ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 3-11.

УДК 517.968

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ НА ОТРЕЗКЕ

С.Н. АСХАБОВ, А.Л. ДЖАБРАИЛОВ

Аннотация. Методом потенциальных монотонных операторов для различных классов интегральных уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в вещественных пространствах Лебега. Показано, что решения могут быть найдены в пространстве $L_2(0,1)$ методом последовательных приближений пикаровского типа и доказаны оценки скорости их сходимости. Полученные результаты охватывают, в частности, линейные интегральные уравнения типа свертки. В случае степенной нелинейности показано, что решения могут быть найдены градиентным методом в пространствах $L_p(0,1)$ и весовых пространствах $L_p(\varrho)$.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, оператор типа свертки, потенциальный оператор, монотонный оператор.

Mathematics Subject Classification: 45G10, 47H05.

В работе [1] без ограничений на абсолютную величину параметра λ были доказаны теоремы о существовании, единственности и оценках решений в вещественных пространствах $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, для нелинейных интегральных уравнений типа свертки вида

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt = f(x)\,, \tag{1}$$

$$u(x) + \lambda \int_0^1 \varphi(|x-t|)\, F[t, u(t)]\, dt = f(x)\,, \tag{2}$$

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt\right] = f(x)\,. \tag{3}$$

В данной работе доказано, что в случае пространства $L_2(0,1)$ эти решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и при этом не требуется, чтобы параметр λ был «малым» по модулю. В отличие от [2], где рассматриваются подобные уравнения с ядрами типа потенциала на всей действительной оси, здесь, используя метод *потенциальных* монотонных операторов, построены новые последовательные приближения и существенно улучшены оценки скорости их сходимости. Более того, градиентным методом (методом наискорейшего спуска) удалось приближенно решить уравнения со степенными нелинейностями, не охватываемые результатами [2], как в $L_p(0,1)$, так и в весовых пространствах $L_p(\varrho)$.

S.N. Askhabov, A.L. Dzhabrailov, Approximate solutions of nonlinear convolution type equations on segment.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №13-01-00422-а.

Поступила 10 мая 2012 г.

Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$L_p(0,1) = L_p \ , \quad \|\cdot\|_{L_p(0,1)} = \|\cdot\|_p \ , \quad p' = \frac{p}{p-1} \ ,$$

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_0^1 u(x)\, v(x)\, dx \ , \qquad (P_{01}^{\varphi} u)\,(x) = \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt \ .$$

Определение 1. *Скажем, что функция* $\varphi \in \Omega(0,1]$, *если она непрерывна, не возрастает, выпукла вниз в промежутке* $(0,1]$ *и такова, что* $\int\limits_0^1 \varphi(x)\, dx \geq 0$.

Далее нам понадобится следующая лемма, играющая существенную роль при исследовании уравнений (1)–(3) и уравнений со степенной нелинейностью.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2$ *и* $\varphi \in L_{p'/2} \bigcap \Omega(0,1]$. *Тогда оператор свертки* P_{01}^{φ} *действует непрерывно из* L_p *в* $L_{p'}$, *потенциален и положителен, причем* $\forall u(x) \in L_p$ *выполняются неравенства*

$$\|P_{01}^{\varphi} u\|_p \leqslant 2^{2/p'} \|\varphi\|_{p'/2} \|u\|_p \,, \tag{4}$$

$$\langle P_{01}^{\varphi} u, u\rangle = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt \right) u(x)\, dx \geq 0 \,. \tag{5}$$

Доказательство. Неравенства (4) и (5) доказаны в [1]. Значит, оператор P_{01}^{φ} действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и положителен. Так как $\varphi(|x-t|) = \varphi(|t-x|)$, то оператор P_{01}^{φ} является симметрическим. Следовательно (см., например, [3] или [4], Пример 1.2), оператор P_{01}^{φ} является потенциальным, и его потенциал вычисляется по формуле: $p(u) = \frac{1}{2}\langle P_{01}^{\varphi} u, u\rangle$. $\square$

Следует отметить, что при $p = 2$ и дополнительных ограничениях (дифференцируемость и неотрицательность) на функцию $\varphi(x)$ положительность оператора P_{01}^{φ} была ранее доказана А.М. Нахушевым [5].

Приступим теперь к исследованию нелинейных уравнений (1)–(3), содержащих оператор типа свертки P_{01}^{φ}. Обозначим через $\mathbf{N}$ множество всех натуральных чисел. Всюду далее предполагается, что функция $F(x,t)$, порождающая оператор Немыцкого $Fu = F[x, u(x)]$, определена при $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти для всех x.

Далее нам понадобится следующая теорема (см. [4], с. 16, где приведено ее доказательство), являющаяся следствием более общих результатов [6].

Теорема 1 [6]. *Пусть* H *– вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением* $(\cdot,\cdot)$ *и нормой* $\|\cdot\|_H$, *оператор* A *действует из* H *в* H *и является потенциальным. Если существуют постоянные* $m > 0$ *и* $M > 0$ $(M > m)$ *такие, что для любых* $u, v \in H$ *выполняются неравенства:*

$$\|Au - Av\|_H \leqslant M \cdot \|u - v\|_H \ , \qquad (Au - Av, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_H^2 \ ,$$

то уравнение $Au = f$ *имеет единственное решение* $u^* \in H$ *при любом* $f \in H$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле* ($n \in \mathbf{N}$):

$$u_n = u_{n-1} - \frac{2}{M+m}(Au_{n-1} - f) \ , \tag{6}$$

с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{2}{M+m} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|Au_0 - f\|_H \ , \tag{7}$$

где $\alpha = (M-m)/(M+m)$, $u_0 \in H$ *– начальное приближение.*

Заметим, что оценка (7) обеспечивает более высокую скорость сходимости последовательных приближений по сравнению с оценкой (16) из [2], полученной без предположения о потенциальности оператора A.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \Omega(0,1]$ и нелинейность $F(x,t)$ почти при каждом фиксированном $x \in [0,1]$ и при любых $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям:*

1) $|F(x,t_1) - F(x,t_2)| \leqslant M \cdot |t_1 - t_2|$, *где* $M > 0$;

2) $\Big(F(x,t_1) - F(x,t_2)\Big) \cdot (t_1 - t_2) \geq m \cdot |t_1 - t_2|^2$, *где* $m > 0$.

Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_2$ уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \cdot (\lambda \cdot F u_{n-1} + P_{01}^{\varphi} u_{n-1} - f) \ , \tag{8}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1 \cdot \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \cdot \|\lambda \cdot F u_0 + P_{01}^{\varphi} u_0 - f\|_2 \ , \tag{9}$$

где $\mu_1 = 2/(M + m + 2\,\|\varphi\|_1)$, $\alpha_1 = (M - m + 2\,\|\varphi\|_1)/(M + m + 2\,\|\varphi\|_1)$, $u_0(x) \in L_2$ — начальное приближение.

Доказательство. Из условия 1) вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из L_2 в L_2 и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \ , \tag{10}$$

а из условия 2) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$(Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_2^2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \ . \tag{11}$$

Кроме того, при выполнении условия 1), оператор Немыцкого F является потенциальным, и его потенциал g вычисляется по формуле (см. [3]):

$$g(u) = g_0 + \int\limits_0^1 \left[\ \int\limits_0^{u(x)} F(x,t)\,dt \right] dx \ ,$$

где $g_0 = \mathrm{const}$.

Пусть $u, v \in L_2$ – любые функции. Запишем данное уравнение (1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = \lambda \cdot F + P_{01}^{\varphi}$. Заметим, что оператор A действует, в силу неравенств (4) и (10), непрерывно из L_2 в L_2 и является потенциальным (как сумма двух потенциальных операторов $\lambda \cdot F$ и P_{01}^{φ}). Далее, используя сначала неравенство Минковского, а затем неравенства (4) и (10), с одной стороны, имеем $\|Au - Av\|_2 \leqslant (\lambda \cdot M + 2\,\|\varphi\|_1) \cdot \|u - v\|_2$, а с другой стороны, используя неравенства (5) и (11), получаем $(Au - Av, u - v) \geq \lambda \cdot m \cdot \|u - v\|_2^2$. Следовательно, по теореме 1, уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме (8), получающейся из формулы (6), с оценкой погрешности (9), вытекающей из неравенства (7). □

Более трудными для исследования методом потенциальных монотонных операторов являются нелинейные уравнения (2) и (3). Для них последовательные приближения удается построить лишь в терминах обратного оператора F^{-1}.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \Omega(0,1]$ и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2. Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_2$ нелинейное уравнение (2) имеет единственное решение $u^* \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v_{n-1} - f) \ , \tag{12}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|u_0 + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} F u_0 - f\|_2 \ , \tag{13}$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\mu_2 = 2/(m^{-1} + m\, M^{-2} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1)$,

$$\alpha_2 = (m^{-1} - m\, M^{-2} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1)/(m^{-1} + m\, M^{-2} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1),$$

F^{-1} *оператор обратный к* F, $v_0 = F u_0$, $u_0 \in L_2$ *– начальное приближение.*

Доказательство. Так как оператор F удовлетворяет неравенствам (10) и (11), то по теореме 1.3 из [4], существует обратный оператор F^{-1} такой, что

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\|u - v\|_2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \, , \tag{14}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geq \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \, . \tag{15}$$

Заметим ([6], с. 137), что оператор F^{-1} является потенциальным, как оператор, обратный монотонному потенциальному оператору F. Запишем уравнение (2) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} F u = f \ . \tag{16}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v = f \ , \tag{17}$$

то $u^* = F^{-1}v^*$ является решением уравнения (16).

Докажем, что уравнение (17) имеет единственное решение $v^* \in L_2$. Используя неравенства (4), (5), (14) и (15), имеем

$$\|Bu - Bv\|_2 \leqslant (m^{-1} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1)\, \|u - v\|_2 \ , \quad (Bu - Bv, u - v) \geq \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \ .$$

Кроме того, оператор B является потенциальным, как сумма двух потенциальных операторов F^{-1} и $\lambda \cdot P_{01}^{\varphi}$. Значит, по теореме 1, уравнение $Bv = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (Bv_{n-1} - f) \ , \tag{18}$$

с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\|Bv_0 - f\|_2 \ , \tag{19}$$

где μ_2 и α_2 определены выше (в формулировке теоремы 3). Но тогда уравнение (16) имеет единственное решение $u^* = F^{-1}v^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме (12), получающейся из (18), с оценкой погрешности (13), получающейся из (19), с учетом равенства $Bv = F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v$ и оценки: $\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\|v_n - v^*\|_2$. □

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$ *и нелинейность* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2. Тогда при любых* $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_2$ *нелинейное уравнение (3) имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \cdot \mu_2 \cdot \left(F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_{n-1})\right) - P_{01}^{\varphi} u_{n-1}\right) \ , \tag{20}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \lambda \cdot \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_0)\right) - P_{01}^{\varphi} u_0\|_2 \ , \tag{21}$$

где $n \in \mathbf{N}$, μ_2 *и* α_2 *определены в формулировке теоремы 3,* F^{-1} *оператор, обратный к* F, $u_0 \in L_2$ *– начальное приближение.*

Доказательство. Запишем уравнение (3) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot F P_{01}^{\varphi} u = f \ . \tag{22}$$

Положим $f - u = \lambda \cdot v$. Тогда уравнение (22) примет вид: $F P_{01}^{\varphi}(f - \lambda \cdot v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого доказано в теореме 3, приходим к уравнению:

$$Bv \equiv F^{-1} v + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v = P_{01}^{\varphi} f \ . \tag{23}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения (23), то $u^* = f - \lambda \cdot v^*$ является решением уравнения (22).

Так как уравнение (23) имеет такой же вид, что и уравнение (17), то, повторяя рассуждения, приведенные в теореме 3, убеждаемся, что уравнение (23) имеет единственное решение $v^* \in L_2$, и его можно найти по схеме вида (18):

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 (B v_{n-1} - P_{01}^{\varphi} f) \ , \tag{24}$$

с оценкой погрешности вида (19):

$$\|v_n - v^*\| \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2} \|B v_0 - P_{01}^{\varphi} f\|_2 \ . \tag{25}$$

Из (24) и (25), учитывая, что $v = \lambda^{-1}(f - u)$, непосредственно получаем, соответственно, итерационную схему (20) и оценку погрешности (21). □

Теоремы 2–4 охватывают, в частности, уравнения с ядрами типа потенциала $|x - t|^{\alpha - 1}$, $0 < \alpha < 1$, и логарифмического потенциала $-\ln|x - t|$, а также соответствующие линейные уравнения и некоторые уравнения с монотонными нелинейностями (например, вида $(u(x) + 2\,u^3(x))/(1 + u^2(x))$). Однако, эти теоремы не охватывают степенные нелинейности, которые выводят за рамки пространства L_2.

Для приближенного решения уравнений со степенными нелинейностями в более широких пространствах нам понадобится следующая известная теорема. Прежде чем ее сформулировать, приведем необходимые обозначения и определение.

Пусть X – вещественное банахово пространство и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — нормы в X и X^* соответственно.

Определение 2 *Пусть $u, v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:*

равномерно монотонным, *если $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \beta(\|u - v\|)$, где β возрастающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$;*

ограниченно липшиц-непрерывным, *если $\|Au - Av\|_* \leqslant \mu(r) \cdot \|u - v\|$, где μ возрастающая на $[0, \infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|, \|v\|)$.*

Теорема 5 [6]. *Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ – хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(||u_n|| + ||Au_n - f||_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $J^* : X^* \to X$ — дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.*

Существование и единственность решения u^* в теореме 5 вытекает из теоремы Браудера-Минти (основной теоремы теории монотонных операторов [6]), а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из теоремы 4.2 ([6], с. 122) и замечания

4.13 ([6], с. 125), поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством ([6], с. 80-81). Указанный в теореме 5 способ нахождения решения u^* известен [6] как метод *наискорейшего* спуска (или *градиентный* метод).

Лемма 2. *Пусть* $2 < p < \infty$, $\varphi \in \Omega(0,1]$ *и* $b(x) \in L_{2p/(p-2)}$. *Тогда оператор*

$$(B_{01}^{\varphi}u)(x) = b(x)\int\limits_0^1 b(t)\,\varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt$$

действует непрерывно из L_p *в* $L_{p'}$, *положителен и потенциален, причем* $\forall u(x) \in L_p$ *выполняются неравенства*:

$$\|B_{01}^{\varphi}u\|_{p'} \leqslant 2\,\|b\|^2_{2p/(p-2)} \cdot \|\varphi\|_1 \cdot \|u\|_p\,, \quad \langle B_{01}^{\varphi}u, u\rangle \geq 0\,. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_p$ – произвольная функция. В силу неравенства Гельдера $\|b\cdot u\|_2 \leqslant \|b\|_{2p/(p-2)}\|u\|_p$. Поэтому, используя оценку (4), имеем $\|P_{01}^{\varphi}(b\cdot u)\|_2 \leqslant 2\,\|\varphi\|_1\|b\cdot u\|_2 \leqslant 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}\|\varphi\|_1\|u\|_p$. Так как $B_{01}^{\varphi}u = b\cdot P_{01}^{\varphi}(b\cdot u)$ и, в силу неравенства Гельдера, $\|B_{01}^{\varphi}u\|_{p'} \leqslant \|b\|_{2p/(p-2)}\|P_{01}^{\varphi}(b\cdot u)\|_2 \leqslant 2\,\|b\|^2_{2p/(p-2)}\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_p$, то оператор B_{01}^{φ} действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и потенциален, как симметрический оператор, причем справедливо первое неравенство из (26). Наконец, используя неравенство (5), имеем $\langle B_{01}^{\varphi}u, u\rangle = \langle P_{01}^{\varphi}(b\cdot u), (b\cdot u)\rangle \geq 0$, что равносильно второму неравенству из (26), т.е. оператор B_{01}^{φ} положителен. □

Теорема 6. *Пусть* $p \geq 4$ *– четное число,* $\varphi \in \Omega(0,1]$ *и* $b(x) \in L_{2p/(p-2)}$. *Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + b(x)\int\limits_0^1 b(t)\,\varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt = f(x) \tag{27}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p$ *при любом* $f \in L_{p'}$. *Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Au_n - f\|_{p'}^{2-p'} \cdot |Au_n - f|^{p'-2}\cdot(Au_n - f)\,, \tag{28}$$

где $n = 0,1,2,3,\ldots$, $u_0(x) \in L_p$ *- начальное приближение,* $Au = u^{p-1} + B_{01}^{\varphi}u$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\cdot\Big(\|u_n\|_p + \|Au_n - f\|_{p'}\Big)^p + 2\,\|b\|^2_{2p/(p-2)}\|\varphi\|_1}\right),$$

$\varepsilon > 0$ *— любое число.*

Доказательство. Запишем уравнение (27) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = u^{p-1} + B_{01}^{\varphi}u$. Очевидно, что оператор A действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и коэрцитивен, так как $\langle Au, u\rangle = \langle u^{p-1}, u\rangle + \langle B_{01}^{\varphi}u, u\rangle \geq \|u\|_p^p$ и $p \geq 4$.

Покажем теперь, что A – равномерно монотонный оператор. Используя лемму 2 и неравенство $(t^{p-1} - s^{p-1})\cdot(t-s) \geq 2^{2-p}|t-s|^p$, справедливое для всех $t, s \in (-\infty,\infty)$, имеем

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \int\limits_0^1 [u^{p-1}a(x) - v^{p-1}(x)]\cdot[u(x) - v(x)]\,dx \geq$$

$$\geq 2^{2-p}\cdot\|u-v\|_p^p = \beta(\|u-v\|_p)\,, \quad \forall u, v \in L_p\,,$$

где $\beta(s) = 2^{2-p}\cdot s^p$ – строго возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$, т.е. A – равномерно монотонный оператор.

Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение (27) имеет единственное решение $u^* \in L_p$.

Осталось доказать, что последовательность (28) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства L_p. Воспользуемся теоремой 5. Известно [3], что пространства L_p, $1 < p < \infty$, являются строго выпуклыми, и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}$ имеет вид:

$$(J^* w)(x) = \|w\|_{p'}^{2-p'} \cdot |w(x)|^{p'-2} \cdot w(x)\,. \tag{29}$$

Покажем, что оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным. Для любых $u, v \in L_p$, имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p'} + \|B_{01}^{\varphi}(u-v)\|_{p'} = I_1 + I_2\ .$$

Так как $|t^{p-1} - s^{p-1}| \leqslant \frac{p-1}{2} \cdot |t-s| \cdot (t^{p-2} + s^{p-2})\,, \quad \forall t, s \in (-\infty, \infty)\,,$ то

$$I_1 \leqslant \frac{p-1}{2} \left(\int\limits_0^1 |u(x) - v(x)|^{p'} |u^{p-2}(x) + v^{p-2}(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leqslant$$

(применяем сначала неравенство Гельдера с показателями p/p' и $p/(p-p')$, а затем ко второму сомножителю применяем неравенство Минковского)

$$\leqslant \frac{p-1}{2} \|u - v\|_p \left(\|u\|_p^{p-2} + \|v\|_p^{p-2} \right) \leqslant (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot \|u - v\|_p\ ,$$

где $r = \max\left(\|u\|_p, \|v\|_p\right)$. Таким образом, оценивая I_2 с помощью первого неравенства из (26), имеем $\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \mu(r) \cdot \|u - v\|_p\,,$ где $\mu(r) = (p-1) \cdot r^{p-2} + 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}^2 \|\varphi\|_1$ - возрастающая на $[0, \infty)$ функция. Значит, A — ограниченно липшиц-непрерывный оператор.

Далее, поскольку $Fu = u^{p-1}$ – потенциальный оператор, то, принимая во внимание лемму 2, получаем, что оператор A также является потенциальным.

Следовательно, на основании теоремы 5, последовательность (28) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства L_p. □

Введем в рассмотрение весовые пространства $L_p(\varrho)$. Пусть $\varrho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функция. Обозначим через $L_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{p,1} = \left(\int\limits_0^1 \varrho(x)\, |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Известно [7], что $L_p(\varrho)$ есть рефлексивное банахово пространство, и сопряженным с ним является пространство $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ с нормой $\|\cdot\|_{p',1-p'}$, $p' = p/(p-1)$. В случае $\varrho(x) = 1$ будем писать, как обычно, L_p и $\|\cdot\|_p$.

Рассмотрим теперь в *весовом* пространстве $L_p(\varrho)$ уравнение вида:

$$\varrho(x) \cdot u^{p-1}(x) + \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt = f(x)\,. \tag{30}$$

На вес $\varrho(x)$ накладывается следующее ограничение:

$$c(\varrho) = \left(\int\limits_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)} dx \right)^{(p-2)/(2p)} < \infty\,. \tag{31}$$

Лемма 3. *Пусть* $2 < p < \infty$, $\varphi \in \Omega(0,1]$ *и выполнено условие (31). Тогда оператор свертки* P_{01}^{φ} *действует из* $L_p(\rho)$ *в* $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и является непрерывным потенциальным положительным оператором, причем*

$$\|P_{01}^{\varphi}u\|_{p',\,1-p'} \leqslant 2\,c^2(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_{p,\,1}\,, \qquad \forall u \in L_p(\varrho)\,. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_p(\varrho)$ – произвольная функция. Так как, в силу неравенства Гельдера,

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 [\varrho(x)]^{-2/p}[\varrho(x)]^{2/p}|u(x)|^2dx\right)^{1/2} \leqslant c(\varrho)\cdot\|u\|_{p,\,1}\,, \tag{33}$$

то пространство $L_p(\varrho)$ непрерывно вложено в L_2.

Аналогично, для любого $\psi(x) \in L_2$, имеем

$$\|\psi\|_{p',\,1-p'} = \left(\int_0^1 [\varrho(x)]^{1-p'}|\psi(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'} \leqslant c(\varrho)\cdot\|\psi\|_2\,. \tag{34}$$

Из неравенств (33) и (34) вытекает, что имеют место следующие непрерывные вложения:

$$L_p(\varrho) \subset L_2 \subset L_{p'}(\varrho^{1-p'})\,. \tag{35}$$

Так как, в силу неравенства (4), $\|P_{01}^{\varphi}u\|_2 \leqslant 2\,\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_2$, то, используя оценки (33) и (34), получаем

$$\|P_{01}^{\varphi}u\|_{p',\,1-p'} \leqslant c(\varrho)\cdot\|P_{01}^{\varphi}u\|_2 \leqslant 2\,c(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_2 \leqslant 2\,c^2(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_{p,\,1}\,.$$

Значит, оператор P_{01}^{φ} действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и справедливо неравенство (32). Потенциальность и положительность оператора P_{01}^{φ} вытекают из леммы 1, поскольку имеют место вложения (35). □

Теорема 7. *Пусть* $p \geq 4$ *– четное число,* $\varphi \in \Omega(0,1]$ *и выполнено условие (31). Тогда уравнение (30) имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_p(\varrho)$ *при любом* $f(x) \in L_{p'}(\varrho^{1-p'})$. *Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n\cdot\|Bu_n - f\|_{p',\,1-p'}^{2-p'}\cdot\varrho^{1-p'}\cdot|Bu_n - f|^{p'-2}\cdot(Bu_n - f)\,, \tag{36}$$

где $u_0(x) \in L_p(\varrho)$ *— начальное приближение,* $Bu = \varrho\cdot u^{p-1} + P_{01}^{\varphi}u$,

$$\delta_n = \min\left(1,\frac{2}{\varepsilon + (p-1)\cdot\Big(\|u_n\|_{p,\,1} + \|Bu_n - f\|_{p',\,1-p'}\Big)^{p-2} + 2\,c^2(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1}\right),$$

$\varepsilon > 0$ *— любое число.*

Доказательство. Поскольку доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 6, то ограничимся приведением лишь основных его моментов. Запишем уравнение (30) в операторном виде: $Bu = f$, где $Bu = \rho\cdot u^{p-1} + P_{01}^{\varphi}u$. Так как $\varrho\cdot u^{p-1} \in L_{p'}(\varrho^{1-p'})$, $\forall u \in L_p(\varrho)$, то, используя лемму 3, получаем, что оператор B действует из $L_p(\varrho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Непосредственно проверяется, что дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ имеет вид:

$$(J^*w)(x) = \|w\|_{p',1-p'}^{2-p'}\cdot\varrho^{1-p'}(x)\cdot|w(x)|^{p'-2}\cdot w(x)\,.$$

Далее, $\forall u, v \in L_p(\varrho)$, имеем

$$\|Bu - Bv\|_{p',\,1-p'} \leqslant \|\varrho\cdot(u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p',\,1-p'} + \|P_{01}^{\varphi}(u-v)\|_{p',\,1-p'} = I_1 + I_2\,.$$

Как и при доказательстве теоремы 6, получаем

$$I_1 \leqslant \frac{p-1}{2} \left(\int_0^1 \varrho^{p'-1}(x) \Big| u(x) - v(x) \Big|^{p'} \varrho^{2-p'}(x) \Big| u^{p-2}(x) + v^{p-2}(x) \Big|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p-1}{2} \, \|u - v\|_{p,1} \left(\|u\|_{p,1}^{p-2} + \|v\|_{p,1}^{p-2} \right) \leqslant (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot \|u - v\|_{p,1} \, ,$$

где $r = \max(\|u\|_{p,1}, \|v\|_{p,1})$. Таким образом, используя для оценки I_2 лемму 3, имеем $\|Bu - Bv\|_{p',1-p'} \leqslant \mu(r) \cdot \|u - v\|_{p,1}$, где $\mu(r) = (p-1) \cdot r^{p-2} + 2\, c^2(\varrho) \, \|\varphi\|_1$ – возрастающая на $[0, \infty)$ функция. Значит, B — ограниченно липшиц-непрерывный оператор. Наконец, точно так же, как и при доказательстве теоремы 6, доказывается, что B — равномерно монотонный (с $\beta(s) = 2^{2-p} \cdot s^p$) потенциальный оператор. □

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить для нелинейных сингулярных интегральных уравнений и нелинейных уравнений Винера-Хопфа со специальными ядрами, рассмотренных в [4], [8], [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С.Н. *Нелинейные интегральные уравнения типа свертки на отрезке* // Известия вузов. Сев-Кав. регион. Естеств. науки. 2007. № 1. С. 3–5.
2. Асхабов С.Н. *Приближенное решений нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 4. 2011. С. 8–13.
3. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* М.: Наука, 1972. 416 с.
4. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки.* М.: Физматлит, 2009. 304 с.
5. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
6. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978. 336 с.
7. Хведелидзе Б.В. *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения* // Труды Тбилис. мат. ин-та АН ГрузССР. Т. 23. 1956. С. 3–158.
8. Асхабов С.Н. *Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям* // Известия вузов. Математика. N9. 1981. С. 64–66.
9. Асхабов С.Н. *Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега* // Современная математика и ее приложения. Т. 67. 2010. С. 33–48.

Султан Нажмудинович Асхабов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru

Ахмед Лечаевич Джабраилов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru