

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ И ДВУСТОРОННИМ ЗАВИХРЕНИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ $1/2$

Р.Б. САЛИМОВ, П.Л. ШАБАЛИН

**Аннотация.** Рассмотрена однородная задача Гильберта для верхней полуплоскости со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности. В случае, когда индекс задачи имеет степенную особенность порядка меньше  $1/2$  в специальном классе функций получены формулы общего решения и проведено полное исследование разрешимости задачи.

**Ключевые слова:** краевая задача Гильберта, завихрение на бесконечности, бесконечный индекс, целые функции.

**Mathematics Subject Classification:** 30E25, 30E20, 30D10.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Краевая задача Гильберта теории аналитических функций для полуплоскости — это задача об определении аналитической в верхней полуплоскости  $D$  функции  $F(z)$  по краевому условию

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \quad (1)$$

$a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  — заданные функции переменной точки  $t$  вещественной оси  $L$ ,  $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ . Для задачи (1) получена полная картина разрешимости в классе ограниченных непрерывных вплоть до границы функций, если коэффициенты и правая часть краевого условия принадлежат классу  $H_L(\mu)$  (см., например, [1], с. 150, [2], с. 280), в классе функций со степенными особенностями в точках разрыва коэффициентов, когда  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  имеют конечное число точек разрыва первого рода и непрерывны по Гельдеру в интервалах между точками разрыва (см. например [3]), в классе ограниченных в  $D$  функций, когда задача имеет непрерывные при  $t \in (-\infty, +\infty)$  коэффициенты и двустороннее завихрение на бесконечности степенного порядка  $\rho < 1/2$  (см. [4], [5]). Последнюю задачу с двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка меньше 1 сформулировал И.Е. Сандрыгайло [6], который в классе ограниченных функций и в классе ограниченных функций экспоненциального порядка убывания на бесконечности при некоторых ограничениях на характеристики особенности получил предварительные результаты о разрешимости. Однако, примененный в этой работе метод решения Н.И. Мухелишвили с привлечением идей и результатов из [7] не позволил выбрать класс решений, в котором бы удалось провести полное исследование картины разрешимости.

---

R.B. SALIMOV, P.L. SHABALIN, ON SOLVABILITY OF HOMOGENEOUS RIEMANN-HILBERT PROBLEM WITH A COUNTABLE SET OF COEFFICIENT DISCONTINUITIES AND TWO-SIDE CURLING AT INFINITY OF ORDER LESS THAN  $1/2$ .

© Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. 2013.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00762-а, 12-01-00636-а).

Поступила 9 марта 2012 г.

Задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов впервые исследовалась в работах [8], [9], в которых были получены формулы общего решения во введенных классах и разработаны методы построения примеров целых функций с заявленными свойствами. В настоящей статье предложено полное описание картины разрешимости задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка  $\rho < 1/2$ .

## 2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ТОЧКАХ РАЗРЫВА

Пусть  $L$  – вещественная ось в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ ,  $D$  – полуплоскость  $\Im z > 0$ ,  $t$  – точка линии  $L$ . Требуется найти функцию  $F(z)$ , аналитическую в области  $D$  по краевому условию (1), в котором  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  – заданные на  $L$  действительные функции точки  $t$  контура  $L$ , непрерывные всюду, кроме точек разрыва первого рода  $t_j$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ , причем  $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$  во всех точках непрерывности коэффициентов,  $0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ,  $0 > t_{-1} > \dots > t_{-k} > t_{-k-1} > \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{-k} = -\infty$ . Будем считать, что краевое условие выполняется всюду на  $L$ , исключая точки  $t_k, t_{-k}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ . Некоторые уточнения постановки задачи приведем ниже.

Если  $c(t) \equiv 0$ , то задача называется однородной, если  $c(t) \not\equiv 0$  – неоднородной. В этой работе нас интересует однородная задача Гильберта.

Краевое условие (1) с  $c(t) \equiv 0$  перепишем в виде

$$\Re[e^{-i\nu(t)} F(t)] = 0, \tag{2}$$

где  $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$  – ветвь, выбранная на каждом из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число  $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$  удовлетворяло условию  $0 \leq \delta_j < 2\pi$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Введем функцию  $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$ , где  $\beta(t)$  – целочисленная функция, принимающая значения  $\beta_k, \beta_{-k}$  в интервалах  $(t_k, t_{k+1})$  и  $(t_{-k}, t_{-k-1})$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , соответственно и значение  $\beta_0 = 0$  в интервале  $(t_{-1}, t_1)$ . Число  $\beta_k$  выберем так, чтобы

$$0 \leq \varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0) < \pi,$$

значение  $\beta_{-k}$  выберем так, чтобы

$$0 \leq \varphi(t_{-k} + 0) - \varphi(t_{-k} - 0) < \pi.$$

Обозначим

$$\kappa_j = \frac{\varphi(t_j + 0) - \varphi(t_j - 0)}{\pi}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

тогда имеем  $0 \leq \kappa_k < 1$ ,  $0 \leq \kappa_{-k} < 1$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ .

Примем, что точки разрыва удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty, \tag{3}$$

и рассмотрим бесконечные произведения

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}, \tag{4}$$

в которых под  $\arg(1 - z/t_j)$  понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при  $z = 0$  и непрерывную в плоскости  $z$ , разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки

$t = t_j$ ,  $t = +\infty$  при  $j > 0$  и соединяющей точки  $t = -\infty$ ,  $t = t_j$  при  $j < 0$ . Таким образом, для точек верхних берегов разрезов имеем

$$\arg P_+(t) = - \sum_{j=1}^k \kappa_j \pi, \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (5)$$

$$\arg P_-(t) = \sum_{j=1}^k \kappa_{-j} \pi, \quad t_{-k-1} < t < t_{-k},$$

$$\arg P_+(t) = 0, \quad t < t_1, \quad \arg P_-(t) = 0, \quad t > t_{-1}. \quad (6)$$

Краевое условие (2) запишем так

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)} F(t) P_+(t) P_-(t)] = 0, \quad (7)$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t) + \arg P_-(t), \quad (8)$$

функции  $\arg P_+(t)$ ,  $\arg P_-(t)$  определяются формулами (5), (6).

Вводя новую искомую функцию  $F_1(z) = F(z) P_+(z) P_-(z)$ , условие (7) запишем в виде

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)} F_1(t)] = 0,$$

причем, как видно из формул (8), (5), функция  $\varphi_1(t)$  непрерывна во всех конечных точках  $L$ . Таким образом, мы пришли к краевой задаче Гильберта с непрерывными коэффициентами для функции  $F_1(z)$ . Будем считать при этом, что функция  $\varphi_1(t)$  удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \tilde{\nu}(t), & t < 0, \end{cases} \quad (9)$$

$(\nu^-)^2 + (\nu^+)^2 \neq 0$ , где  $\nu^-$ ,  $\nu^+$ ,  $\rho$  – постоянные,  $0 < \rho < 1/2$ ,  $\tilde{\nu}(t)$  – функция, непрерывная всюду на  $L$ , включая бесконечно удаленную точку и удовлетворяющая условию Гельдера с показателем  $\mu$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , на всем контуре  $L$ , включая бесконечно удаленную точку ([1], с. 18, 67) – условию  $H_L(\mu)$  (см. ([7], с. 113)).

Решение  $F(z)$  однородной задачи будем искать в классе функций, для которых произведение

$$F(z) P_+(z) P_-(z) = F_1(z)$$

является функцией, ограниченной в  $D$ . Тем самым, задача сводится к уже рассмотренной в [5]. После нахождения функции  $F_1(z)$  определяем решение однородной краевой задачи, соответствующей задаче (2), по формуле

$$F(z) = F_1(z) / P_+(z) P_-(z).$$

Это решение в точке  $t_j$ , вообще говоря, обращается в бесконечность порядка  $\kappa_j$ .

При дополнительных ограничениях изучим поведение этого решения однородной краевой задачи на луче  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Как и в [9], (см. также [8], с. 112) введем функции

$$n_-^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < -t_{-1}, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_{-j}, & -t_{-k+1} \leq x < -t_{-k}, \end{cases} \quad n_+^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < t_1, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j, & t_{k-1} \leq x < t_k, \end{cases}$$

и потребуем выполнения условий

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}} = \Delta_+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_-^*(x)}{x^{\kappa_-}} = \Delta_-, \quad (10)$$

с положительными постоянными  $\Delta_+$ ,  $\Delta_-$  и  $0 < \kappa_- < 1/2$ ,  $0 < \kappa_+ < 1/2$ . В [9], ([8], с. 112) получены структурные формулы

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa_+ \pi}}{\sin \pi \kappa_+} z^{\kappa_+} + I_+(z), \quad I_+(z) = -z \int_0^{+\infty} \frac{n_+^*(\tau) - \Delta_+ \tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau - z)} d\tau \quad (11)$$

для  $0 < \arg z < 2\pi$  и

$$\ln P_-(z) = \frac{\pi \Delta_-}{\sin \pi \kappa_-} z^{\kappa_-} + I_-(z), \quad I_-(z) = z \int_0^{+\infty} \frac{n_-^*(\tau) - \Delta_- \tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau + z)} d\tau, \quad (12)$$

если  $-\pi < \arg z < \pi$ . Выражая по формулам Сохоцкого предельные значения интегралов типа Коши и выделяя вещественные части из (11), (12), получим равенства

$$\ln |P_+(t)| = \frac{\pi \Delta_+ \cos(\kappa_+ \pi)}{\sin(\kappa_+ \pi)} t^{\kappa_+} + I_+(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

$$I_+(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{n_+^*(\tau) - \Delta_+ \tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau - t)} d\tau, \quad t > 0, \quad t \neq t_k, \quad k = \overline{1, \infty},$$

$$\ln |P_-(-t)| = \frac{\pi \Delta_- \cos(\kappa_- \pi)}{\sin(\kappa_- \pi)} t^{\kappa_-} + I_-(-t),$$

$$I_-(-t) = - \int_0^{+\infty} \frac{n_-^*(\tau) - \Delta_- \tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau - t)} d\tau, \quad t > 0, \quad t \neq -t_k, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (14)$$

Из формул (4), (13), (14) следует, что функция  $|\exp\{I_+(z)\}|$  ( $|\exp\{I_-(z)\}|$ ) обращается в нуль порядка  $\kappa_k$  (порядка  $\kappa_{-k}$ ) в точке  $t_k$  ( $t_{-k}$ ),  $k = \overline{1, \infty}$ .

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия (10),  $\delta$  – заданное малое положительное число,  $z = re^{i\theta}$ , тогда справедливы следующие асимптотические оценки

$$I_+(re^{i\theta}) = o(r^{\kappa_+}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \delta < \theta < 2\pi - \delta,$$

$$I_-(re^{i\theta}) = o(r^{\kappa_-}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad -\pi + \delta < \theta < \pi + \delta.$$

Пусть  $\delta$  – достаточно малое положительное число, тогда для каждого  $\theta$ ,  $\delta < \theta < 2\pi - \delta$ , очевидно неравенство  $|\tau - z| \geq (\tau + r) \sin(\delta/2)$ . Для заданного произвольно малого положительного числа  $\varepsilon$  и  $\tau > r_1(\varepsilon)$  в силу (10) имеем  $n_+^*(\tau) - \Delta_+ \tau^{\kappa_+} < \varepsilon \tau^{\kappa_+}$ , следовательно,

$$|I_+(re^{i\theta})| < \frac{r^{\kappa_+}}{\sin(\delta/2)} \left( r^{1-\kappa_+} \int_{t_1}^{r_1(\varepsilon)} \frac{n_+^*(\tau)}{\tau(\tau + r)} d\tau + \Delta_+ r^{1-\kappa_+} \int_0^{r_1(\varepsilon)} \frac{d\tau}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau + r)} + \varepsilon r^{1-\kappa_+} \int_{r_1(\varepsilon)}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau + r)} \right),$$

для  $z = re^{i\theta}$ ,  $\delta < \theta < 2\pi - \delta$ . При заданном  $\varepsilon$  первые два интеграла есть величины  $O(\frac{1}{r})$ , а последний

$$r^{1-\kappa_+} \int_{r_1(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau + r)} d\tau < r^{1-\kappa_+} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau + r)} d\tau = \frac{\pi}{\sin(\pi \kappa_+)},$$

следовательно, (ср. [10], с. 178, [8], с.115)

$$I_+(re^{i\theta}) = o(r^{\kappa_+}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \delta < \theta < 2\pi - \delta.$$

Не сложнее проводится оценка  $I_-(re^{i\theta})$ .

Из леммы 1 в силу ограничений  $\kappa_+ < 1/2$ ,  $\kappa_- < 1/2$ , вытекает, что решение  $F(re^{i\theta})$  однородной задачи (7) для  $\delta < \theta < \pi - \delta$  удовлетворяет условию  $F(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ .

Введем как и в [5] функцию

$$P(z) + iQ(z) = le^{i\alpha}r^\rho e^{i\theta\rho}, \quad (15)$$

где  $l$ ,  $\alpha$  – действительные постоянные,  $r = |z|$ ,  $\theta = \arg z$  – однозначная непрерывная в полуплоскости  $D$  ветвь  $\arg z$ , удовлетворяющая соотношению  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Эта функция является аналитической в области  $D$ , а на её границе  $L$  принимает значения

$$P(t) + iQ(t) = l|t|^\rho [\cos(\alpha + \theta\rho) + i \sin(\alpha + \theta\rho)],$$

где  $\theta = 0$ , при  $t > 0$ ,  $\theta = \pi$ , при  $t < 0$ .

Выберем числа  $l$ ,  $l > 0$ ,  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  так, чтобы

$$l \cos \alpha = \nu^-, \quad l \cos(\alpha + \pi\rho) = \nu^+,$$

т.е. чтобы

$$l \cos \alpha = \nu^-, \quad l \sin \alpha = \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}.$$

Отметим, что при этом

$$l \sin(\alpha + \pi\rho) = \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}, \quad l = \frac{[(\nu^-)^2 + (\nu^+)^2 - 2\nu^-\nu^+ \cos(\pi\rho)]^{1/2}}{\sin(\pi\rho)},$$

$$P(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho, & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho, & t < 0, \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} (\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+) t^\rho / \sin(\pi\rho), & t > 0, \\ (\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)) |t|^\rho / \sin(\pi\rho), & t < 0, \end{cases} \quad (16)$$

и

$$Q(re^{i\theta}) = r^\rho \frac{\nu^- \cos(\rho(\pi - \theta)) - \nu^+ \cos(\rho\theta)}{\sin(\pi\rho)}.$$

Далее определим аналитическую ограниченную в области  $D$  функцию, граничные значения мнимой части которой равны  $\varphi_1(t) - P(t) = \tilde{\nu}(t)$ , по формуле

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t) \frac{dt}{t-z}.$$

На контуре  $L$  эта функция принимает значения  $\Gamma^+(t) = \Gamma(t) + i\tilde{\nu}(t)$ , где

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t_1) \frac{dt_1}{t_1 - t}.$$

Краевое условие (7) запишем так

$$\Im \left\{ ie^{-\Gamma^+(t)} e^{-iP(t)+Q(t)} F(t) P_+(t) P_-(t) \right\} = 0, \quad (17)$$

преобразовав при дополнительных ограничениях (3), (9), (10) краевые условия однородной задачи к виду задачи (17).

В фигурных скобках формулы (17) стоит граничное значение аналитической в области  $D$  функции

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)} e^{-iP(z)+Q(z)} F(z) P_+(z) P_-(z), \quad (18)$$

которую с учетом (11), (12) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= ie^{-\Gamma^+(z)} \exp\{Q(z) - iP(z)\} F(z) e^{I_+(z)} e^{+I_-(z)} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin \pi\kappa_+} z^{\kappa_+}\right\} \exp\left\{\frac{\pi\Delta_-}{\sin \pi\kappa_-} z^{\kappa_-}\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно (17) для граничного значения функции  $\Phi(z)$  имеем

$$\Im\Phi_+(t) = 0 \quad (20)$$

всюду на  $L$ . Это означает, что функция  $\Phi(z)$  аналитически продолжается на полуплоскость  $\Im z < 0$ , причем для точки  $z$  этой полуплоскости

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \Im z < 0. \quad (21)$$

Пусть  $\tilde{B}$ – класс решений  $F(z)$  однородной задачи (17), для которых произведение  $|F(z)||z - t_j|^{\kappa_j}$  ограничено вблизи точки  $t_j$  для всех  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Для таких решений условие  $\Im\Phi_+(t) = 0$  мы должны считать выполненным и в точках  $t_k, t_{-k}, k = \overline{1, +\infty}$ . В самом деле, продолжая функцию  $\Phi(z)$  на полуплоскость  $\Im z < 0$ , как указано выше, через участки  $t_{k-1}t_k$  и  $t_k t_{k+1}$  мы получаем одну и ту же функцию в силу (21). Для класса  $\tilde{B}$  решений  $\Phi(z)$  задачи (17) величина  $|\Phi(z)|$  является ограниченной вблизи  $t_k$ , поэтому точка  $t_k$  является устранимой особой точкой аналитической в окрестности  $t_k$  функции  $\Phi(z)$ , полученной при аналитическом продолжении, следовательно, можно принять  $\Im\Phi^+(t_k) = 0$ . Таким образом, после вышеуказанного аналитического продолжения мы получаем целую функцию  $\Phi(z)$ .

Из изложенного ясно, что мы приходим к теореме 1.

**Теорема 1.** *Для того чтобы однородная краевая задача (17) в классе  $\tilde{B}$  имела решение  $F(z)$ , необходимо и достаточно чтобы для этой функции была справедлива формула (18), в которой  $\Phi(z)$  – произвольная целая функция, принимающая действительные значения на  $L$ .*

Далее решение однородной задачи (17) будем искать в классе  $B_*$  функций  $F(z)$ , для которых произведение  $|F(z)|e^{\Re I_+(z)} e^{\Re I_-(z)}$  является функцией, аналитической и ограниченной в области  $D$ . Ясно, что  $B_* \subset \tilde{B}$ .

В силу симметрии для вышеуказанной целой функции  $\Phi(z)$  формулы (18) (когда имеют место (20), (21))

$$M(r) := \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\Phi(re^{i\theta})| = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |\Phi(re^{i\theta})|. \quad (22)$$

Согласно (19)

$$\begin{aligned} |\Phi(re^{i\theta})| &= \exp\{Q(re^{i\theta}) - \Re\Gamma(re^{i\theta}) + \Re I_+(re^{i\theta}) + \Re I_-(re^{i\theta})\} |F(re^{i\theta})| \times \\ &\times \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} \cos(\kappa_+(\theta - \pi)) + \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)} \cos(\kappa_-\theta)\right\}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как  $\Re\Gamma(z), |F(z)|e^{\Re(I_+(z)+I_-(z))}$  – функции ограниченные в  $D$ , то

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left\{ \exp\{-\Re\Gamma(re^{i\theta})\} |F(re^{i\theta})| \exp\{\Re(I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta}))\} \right\} \leq C, \quad (24)$$

$C = \text{const} > 0$ , кроме того, согласно (15)  $Q(re^{i\theta}) \leq lr^\rho$ . Поэтому в силу (22), (23) имеем

$$M(r) \leq C \exp\left\{lr^\rho + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)} r^{\kappa_-}\right\},$$

$$\ln M(r) \leq \ln C + lr^\rho + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)} r^{\kappa_-}. \quad (25)$$

Будем различать случаи  $\rho > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ ,  $\rho = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  и  $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ .

Пусть  $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ . Здесь по формуле (25) имеем

$$\begin{aligned} \ln \ln M(r) &\leq \rho \ln r + \ln \left[ l + \frac{\ln C}{r^\rho} + \frac{\pi\Delta_+}{r^{\rho-\kappa_+} \sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{r^{\rho-\kappa_-} \sin(\pi\kappa_-)} \right], \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} &\leq \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left\{ \rho + \frac{1}{\ln r} \ln \left[ l + \frac{\ln C}{r^\rho} + \frac{\pi\Delta_+}{r^{\rho-\kappa_+} \sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{r^{\rho-\kappa_-} \sin(\pi\kappa_-)} \right] \right\} &= \rho. \end{aligned}$$

Следовательно, порядок  $\rho_\Phi = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [\ln \ln M(r) / \ln r]$  целой функции  $\Phi(z)$ , определяемой формулами (18), (20), (21), не превосходит  $\rho$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы краевая задача (17) при  $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  имела решение  $F(z)$  класса  $B_*$  необходимо и достаточно, чтобы для этой функции  $F(z)$  была справедлива формула (18), в которой  $\Phi(z)$  является целой произвольной функцией порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющей условию (20) и на контуре  $L$  для всех достаточно больших  $t$  неравенствам

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho + \frac{\pi\Delta_+ \cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)} t^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)} t^{\kappa_-} \right\}, \quad (26)$$

если  $t > 0$ , и

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^\rho + \frac{\pi\Delta_+ |t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- \cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)} |t|^{\kappa_-} \right\}, \quad (27)$$

если  $t < 0$ . Здесь  $C = \text{const} > 0$ .

Доказательство. Необходимость. Пусть  $F(z)$  есть решение краевой задачи (17) класса  $B_*$ . Но тогда, как было показано выше, имеют место соотношения (18), (20), в которых  $\Phi(z)$  с условием (21) является целой функцией порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ . Полагая в формуле (23)  $\theta = 0$ , затем  $\theta = \pi$ , с учетом (24) получаем, соответственно, неравенства (26), (27).

Достаточность. Пусть теперь для функции  $F(z)$  справедлива формула (18), причем  $\Phi(z)$  есть целая функция порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющая условию (20) и неравенствам (26), (27) (тогда функция  $F(z)$ , определяемая по формуле (18), является решением задачи (17)). В силу указанных неравенств и формул (23), (16) для аналитической в области  $D$  функции  $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$  при достаточно больших  $t$ , учитывая, что  $\Re\Gamma(z)$  есть функция, ограниченная в области  $D$ , т.е.

$$|\Re\Gamma(re^{i\theta})| \leq q, \quad q = \text{const}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (28)$$

имеем

$$|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \leq Ce^q, \quad \text{при } t > 0 \text{ и } t < 0.$$

Следовательно, всюду на  $L$  выполняется неравенство

$$|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \leq \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \text{const} > 0.$$

На основании (23) с учетом (15) имеем

$$\begin{aligned} |F(re^{i\theta}) \exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| &= |\Phi(re^{i\theta})| \exp\{-lr^\rho \sin(\alpha + \rho\theta) + \Re\Gamma(re^{i\theta})\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} \cos(\kappa_+(\theta - \pi)) - \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)} \cos(\kappa_-\theta) \right\}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (22) и (28), получим

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |F(re^{i\theta}) \exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| \leq M(r)e^{lr^\rho+q} \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}.$$

Поскольку для любого числа  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$M(r) < \exp\{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}\}$$

при всех  $r > r_\varepsilon$ , то, выбрав числа  $\varepsilon, \rho_1$  так, чтобы  $\rho < \rho_1 < 1, \rho_\Phi + \varepsilon < \rho_1$ , из предыдущего соотношения получим

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |F(re^{i\theta}) \exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| < \exp\{r^{\rho_1}\}$$

для всех достаточно больших  $r$ , для которых

$$r > r_\varepsilon, \quad \frac{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}}{r^{\rho_1}} + \frac{lr^\rho}{r^{\rho_1}} + \frac{q}{r^{\rho_1}} + \frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{r^{\rho_1}\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{r^{\rho_1}\sin(\pi\kappa_-)} < 1.$$

Следовательно, порядок функции  $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$  внутри угла  $0 \leq \theta \leq \pi$  не превышает  $\rho_1$  (см., например, [11], с.69). Поэтому согласно принципу Фрагмена-Линделёфа будем иметь  $|F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}| < \tilde{C}$  всюду в  $D$ , т.е.  $F(z)$  принадлежит классу  $B_*$ .

**Теорема 3.** *Общее решение краевой задачи (17) при  $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  в классе функций  $B_*$  определяется формулой*

$$F(z) = -ie^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}\Phi(z)[P_+(z)P_-(z)]^{-1}, \quad (29)$$

или

$$F(z) = -ie^{-I_+(z)-I_-(z)}e^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}\Phi(z) \exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-z^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\},$$

где  $\Phi(z)$  – произвольная целая функция порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющая условию (20) и неравенствам (26), (27) для достаточно больших  $|t|$ .

В самом деле, для функции  $F(z)$ , определяемой формулой (29), выполняется соотношение (18), и утверждение теоремы вытекает из предыдущего.

### 3. РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА

В этом пункте проведем полное описание картины разрешимости однородной задачи Гильберта в классе  $B_*$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $\rho > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ ,  $\rho < 1/2$ . Тогда*

*a) если*

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0, \quad \text{либо} \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) < 0,$$

*то однородная краевая задача (17) не имеет нетривиальных решений в классе  $B_*$ ;*

*b) если*

$$\begin{cases} \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ = 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

*то однородная краевая задача (17) имеет в классе  $B_*$  решения, определяемые формулой (29), в которой  $\Phi(z)$  – произвольная целая функция порядка  $\rho_\Phi, \rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющая условию (20) и неравенству*

$$|\Phi(t)| \leq \begin{cases} C \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ \cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}t^{\kappa_-}\right\}, & t > 0, \\ C \exp\left\{\frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}|t|^\rho + \frac{\pi\Delta_+|t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- \cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)}|t|^{\kappa_-}\right\}, & t < 0, \end{cases} \quad (31)$$

либо, соответственно,

$$|\Phi(t)| \leq \begin{cases} C \exp \left\{ \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho + \frac{\pi\Delta_+ \cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)} t^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_- t^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)} \right\}, & t > 0, \\ C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} |t|^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_- \cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)} |t|^{\kappa_-} \right\}, & t < 0, \end{cases}$$

для достаточно больших  $|t|$ ;

с) если

$$\begin{cases} \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0, \end{cases}$$

то однородная краевая задача (17) имеет в классе  $B_*$  решения, определяемые формулой (29), в которой  $\Phi(z)$  – произвольная целая функция порядка  $\rho_\Phi$ ,  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющая условию (20) и при  $\rho_\Phi = \rho$  еще и неравенствам (26), (27).

Доказательство. а) Действительно, пусть  $\rho < 1/2$  и имеет место

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0,$$

тогда в силу (26)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Phi(t)| = 0$ , поэтому по принципу Фрагмена–Линделёфа для плоскости, разрезанной по положительной вещественной полуоси, получаем  $\Phi(z) \equiv 0$ . Ясно, что то же получим и в случае, когда  $\rho < 1/2$  и  $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) < 0$ .

б) Пусть выполнено первое из условий (30). Для определенности будем считать, что  $\kappa_+ \geq \kappa_-$ . Согласно теореме 3 целая функция  $\Phi(z)$ , входящая в формулу общего решения (29), должна в силу (20) принимать на вещественной оси вещественные значения, удовлетворять условиям (26), (27), которые в силу равенства  $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ = 0$  примут вид неравенства (31), и иметь порядок  $\rho_\Phi \leq \rho < 1/2$ . Существование таких целых функций следует из построений, подробно проведенных в работе [5], (см. также [8], с.100). Именно, возьмем целую функцию

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right) \left( 1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}} \right), \quad (32)$$

в которой  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ ,  $r_k$  – возрастающая последовательность чисел, которую определим ниже. Здесь  $\arg(1 - z/r_k e^{i\theta_0})$  означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу  $z = r e^{i\theta_0}$ ,  $r > r_k$ , принимающую нулевое значение при  $z = 0$ ,  $\arg(1 - z/r_k e^{-i\theta_0})$  означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу  $z = r e^{i\theta_0}$ ,  $r > r_k$ , принимающую нулевое значение при  $z = 0$ .

Примем, что порядок функции  $\Phi_0(z)$  равен  $\kappa_0$  (т.е. показатель сходимости (см. [12], с.278) последовательности её нулей равен  $\kappa_0$ ). Дополнительно предположим, что для числа нулей  $n(r)$  данной целой функции, лежащих в замкнутом круге  $|z| \leq r$ , существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\kappa_0}} = \Delta_0, \quad 0 < \Delta_0 < \infty. \quad (33)$$

При сделанных предположениях о последовательности нулей целой функции (32) для функции  $\ln \Phi_0(z)$ ,  $z = r e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , доказана [5] формула

$$\ln \Phi_0(z) = -z e^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(\tau) - \tau^{\kappa_0} \Delta_0}{\tau(\tau - z e^{-i\theta_0})} d\tau - z e^{i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(\tau) - \tau^{\kappa_0} \Delta_0}{\tau(\tau - z e^{i\theta_0})} d\tau +$$

$$+ \begin{cases} \Delta_0 \pi (re^{i\theta})^{\kappa_0} 2 \cos((\theta_0 - \pi)\kappa_0) / \sin(\pi\kappa_0), & 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \Delta_0 \pi e^{-i\kappa_0\pi} (re^{i\theta})^{\kappa_0} 2 \cos(\theta_0\kappa_0) / \sin(\pi\kappa_0), & \theta_0 \leq \theta < 2\pi - \theta_0, \\ \Delta_0 \pi e^{-2i\kappa_0\pi} (re^{i\theta})^{\kappa_0} 2 \cos((\theta_0 - \pi)\kappa_0) / \sin(\pi\kappa_0), & 2\pi - \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (34)$$

Если последовательность нулей  $z_k = r_k e^{i\theta_0}$  функции  $\Phi_0(z)$  выбрать так, чтобы

$$r_k = \left( \frac{2k-1}{2\Delta_0} \right)^{1/\kappa_0}, \quad n(x) = \begin{cases} k, & r_k \leq x < r_{(k+1)}, \\ 0, & 0 \leq x < r_0, \end{cases}$$

то оба интеграла правой части формулы (34) есть величины  $o(r^{\kappa_0})$ , при  $r \rightarrow +\infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (см. [5]). На вещественной оси функция  $\ln \Phi_0(z)$  принимает действительные значения

$$\ln \Phi_0(t) = 2I_0(t, \theta_0) + \begin{cases} \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos((\theta_0 - \pi)\kappa_0)}{\sin(\pi\kappa_0)} t^{\kappa_0}, & t > 0, \\ \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos(\theta_0\kappa_0)}{\sin(\pi\kappa_0)} |t|^{\kappa_0}, & t < 0, \end{cases}$$

где

$$I_0(t, \theta_0) = \int_0^\infty (n(x) - x^{\kappa_0} \Delta_0) \frac{t^2 - tx \cos(\theta_0)}{x(t^2 - 2tx \cos(\theta_0) + x^2)} dx.$$

Таким образом, условие (31) для целой функции  $\Phi_0(z)$  будет выполняться для любых  $\Delta_0$ ,  $\theta_0$ , если взять  $\kappa_0 < \kappa_+$ , а в случае  $\kappa_0 = \kappa_+$ , числа  $\Delta_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in (0, \pi)$  следует выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\Delta_0 2 \cos((\theta_0 - \pi)\kappa_0) \leq \Delta_+ \cos(\pi\kappa_+).$$

с) Построение целых функций порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющих условию (20) и неравенствам (26), (27) можно провести так же, как в пункте б), отказавшись от условия  $\kappa_0 \leq \kappa_+$  и выбирать  $\kappa_0 \leq \rho$ . Если взять  $\kappa_0 < \rho$ , то  $\Delta_0$ ,  $\theta_0$  в формулах (32), (33), (34) – любые, а если  $\kappa_0 = \rho$ , то  $\Delta_0$ ,  $\theta_0$  должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \Delta_0 2 \cos((\theta_0 - \pi)\kappa_0) \leq \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+, \\ \Delta_0 2 \cos(\theta_0\kappa_0) \leq \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho). \end{cases}$$

Знаки равенства в этой системе будут выполняться, если взять

$$\operatorname{tg}(\theta_0\kappa_0) = \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{(\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)) \sin(\pi\kappa_0)} - \operatorname{ctg}(\pi\kappa_0), \quad \Delta_0 = \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{2 \cos(\theta_0\kappa_0)},$$

следовательно, система совместна.

**Теорема 5.** Пусть  $\kappa_+ = \kappa_- = \rho < 1/2$ . Тогда однородная краевая задача (17)

a) не имеет нетривиальных решений в классе  $B_*$ , если

$$(\nu^- + \pi\Delta_+) \cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) < 0, \quad \text{либо} \quad \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-) \cos(\pi\rho) < 0;$$

b) имеет в классе  $B_*$  решение  $F(z) = A e^{\Gamma(z)} e^{i[P(z)+iQ(z)]} / P_+(z)P_-(z)$ , где  $A$  – произвольная вещественная постоянная, если

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+) \cos(\pi\rho) = \nu^+ - \pi\Delta_-, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ > (\nu^+ - \pi\Delta_-) \cos(\pi\rho), \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+) \cos(\pi\rho) > \nu^+ - \pi\Delta_-, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ = (\nu^+ - \pi\Delta_-) \cos(\pi\rho); \end{cases}$$

с) имеет решения класса  $B_*$ , определенные формулой (29), в которой  $\Phi(z)$  – произвольная целая функция порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющая условию (20) и при  $\rho_\Phi = \rho$  еще и неравенствам (26), (27) для достаточно больших  $|t|$ , если

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+) \cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) > 0, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-) \cos(\pi\rho) > 0. \end{cases}$$

Докажем случай б) теоремы 5. Пусть выполнены условия

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+) \cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) = 0, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-) \cos(\pi\rho) > 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 3 общее решение задачи (17) определяется формулой (29), содержащей произвольную целую функцию  $\Phi(z)$  порядка  $\rho_\Phi \leq \rho$ , удовлетворяющую условию (20) и неравенствам (26), (27), которые в условиях теоремы 5 примут вид

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &\leq C \exp \left\{ \frac{(\nu^- + \pi\Delta_+) \cos(\pi\rho) + \pi\Delta_- - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho \right\}, \quad t > 0, \\ |\Phi(t)| &\leq C \exp \left\{ \frac{\nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-) \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^\rho \right\}, \quad t < 0, \end{aligned} \quad (35)$$

причем в силу первого из условий б) неравенство (35) принимает вид  $|\Phi(t)| \leq C$ ,  $t > 0$ . Из-за симметрии функции  $\Phi(z)$  следует, что  $\Phi(z)$  ограничена по модулю на обоих берегах разреза, проведенного по положительной вещественной полуоси, а поскольку  $\rho_\Phi < 1/2$ , то функция  $\Phi(z)$  ограничена во всей плоскости, т.е. является постоянной.

Случай а) и с) доказываются так же, как в теореме 4.

Пусть теперь  $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\} < 1/2$ . Здесь при  $\kappa_+ \geq \kappa_-$  согласно (25) имеем

$$\ln \ln M(r) \leq \kappa_+ \ln r + \ln \left[ \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-) r^{\kappa_+ - \kappa_-}} + \frac{\ln C}{r^{\kappa_+}} + \frac{l}{r^{\kappa_+ - \rho}} \right],$$

поэтому

$$\rho_\Phi = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leq \kappa_+,$$

следовательно, порядок целой функции  $\Phi(z)$ , выражаемой формулами (18), (20), (21), не превышает  $\kappa_+$  при  $\kappa_+ \geq \kappa_-$ . Аналогично получаем неравенство  $\rho_\Phi \leq \kappa_-$  в случае, когда  $\kappa_- > \kappa_+$ .

Поскольку коэффициенты при  $t^{\kappa_+}$ ,  $t^{\kappa_-}$  в правой части неравенств (26), (27) всегда строго больше нуля, то при  $\rho_\Phi < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  эти неравенства выполняются автоматически. Поэтому справедлива

**Теорема 6.** Для того чтобы однородная краевая задача (17) имела решение  $F(z)$  класса  $B_*$  при  $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ , необходимо и достаточно выполнения формулы (18), в которой  $\Phi(z)$  является произвольной целой функцией порядка  $\rho_\Phi \leq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ , удовлетворяющей условию (20) и при  $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  условиям (26), (27).

**Теорема 7.** Общее решение однородной краевой задачи (17) в классе функций  $B_*$  при  $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  определяется формулой (29), в которой  $\Phi(z)$  есть произвольная целая функция порядка  $\rho_\Phi \leq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ , принимающая на  $L$  действительные значения и при  $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  удовлетворяющая неравенствам (26), (27) для достаточно больших  $|t|$ .

**Теорема 8.** Пусть  $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\} < 1/2$ . Тогда однородная краевая задача (17) в классе функций  $B_*$  имеет решения, определяемые формулой (29), в которой  $\Phi(z)$  есть

произвольная целая функция порядка  $\rho_{\Phi} \leq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ , принимающая на  $L$  действительные значения и при  $\rho_{\Phi} = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$  удовлетворяющая неравенствам (26), (27) для достаточно больших  $|t|$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* М. Наука, 1977. 640 с.
3. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. *К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами* // Труды семинара по краевым задачам. Казань. Изд-во Казан ун-та. Вып. 16. 1979. С. 149–162.
4. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Метод регуляризирующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Изв. вузов. Математика. № 4. 2001. С. 76–79.
5. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Матем. заметки. Т. 73. Вып. 5. 2003. С. 724–734.
6. Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. № 6. 1974. С. 16–23.
7. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом* М.: Наука, 1986. 239 с.
8. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения* Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005. 297 с.
9. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов* // Сиб. матем. журн. Т. 49. № 4. 2008. С. 898–915.
10. У. Хейман *Мероморфные функции*. М.: Мир, 1966. 287 с.
11. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
12. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций* Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Расих Бахтигареевич Салимов,  
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,  
ул. Зеленая, 1,  
420043, г. Казань, Россия  
E-mail: salimov@5354.ru

Павел Леонидович Шабалин,  
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,  
ул. Зеленая, 1,  
420043, г. Казань, Россия  
E-mail: pavel.shabalin@mail.ru