае соотношение (43) можно записать в виде:

$$\rho^2(u_{k+1}, U_*) =$$
$$= \rho^2(u_k, U_*) + \alpha_{k+1}^2 \left\| P_U J'(u_k) \right\|^2 - 2\alpha_{k+1} \left(P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k) \right).$$

Учитывая, что $\left(P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right) = \left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right)$, легко видеть, что утверждения теоремы справедливы, если вместо условия (41) выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| P_U J'(u_k) \right\|^2 < b_1. \tag{41$'$}$$

Пользуясь тем, что множества $U_l (l = 1, 2)$ являются подпространствами соответствующих пространств и, следовательно, операции проектирования P_l на эти множества линейны, найдем явные формулы для параметров α'_{k+1}, α_{k+1}.

Действительно,

$$f_{l,k}(\alpha) = J_l\left(\mathbf{v}\left(P_l\left(u_k - \alpha J'_l(u_k)\right)\right)\right) = \tfrac{1}{2} |||div\ \mathbf{v}\left(u_k - \alpha P_l J'_l(u_k)\right)|||_{0,T}^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2} |||div\ \mathbf{v}(u_k)|||_{0,T}^2 - 2\alpha \left(div\ \mathbf{v}(u_k), div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J'_l(u_k)\right)\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} +$$
$$+ \alpha^2 |||div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J'_l(u_k)\right)|||_{0,T}^2.$$

Откуда следует, что

$$\alpha'_k = \left(div\ \mathbf{v}(u_k), div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J'_l(u_k)\right)\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} |||div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J'_l(u_k)\right)|||_{0,T}^{-2}. \tag{47}$$

Здесь под выражениями $\mathbf{v}(u_k)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(P_l J_l'(u_k)\right)$ следует понимать $\mathbf{v}(\nabla u_k)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(\nabla P_l J_l'(u_k)\right)$, где $\overset{\circ}{\mathbf{v}}(u)$ — решение уравнения (1) при $f = 0$ и $\mathbf{a} = 0$.

Ясно, что последовательности $\{J_l(u_k)\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывают и ограничены снизу.

В предыдущем пункте было показано, что $J_l(u) \in C^{1,1}(U_l)$. Далее воспользуемся известным неравенством, справедливым для функций из $C^{1,1}(U)$(см. 2.3.7, раб. [8]).

$$\left|J(u) - J(v) - \left(J'(v), u - v\right)\right| \leqslant L\|u - v\|^2/2 \ \ \forall u, v \in U,$$

где L — константа Липшица.

Полагая в нем $v = u_k$, $u = u_{k+1}^{\alpha} = u_k - \alpha P_l J_l'(u_k)$, получим

$$J_l(u_k) - J_l\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) = J_l(u_k) - J_l\left(u_k - \alpha P_l J_l'(u_k)\right) \geq$$

$$\geq \alpha\left(J_l'(u_k), P_l J_l'(u_k)\right)_{H_l} - \frac{L_l}{2}\alpha^2\left\|P_l J_l'(u_k)\right\|^2, \tag{48}$$

где L_l — константа Липшица для градиента $J_l'(u)$ функционала $J_l(u)$. Учитывая, что оператор P_l — оператор ортогонального проектирования на подпространство, получаем, что $\left(J_l'(u_k), P_l J_l'(u_k)\right)_{H_l} = \left\|P_l J'(u_k)\right\|_{H_l}$.

Тогда из неравенства (48) следует, что

$$J_l(u_k) - J_l\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) \geq \alpha\left(1 - \alpha\frac{L_l}{2}\right)\left\|P_l J_l'(u_k)\right\|_{H_l}^2. \tag{49}$$

Полагая $\alpha = 1/L_l$, получаем

$$J_l(u_k) - J_l\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) \geq 1/2L_l\left\|P_l J_l'(u_k)\right\|_{H_l}^2.$$

Предположим, что $\alpha_{k+1}' \leqslant \gamma$, тогда $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1}'$ и, поэтому при $\alpha = 1/L_l$ справедливы неравенства

$$J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}) \geq J_l(u_k) - J\left(u_{k+1}^{\alpha}\right) \geq 1/2L_l\left\|P_l J_l'(u_k)\right\|_{H_l}^2. \tag{50}$$

Предположим теперь, что $\alpha_{k+1}' > \gamma$, тогда $\alpha_{k+1} = \gamma$. Рассмотрим два случая: $\gamma \geq 1/L_l$ и $\gamma < 1/L_l$. Учитывая, что на интервале $\left(0, \alpha_k'\right)$ функция $f_{l,k}(\alpha)$ убывает, в первом случае вновь получаем неравенства (50). Во втором случае ($\gamma < 1/L_l$)

$$\gamma(1 - \gamma L_l/2) \geq \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Таким образом, учитывая неравенства (49), (50), в любом случае получаем оценку

$$J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}) \geq c_l\left\|P_l J_l'(u_k)\right\|_{H_l}^2, \tag{51}$$

где $c_l = min\left[\frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}/L_l\right]$.

Из последней оценки следует, что последовательность $\left\{J_l\left(u_k^l\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывает, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\|P_l J_l'(u_k)\right\|_{H_l}^2$ сходится и имеет место оценка

$$\sum_{j=k}^{\infty}\left\|P_l J_l'\left(u_k^l\right)\right\|_{H_l}^2 \leqslant c_l^{-1}\left(J_l(u_k) - J_{l,*}\right), \tag{52}$$

где $J_{l,*} = \underset{u \in U_l}{inf}\ J_l(u)$.

Таким образом, для градиентов $J_l'(u)$ функционалов $J_l(u)\,(l = 1, 2)$ имеет место неравенство $\left(41'\right)$.

Нетрудно убедиться, что функционалы $J_l(u)\,(l = 1, 2)$ выпуклы. Действительно, при любом $\alpha \in [0, 1]$

$$J_l(\alpha u + (1 - \alpha)w) = \|\alpha div\,\mathbf{v}(u) + (1 - \alpha)div\,\mathbf{v}(w)\|_{0,T}^2 =$$

$$= \alpha^2 \|div\,\mathbf{v}(u)\|^2_{0,T} + (1-\alpha)^2 \|div\,\mathbf{v}(w)\|^2_{0,T} + 2\alpha(1-\alpha)\left(div\,\mathbf{v}(u), div\,\mathbf{v}(w)\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}$$
$$= \alpha \|div\,\mathbf{v}(u)\|^2_{0,T} + (1-\alpha) \|div\,\mathbf{v}(w)\|^2_{0,T} - \alpha(1-\alpha)\|div\,\mathbf{v}(u) - div\,\mathbf{v}(w)\|^2_{0,T} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha J_l(u) + (1-\alpha) J_l(w).$$

Учитывая замечание 2 к теореме 4, теоремы 2 и 3 о дифференцируемости функционалов $J_l\,(u)\,(l=1,2)$, а также известные теоремы о существовании и единственности решения задачи $(1)-(3)$ (см. теоремы $1'$, 2 из работы [1] гл. 4, §1), нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2\,(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}\,(Q_T)$, $div\ \mathbf{g} \in L_{4,\infty}\,(Q_T)$, $\mathbf{a}\,(x)$ удовлетворяет условию (1.4), $S \in C^2$. Тогда последовательность $\left\{u^l_k\right\}^{\infty}_{k=0}$, определенная равенствами (4), $(5_l)\,(l=1,2)$, где параметр α_{k+1} определен по формулам (40), (47), минимизирует функционал $J_l\,(u)$ на U_l и слабо в H_l сходится к $U_{l,*}$ с любого начального приближения.

Замечание. При $l=1$ утверждения теоремы 5 прямо следуют из теоремы 4, поскольку выполнены все условия этой теоремы. При $l=2$ существование и единственность обобщенного решения задачи $(1)-(3)$ не гарантирует выполнение одного из условий теоремы 4 - U_* непусто и ограничено. Однако при выполнении условий теоремы 5 существует единственное решение задачи $(1)-(3)$ в классе функций $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,1}_2\,(Q_T)$, $p \in \mathbf{W}^{1,0}_2\,(Q_T)$. Ясно, что это решение будет также решением обобщенной задачи, а решение обобщенной задачи единственно. Таким образом, функционал $J_2\,(u)$ в условиях теоремы 5 удовлетворяет всем условиям теоремы 4, кроме того, в этом случае условие $divg \in L_{4,\infty}(Q_T)$ можно отбросить.

2.4. Регуляризация итерационного процесса по методу Тихонова. В предыдущем пункте доказана слабая сходимость модифицированного метода наискорейшего спуска для функционалов $J_l\,(u)\,(l=1,2)$.

Для построения сильно сходящейся последовательности можно воспользоваться методом регуляризации Тихонова [8], суть которого состоит в последовательном решении задач минимизации функционалов $T_j\,(u) = J\,(u) + \beta_j \Omega\,(u)$ на U как задачи первого типа (то есть задачи минимизации по функционалу), где $\Omega\,(u)$ — стабилизатор или неотрицательная сильно выпуклая функция. При фиксированном j находится точка u_j, удовлетворяющая условиям

$$T^*_j = \inf_U \ T_j\,(u) \leqslant T_j\,(u_j) < T^*_j + \varepsilon_j. \tag{53}$$

Из теоремы Тихонова (см., например, теорема 1, гл. 2, §5, работа [8]) следует: если $J\,(u) \in C^{1,1}\,(U)\,, U_*$ непусто, $J_* > -\infty$,

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j = \lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0; \quad \sup_{j>1} \varepsilon_j \beta_j^{-1} < \infty, \tag{54}$$

то последовательность $\{u_j\}^{\infty}_{j=1}$, определенная условиями (53), минимизирует функционал $J\,(u)$ на U и $\lim\limits_{j\to\infty} \rho\,(u_j, U_*) = 0$.

Возвращаясь к исходной задаче $(1)-(3)$, введем обозначения

$$T_{l,j}\,(u) = J_l\,(u) + \beta_j\,\|u\|^2_{H_l}\,, u \in U_l, \beta_j > 0, \lim_{j\to\infty} \beta_j = 0. \tag{55}$$

Поскольку при $\beta_j > 0$ функционал $T_{l,j}\,(u)\,(l=1,2)$ является сильно выпуклым, то он имеет единственную точку минимума $u^*_{l,j}$.

Далее, там, где выкладки имеют одинаковую форму, индекс l будем опускать, при этом $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_l}$.

Для приближенного решения задачи минимизации функционала $T_{l,j}\,(u)$ воспользуемся обычным методом наискорейшего спуска

$$u_{j,k+1} = P_{U_l}\left(u_{j,k} - \alpha_{j,k+1} T'_{l,j}\,(u_{j,k})\right), j = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots, n_j. \tag{56}$$

Параметр $\alpha_{j,k+1}$ вычисляется явно по формуле

$$\alpha_{j,k+1} = \left[\left(div\ \mathbf{v}\left(u_{j,k}\right), div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right)\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \beta_j\left(u_{j,k}, P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right)_{H_1}\right] \times$$

$$\times\left[\left\|div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right)\right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \beta_j\left\|P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right\|^2_{H_1}\right]^{-1}. \tag{57}$$

Здесь, как и в формуле (47), при $l = 1, 2$

$$\mathbf{v}\left(u_{j,k}\right) = \mathbf{v}\left(\nabla u_{j,k}\right); \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right) = \mathring{\mathbf{v}}\left(\nabla P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right).$$

Пусть $\beta_j \to 0$ при $j \to \infty$ и $\beta_j > 0$. При каждом фиксированном j по схеме (56), (57) проводим n_j итераций и за начальное приближение при минимизации функционала $T_{l,j+1}$ принимаем $u_{j+1,0} = u_j = u_{j,n_j}$. Выбираем n_j из условия

$$T'_{l,j}\left(u_{j,n_j}\right) \leqslant \beta_j. \tag{58}$$

Покажем, что в этом случае последовательность $\{u_j\}$ удовлетворяет условиям (53), (54) теоремы Тихонова. Учитывая известное неравенство для сильно выпуклых функционалов:

$$J(u) - J(u_*) \leqslant \left\|J'(u)\right\|^2 / 2\mu, \tag{59}$$

где μ — константа из необходимого и достаточного условия сильной выпуклости функционала

$$\left(J'(u) - J'(v), u - v\right) \geq \mu\left\|u - v\right\| \quad \forall u, v \in U.$$

В рассматриваемом случае $\mu \geq \beta_j$. Из неравенств (58), (59) следует, что

$$T_{l,j}(u_j) - T_{l,j}\left(u^*_{l,j}\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\beta_j = \varepsilon_j.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы Тихонова. Учитывая еще, что минимум функционалов $J_l(u)$ $(l = 1, 2)$ в условиях теоремы 5 равен нулю и он достигается в единственной точке, равной решению задачи (1) – (3), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенная соотношениями (56) – (58), минимизирует функционал $J_l(u)$ на U_l и

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u_j - u_*\right\|_{H_l} = 0. \tag{60}$$

Замечание. Пусть $\mathbf{v}, p$ — решение задачи (1) – (3); тогда $u_* = p$. Учитывая, что норма $\|\cdot\|_\lambda$ эквивалентна норме

$$\|\mathbf{v}\| = \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\left\|\mathbf{v}_x\right\| + \left\|\Delta\mathbf{v}\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \left\|\mathbf{v}_x\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)},$$

а также выполняются оценки (22) и (36), убеждаемся в справедливости соотношений:

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\mathbf{v}^1_j - \mathbf{v}\right\| = 0,\ \lim_{j\to\infty}\left\|\mathbf{v}^2_j - \mathbf{v}\right\|_{Q_T} = 0, \tag{61}$$

где $\left\{\mathbf{v}^1_j\right\}$ — последовательность, определенная при решении задачи I, а $\left\{\mathbf{v}^2_j\right\}$ — последовательность, определенная при решении задачи II.

3. Заключение

В настоящей работе для решения задачи (1.1) – (1.3) предлагается подход, состоящий в последовательном решении линеаризованных задач градиентным методом. Заметим, что в данном случае минимизируемый функционал является выпуклым. Возможен другой подход, в котором непосредственно задача (1.1) – (1.3) рассматривается как обратная задача, где соотношения (1.1), (1.2) описывают состояние системы при неизвестном давлении p, а равенство (1.3) задает дополнтительные данные о состоянии системы. Такая задача легко формулируется как задача оптимального управления:

$$J(p) = \int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(p)|^2\ dxdt \to inf;\ p \in U_l,\ l = 1,2,$$

где $\mathbf{v}(p)$ — решение задачи $(1.1) - (1.2)$ при заданном $p \in U_l$.

Используя полученные или введенные априорные ограничения на вектор скорости $\mathbf{v}$, уравнение (1.1) можно заменить на уравнение $(1.1')$ и обосновать существование и единственность решения задачи $(1.1')$, (1.2), а также сходимость итерационного процесса (1.5), (1.6) при любом фиксированном $p \in U_l (l = 1,2)$. Построение и обоснование градиентного метода для решения задачи $(1.1) - (1.3)$ в такой постановке, а также сравнение различных приемов вычислительной реализации предлагаемых методов будет дано в следующей работе. Один из вариантов был опробован на модельном примере, где решение задачи (1.1)–(1.3), а следовательно и априорная оценка вектора скорости, были известны. Расчеты проводились последовательно по временным слоям. В этом случае для достижения заданной точности потребовалось 3-4 шага итеративной линеаризации и 5-6 шагов градиентного спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
2. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* М.: Мир, 1981. 408 с.
3. Голичев И.И. *Итеративная линеаризация эволюционных уравнений Навье-Стокса* // Уфимский математический журнал. Т. 4. 2012. №4. С. 69-78.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.
5. Агошков В.И., Ботвиновский Е.А. *Численное решение системы Стокса методами сопряженных уравнений и оптимального управления* // ЖВМиМФ. Т. 47. 2007. №7. С. 1192–1207.
6. Голичев И.И., Шарипов Т.Р. *Разработка методов, алгоритмов и программ для решения уравнений Навье-Стокса как задачи оптимального управления.* // Вестник УГАТУ. Математика. Т. 9. 2007. № 3(21). С. 51–57.
7. Голичев И.И. *Градиентные методы решения уравнений Навье-Стокса.* // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 18, в. 3. 2011. С. 423–425.
8. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1981. 400 с.
9. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1988. 552 с.

Голичев Иосиф Иосифович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Golichev ii@mail.ru