ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 20-27.

УДК 517.9

СИММЕТРИИ И ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ $u_{xy} = e^{u+v}u_y,\ v_{xy} = -e^{u+v}v_y$

Ю.Г. ВОРОНОВА, А.В. ЖИБЕР

Аннотация. Описаны высшие симметрии и построено общее решение для гиперболической системы уравнений. Также получена явная формула решения задачи Гурса.

Ключевые слова: симметрии, задача Гурса, интегралы.

Mathematics Subject Classification: 35L53, 76M60, 58J70

1. Введение

В работе [1] рассматривалась зависимость решения задачи Гурса для экспоненциальной системы уравнений
$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x \partial y} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} e^{u^k} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \tag{1.1}$$
$$u^i(x,y) - \ln\left(\tau_i \phi^i(x)\bar{\phi}^i(y)\right) = 0 \ \text{ при } \ xy = 0, \tag{1.2}$$
a_{ik} – элементы матрицы Картана простой алгебры Ли,
от параметров $\tau_1, \dots, \tau_r$, входящих в краевые условия (1.2). Была предложена схема построения решения данной задачи с использованием высших симметрий, допускаемых системой уравнений (1.1). Приведены примеры сведения к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах [2]–[4] для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа построено общее решение и приведен алгоритм построения решения краевых задач. В статье [5], используя симметрийный подход, построено точное решение задачи Гурса для нелинейных скалярных гиперболических уравнений лиувиллевского типа.

В настоящей работе рассматривается система уравнений
$$\begin{cases} u_{xy} = e^{u+v} u_y, \\ v_{xy} = -e^{u+v} v_y, \end{cases} \tag{1.3}$$
у которой $\det(H_1 \cdot K_1) = 0$, $\operatorname{ord}(H_1, K_1) = 1$, и цепочка обобщенных инвариантов Лапласа обрывается на втором шаге (см. [6]), где H_1, K_1 – главные инварианты линеаризации системы (1.3). Описаны высшие симметрии и построено общее решение системы уравнений (1.3), которое позволяет получить точное решение задачи Гурса.

Yu.G. Voronova, A.V. Zhiber, Symmetries and Goursat problem for system of equations $u_{xy} = e^{u+v}u_y$, $v_{xy} = -e^{u+v}v_y$.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 13-01-00070-а) и ФЦП (соглашение №8499).

Поступила 17 июля 2013 г.

2. Симметрии

Для удобства изложения материала введем обозначения

$$u_1 = u_x,\ u_2 = u_{xx},\ \ldots, v_1 = v_x,\ v_2 = v_{xx}, \ldots,$$

$$\bar{u}_1 = u_y,\ \bar{u}_2 = u_{yy},\ \ldots, \bar{v}_1 = v_y,\ \bar{v}_2 = v_{yy}, \ldots.$$

В работе [6] показано, что система уравнений (1.3) имеет интегралы первого и второго порядка

$$\begin{array}{c} w = u_1 - v_1 - e^{u+v} \quad \text{и} \quad \bar{w} = \bar{u}_1\bar{v}_1, \\ W = u_2 - u_1v_1 - e^{u+v}u_1 \quad \text{и} \quad \bar{W} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + \bar{v}_1 - \bar{u}_1, \end{array} \tag{2.1}$$

такие, что $\bar{D}w = 0$, $\bar{D}W = 0$, $D\bar{w} = 0$, $D\bar{W} = 0$, где D,$\bar{D}$ – операторы полного дифференцирования по x, y соответственно.

Определяющая система для высших симметрий системы уравнений (1.3) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} D\bar{D}p = e^{u+v}\bar{D}p + e^{u+v}\bar{u}_1(p+q), \\ D\bar{D}q = -e^{u+v}\bar{D}q - e^{u+v}\bar{v}_1(p+q). \end{array} \right. \tag{2.2}$$

В силу формул (2.1), симметрии системы уравнений (1.3), зависящие от переменных u, v, u_1, $v_1, \ldots$, можно искать в виде

$$p = p(u, v, v_1, w, W, w_1, W_1, \ldots), \quad q = q(u, v, v_1, w, W, w_1, W_1, \ldots).$$

Вычислим $\bar{D}p$, $\bar{D}q$, $D\bar{D}p$, $D\bar{D}q$ и подставим в систему (2.2). Далее, приравняем выражения при $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, получим следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} Dp_u = e^{u+v}(p+q), \\ D\left(p_v - e^{u+v}p_{v_1}\right) = 2e^{u+v}\left(p_v - e^{u+v}p_{v_1}\right), \\ Dq_u = -2e^{u+v}q_u, \\ D\left(q_v - e^{u+v}q_{v_1}\right) = -e^{u+v}(p+q). \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Из второго и третьего уравнения системы (2.3) следует, что

$$p_v - e^{u+v}p_{v_1} = 0, \quad q_u = 0.$$

Далее, складывая первое и четвертое уравнение системы (2.3) и интегрируя полученное равенство по u, получим следующее выражение для p:

$$p = -q_v u + e^{u+v}q_{v_1} + Cu + h(v, v_1, w, W, \ldots), \tag{2.4}$$

здесь $h(v, v_1, w, W, \ldots)$ – произвольная функция, а C – произвольная постоянная. Осталось подставить найденную функцию p во второе и первое уравнение системы (2.3), откуда найдем вид функций p и q, а именно:

$$p = (D + u_1)a - b,\ q = v_1 a + b, \tag{2.5}$$

здесь $a(w, W, w_1, W_1, \ldots)$, $b(w, W, w_1, W_1, \ldots)$ – произвольные функции.

Далее симметрии, зависящие от переменных u, v, $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1, \ldots$, можно искать в виде

$$p = p(\bar{u}_1, \bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \ldots), \quad q = q(\bar{u}_1, \bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \ldots).$$

Сделаем в системе уравнений (1.3) замену переменных

$$u + v = U,\ \ u - v = V.$$

Тогда система уравнений (1.3) эквивалентна следующей системе

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xy} = e^u v_y, \\ v_{xy} = e^u u_y, \end{array} \right. \tag{2.6}$$

здесь новые переменные U, V, для удобства, опять обозначим через u, v. Тогда линеаризованная система (см. (2.2)) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^u(\bar{D}q + \bar{v}_1 p), \\ D\bar{D}q = e^u(\bar{D}p + \bar{u}_1 p). \end{cases} \tag{2.7}$$

Интегрируя второе уравнение системы (2.7) по y, получим следующую систему уравнений, эквивалентную предыдущей

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^u(\bar{D}q + \bar{v}_1 p), \\ Dq = e^u p. \end{cases} \tag{2.8}$$

Решение системы уравнений (2.8) будем искать в виде:

$$p = \sum_{k=0}^{n} p_k f^{(k)}(y), \quad q = \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(k)}(y), \tag{2.9}$$

здесь $f^{(k)}(y) = \bar{D}^{(k)} f(\bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \ldots)$.

Далее подставим функции (2.9) в систему уравнений (2.8) и приравняем коэффициенты при одинаковых производных. Получим систему уравнений, эквивалентную системе (2.8), а именно

$$\begin{cases} Dq_k = e^u p_k, \ k = 0, 1, \ldots, n, \\ D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \\ D\bar{D}p_k + D(p_{k-1}) = e^u(\bar{D}q_k + q_{k-1} + \bar{v}_1 p_k), \ k = 1, 2, \ldots, n, \\ Dp_n = e^u q_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай, когда $n = 0$. В данном случае система (2.10) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \\ Dq_0 = e^u p_0, \\ Dp_0 = e^u q_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Во втором уравнение системы (2.11) заменим $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}$, получим следующее уравнение

$$(q_0)_{\bar{u}_1} \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} = p_0.$$

Продифференцируем данное уравнение по $\bar{u}_1$, при этом выражая $(p_0)_{\bar{u}_1}$ из третьего уравнения системы (2.11), получим

$$\left((q_0)_{\bar{u}_1}(\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}) - \bar{u}_1 q_0\right)'_{\bar{u}_1} = 0$$

или

$$(q_0)_{\bar{u}_1}(\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}) - \bar{u}_1 q_0 = A(\bar{w}, \bar{W}, \ldots), \tag{2.12}$$

здесь $A(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)$ – произвольная функция. Уравнение (2.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого можно представить в виде:

$$q_0 = -\frac{A}{4\bar{w}}\bar{u}_1 + B\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \tag{2.13}$$

где $B(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)$ – произвольная функция.

Далее подставим выражения для q_0 (2.13) во второе и первое уравнение системы (2.11) и найдем, что p_0, q_0 имеют следующий вид

$$p_0 = \bar{u}_1 B(\bar{w}, \bar{W}, \ldots), \ \ q_0 = \bar{v}_1 B(\bar{w}, \bar{W}, \ldots). \tag{2.14}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 1$ в системе (2.10). В данном случае система уравнений (2.10) перепишется в виде

$$Dq_0 = e^u p_0, \tag{2.15}$$

$$Dq_1 = e^u p_1, \tag{2.16}$$

$$D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \tag{2.17}$$

$$D\bar{D}p_1 + Dp_0 = e^u(\bar{D}q_1 + q_0 + \bar{v}_1 p_1), \tag{2.18}$$

$$Dp_1 = e^u q_1. \tag{2.19}$$

Уравнения (2.16) и (2.19) совпадают с уравнениями системы (2.11), следовательно p_1 и q_1 находятся как и выше, и имеют вид

$$p_1 = \bar{u}_1 B - \frac{A}{4\bar{w}}\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \quad q_1 = -\frac{A}{4\bar{w}}\bar{u}_1 + B\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}. \tag{2.20}$$

Продифференцируем уравнение (2.19) по y, получим

$$D\bar{D}p_1 = e^u(\bar{D}q_1 + \bar{u}_1 q_1). \tag{2.21}$$

Вычтем из уравнения (2.18) уравнение (2.21), и после несложных преобразований получим

$$Dp_0 = e^u(q_0 + A(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)). \tag{2.22}$$

Продифференцируем равенство (2.22) по y и вычтем из него уравнение (2.17), найдем выражение для p_0:

$$p_0 = \frac{1}{\bar{v}_1}(\bar{D}A + \bar{u}_1 q_0 + \bar{u}_1 A). \tag{2.23}$$

Выражение для p_0 (2.23) подставим в уравнение (2.15) и заменяя $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка на функцию q_0, а именно:

$$(q_0)_{\bar{u}_1} = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} q_0 + \frac{\bar{D}A}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} + \frac{\bar{u}_1 A}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}.$$

Решение данного уравнения можно представить в виде

$$q_0 = -\bar{u}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} - A + R\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \tag{2.24}$$

где $R = R(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)$ – произвольная функция. Подставим выражение (2.24) в равенство (2.23), откуда найдем p_0

$$p_0 = -\bar{v}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} + \bar{u}_1 R. \tag{2.25}$$

В итоге получили, что система уравнений (2.15)–(2.19) имеет решения вида (2.20), (2.24), (2.25). Из формул (2.9) следует, что симметрии системы уравнений (2.6) имеют следующий вид

$$p = \left(-\bar{v}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} + \bar{u}_1 R\right) f + \left(\bar{u}_1 B - \frac{A\bar{v}_1}{4\bar{w}}\right) \bar{D}f, \tag{2.26}$$

$$q = \left(-\bar{u}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} - A + \bar{v}_1 R\right) f + \left(-\frac{A}{4\bar{w}}\bar{u}_1 + \bar{v}_1 B\right) \bar{D}f. \tag{2.27}$$

С учетом формул (2.14), симметрии (2.26), (2.27) можно представить в виде

$$p = \frac{\bar{v}_1}{\bar{w}}\bar{D}G, \quad q = 4G + \frac{\bar{u}_1}{\bar{w}}\bar{D}G, \tag{2.28}$$

здесь $G = -\frac{1}{4}Af$. Напомним, что найденные симметрии (2.14), (2.28) заданы в новых переменных U, V. Возвращаясь к переменным $u = \frac{U+V}{2}$, $v = \frac{U-V}{2}$, получим следующее представление для симметрий системы уравнений (1.3)

$$p = \bar{u}_1\frac{1}{\bar{w}}\bar{D}G + \bar{u}_1 B + 2G, \quad q = -\bar{v}_1\frac{1}{\bar{w}}\bar{D}G + \bar{v}_1 B - 2G. \tag{2.29}$$

3. Построение общего решения

С использованием высших симметрий (2.5), (2.29) задача интегрирования системы уравнений (1.3) сводится к следующей динамической системе (см. [1]):

$$\begin{cases} \tau\frac{\partial u}{\partial \tau} = (D+u_1)\psi^1 - \psi^2 = \bar{u}_1\frac{1}{\bar{w}}\bar{D}\bar{\psi}^1 + \bar{u}_1\bar{\psi}^2 + 2\bar{\psi}^1, \\ \tau\frac{\partial v}{\partial \tau} = v_1\psi^1 + \psi^2 = -\bar{v}_1\frac{1}{\bar{w}}\bar{D}\bar{\psi}^1 + \bar{v}_1\bar{\psi}^2 - 2\bar{\psi}^1, \\ \tau\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} = e^{u+v}\bar{u}_1\psi^1, \\ \tau\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \tau} = -e^{u+v}\bar{v}_1\psi^1, \\ \tau\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = e^{u+v}\bar{u}_1\frac{1}{\bar{w}}\bar{D}\bar{\psi}^1 + e^{u+v}\bar{u}_1\bar{\psi}^2, \\ \tau\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = e^{u+v}\bar{v}_1\frac{1}{\bar{w}}\bar{D}\bar{\psi}^1 - e^{u+v}\bar{v}_1\bar{\psi}^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

будем предполагать, что функции $\psi^1 = \psi^1(x)$, $\psi^2 = \psi^2(x)$, $\bar{\psi}^1 = \bar{\psi}^1(y)$, $\bar{\psi}^2 = \bar{\psi}^2(y)$.

Первое и второе уравнения системы (3.1) представляют собой уравнения в частных производных первого порядка относительно функций u, v, соответственно. Решения данных уравнений можно представить в виде

$$u = -\ln\psi^1 + \int\frac{\psi^2}{\psi^1}dx + F(a,y), \quad v = -\int\frac{\psi^2}{\psi^1}dx + G(a,y), \tag{3.2}$$

здесь $F(a,y)$, $G(a,y)$ – произвольные функции, через a обозначено выражение

$$a = \ln\tau + \int\frac{dx}{\psi^1}.$$

Далее подставим найденные функции (3.2) в систему (3.1), получим систему уравнений на функции F и G

$$F_a = \bar{D}\bar{\psi}^1\frac{1}{G_y} + \bar{\psi}^2 F_y + 2\bar{\psi}^1, \tag{3.3}$$

$$G_a = -\bar{D}\bar{\psi}^1\frac{1}{F_y} + \bar{\psi}^2 G_y - 2\bar{\psi}^1, \tag{3.4}$$

$$F_{ya} = e^{F+G}F_y, \tag{3.5}$$

$$G_{ya} = -e^{F+G}G_y, \tag{3.6}$$

$$F_{aa} = e^{F+G}\left(\bar{D}\bar{\psi}^1\frac{1}{G_y} + \bar{\psi}^2 F_y\right), \tag{3.7}$$

$$G_{aa} = e^{F+G}\left(\bar{D}\bar{\psi}^1\frac{1}{F_y} - \bar{\psi}^2 G_y\right). \tag{3.8}$$

С учетом (3.3), (3.4), уравнения (3.7), (3.8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_{aa} = e^{f+g}f_a, \\ g_{aa} = -e^{f+g}g_a, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $f = F - 2a\bar{\psi}^1$, $g = G + 2a\bar{\psi}^1$. Вычтем из первого уравнения системы (3.9) второе уравнение и проинтегрируем полученное равенство по a, тогда

$$f_a - g_a = e^{f+q} + C_1(y), \tag{3.10}$$

здесь $C_1(y)$ – произвольная функция. Далее умножим первое уравнение системы (3.9) на g_a, второе уравнение - на f_a и сложим полученные выражения, откуда найдем

$$g_a = \frac{C_2(y)}{f_a}, \tag{3.11}$$

здесь $C_2(y)$ – произвольная функция. Подставим найденную формулу для g_a (3.11) в уравнение (3.10), получим

$$g = -f + \ln\left(f_a^2 - C_1 f_a - C_2\right) - \ln f_a. \tag{3.12}$$

Возвращаясь к системе уравнений (3.9), с учетом формулы (3.12), первое уравнение можно переписать так

$$f_{aa} = f_a^2 - C_1 f_a - C_2.$$

Правая часть данного выражения представляет собой полином второй степени, разложим его на множители

$$f_{aa} = (f_a - \alpha)(f_a - \beta),$$

α, β – произвольные функции от y. Интегрируя данное уравнение найдем функцию f, а именно

$$f = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\left[(\alpha - \beta)a + \gamma\right] - \ln\left[1 - exp\{(\alpha - \beta)a + \gamma\}\right] + \delta(y), \;\; \alpha \neq \beta, \tag{3.13}$$

$$f = \alpha a - \ln(\varepsilon - a) + \kappa(y), \;\; \alpha = \beta, \tag{3.14}$$

здесь $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$, $\delta(y)$, $\varepsilon(y)$, $\kappa(y)$ – произвольные функции.

Теперь подставим найденные формулы (3.13), (3.14), (3.12) в уравнение (3.5). Получим следующие соотношения

1. при $\alpha \neq \beta$

$$\beta' + 2\bar{D}\bar{\psi}^1 = 0, \;\; \alpha = \beta + c, \;\; \delta' + \frac{\beta'\gamma}{\alpha - \beta} = 0, \tag{3.15}$$

где c – произвольная постоянная,

2. при $\alpha = \beta$

$$\alpha' + 2\bar{D}\bar{\psi}^1 = 0, \;\; \alpha\varepsilon' + \kappa' = 0. \tag{3.16}$$

Далее подставим функции (3.13), (3.14), (3.12), с учетом условий (3.15), (3.16) в уравнения (3.6), (3.3), (3.4), получим верные тождества. Таким образом решение системы уравнений (1.3) можно представить в виде (3.2), где функции $F = f + 2a\bar{\psi}^1$, $G = g - 2a\bar{\psi}^1$ находятся из соотношений (3.13), (3.14), (3.12), а именно

при $\alpha \neq \beta$:

$$u = \ln\phi_1'(x) + \phi_2(x) - \frac{\alpha\delta'}{\alpha'} - \ln\left(1 - exp\{a - \frac{\delta'}{\alpha'}\}\right) + \delta,$$

$$v = -\phi_2(x) + (a - \frac{\delta'}{\alpha'}) + \frac{\alpha\delta'}{\alpha'} - \ln\left(\alpha - (\alpha - 1)exp\{a - \frac{\delta'}{\alpha'}\}\right) - \delta,$$

при $\alpha = \beta$:

$$u = \ln\phi_1'(x) + \phi_2(x) - \ln(\varepsilon(y) - a) + \kappa(y), \tag{3.17}$$

$$v = -\phi_2(x) - \ln\left[\frac{\kappa'}{\varepsilon'}(a - \varepsilon(y)) + 1\right] - \kappa(y), \tag{3.18}$$

здесь $\phi_1'(x) = \frac{1}{\psi^1}$, $\phi_2'(x) = \frac{\psi^2}{\psi^1}$, $\varepsilon(y)$, $\kappa(y)$, $\alpha(y)$, $\delta(y)$ – произвольные функции.

4. Точное решение задачи Гурса

Рассмотрим задачу Гурса для системы уравнений (1.3):

$$u\mid_{y=0}=\ln p(x),\quad v\mid_{y=0}=\ln q(x),\quad u\mid_{x=0}=\ln \bar p(y),\quad v\mid_{x=0}=\ln \bar q(y). \tag{4.1}$$

Положим в решение (3.17), (3.18) $y=0$, $\tau=1$, получим

$$u\mid_{y=0}=\ln p(x)=\ln\phi_1'+\phi_2-\ln(\varepsilon(0)-\phi_1)+\kappa(0), \tag{4.2}$$

$$v\mid_{y=0}=\ln q(x)=-\phi_2-\ln\left(\frac{\kappa'(0)}{\varepsilon'(0)}(\phi_1-\varepsilon(0))+1\right)-\kappa(0). \tag{4.3}$$

Сложим выражения (4.2) и (4.3), и проинтегрируем полученное равенство по x, откуда найдем функцию $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x)=\varepsilon(0)-\left(C_2+\left\{\frac{1}{C_1}-C_2\right\}e^{\int\limits_0^x pqd\xi}\right)^{-1}, \tag{4.4}$$

здесь постоянные $C_1=\varepsilon(0)-\phi_1(0)$, $C_2=\frac{\kappa'(0)}{\varepsilon'(0)}$.

Далее из выражения (4.2) найдем вид функции $\phi_2(x)$, а именно:

$$\phi_2(x)=\ln\left[\left(q(0)e^{\phi_2(0)+\kappa(0)}-1\right)e^{-\int\limits_0^x pqd\xi}+1\right]-\ln q-\kappa(0). \tag{4.5}$$

Теперь положим в формулах (3.17), (3.18) $x=0$:

$$u\mid_{x=0}=\ln\bar p(y)=\ln\phi_1'(0)+\phi_2(0)-\ln(\varepsilon-\phi_1(0))+\kappa, \tag{4.6}$$

$$v\mid_{x=0}=\ln\bar q(y)=-\phi_2(0)-\ln\left(\frac{\kappa'}{\varepsilon'}(\phi_1(0)-\varepsilon)+1\right)-\kappa. \tag{4.7}$$

Сложим равенства (4.6), (4.7), тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции $\varepsilon(y)$, решая которое найдем

$$\varepsilon(y)=\phi_1(0)+\phi_1'(0)\left(\int\limits_0^y\bar q\bar p'd\xi+\frac{\phi_1'(0)}{C_1}\right)^{-1}. \tag{4.8}$$

Тогда $\kappa(y)$ находится из выражения (4.6) и имеет вид

$$\kappa(y)=\ln\bar p-\phi_2(0)-\ln\left(\int\limits_0^y\bar q\bar p'd\xi+\bar p(0)e^{-\phi_2(0)-\kappa(0)}\right). \tag{4.9}$$

Далее воспользуемся условием согласования. Положим в решение (3.17), (3.18) $x=0$, $y=0$, получим следующие соотношения:

$$\phi_1'(0)=p(0)q(0)C_1(1-C_1C_2), \tag{4.10}$$

$$\phi_2(0)+\kappa(0)=-\ln\left(q(0)(1-C_1C_2)\right). \tag{4.11}$$

Теперь подставим найденные функции (4.4), (4.5), (4.8), (4.9) в решение (3.17), (3.18) и, учитывая условия согласования (4.10), (4.11), в итоге получим следующее представление решения задачи Гурса (1.3), (4.1), а именно:

$$u=\ln\left[\frac{p(x)\bar p(y)q(0)}{p(0)q(0)+\int\limits_0^y\bar p'\bar qd\xi(1-exp\{\int\limits_0^x pqd\xi\})}\right],$$

$$v = \ln\left[\frac{q(x)\bar{q}(y)p(0)exp\{\int\limits_0^x pqd\xi\}}{(\bar{p}\bar{q} - \int\limits_0^y \bar{p}'\bar{q}d\xi)(exp\{\int\limits_0^x pqd\xi\} - 1) + p(0)q(0)}\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лезнов А. Н., Шабат А. Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* //Интегрируемые системы БФАН СССР. Уфа. 1982. С. 34–44.
2. Жибер А. В., Михайлова Ю.Г. *Алгоритм построения общего решения n–компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами Лапласа и краевые задачи* // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1. №3. С. 28–45.
3. Воронова Ю. Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лалпалса* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. №2. С. 20–26.
4. Жибер А. В., Михайлова Ю.Г. *О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лалпалса* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. №4. С. 73–82.
5. Воронова Ю. Г. *Построение решения задачи Гурса для нелинейных гиперболических уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых учёных. Уфа, БГУ. 2012. Т. 1. С. 51–58.
6. Гурьева А. М. *Метод каскадного интегрирования Лапласа и нелинейные гиперболические системы уравнений* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 2005. 172 с.

Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mihaylovaj@mail.ru

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru