ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 83-89.

УДК 517.95

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Г. ЛОСЕВ, Е.А. МАЗЕПА

Аннотация. В данной работе исследуется асимптотическое поведение положительных решений некоторых квазилинейных эллиптических неравенств на сферически-симметричных некомпактных (модельных) римановых многообразиях. В частности, найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных решений, а также условия существования и мощность множества положительных решений изучаемых неравенств на рассматриваемых римановых многообразиях. Данные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее в работах Naito. Y. и Usami H. для евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические неравенства, теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия.

1. Введение и основные результаты

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений неравенства

$$Lu \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(u) \tag{1}$$

на модельных римановых многообразиях. В частности, найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных решений неравенства (1).

Одним из истоков указанной проблематики традиционно указывают классификационную теорию двумерных римановых поверхностей. Из теоремы об униформизации следует, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей:

1) сфере (поверхность эллиптического типа);
2) комплексной плоскости (поверхность параболического типа);
3) единичному диску, или, что то же самое, гиперболической плоскости с ее комплексно аналитической структурой (поверхность гиперболического типа).

Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического (гиперболического) типа является выполнение (не выполнение) для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной. Именно данное свойство послужило основой для распространения понятия параболичности типа на произвольные римановы многообразия. А именно, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями *параболического* типа.

За последние годы опубликован ряд работ, посвященных вопросам выполнения теорем типа Лиувилля для различных классов решений и субрешений линейных уравнений на

A.G. Losev, E.A. Mazepa, On asymptotic behavior of positive solutions of some quasilinear inequalities on model Riemannian manifolds.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-97004-р_поволжье_а).

Поступила 29 ноября 2011 г.

некомпактных римановых многообразиях. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из обзора А.А. Григорьяна (см. [1]).

В частности, точные условия выполнения теорем типа Лиувилля для решений некоторых уравнений и неравенств на сферически-симметричных, или модельных, римановых многообразиях, были получены в работах [2]–[4]. Опишем данные многообразия подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0,\infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1) множеством точек M_q является все $\mathbf{R}^n$;

2) в полярных координатах (r,θ) (где $r \in (0,\infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_q \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{2}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в точке O является гладким продолжением метрики (2).

Будем считать далее, что функция A в неравенстве (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} A \in C(0,\infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{при} \ \ p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \ \text{для} \ p > 0, \end{cases}$$

а функция $f \not\equiv 0$ такова, что

$$f \in C(0,\infty), \quad f(u) \geq 0 \ \text{при} \ u \geq 0 \ \text{и} \ f(0) = 0.$$

Нами будет использоваться также следующее предположение на функцию f:

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{существует неубывающая функция } g \in C(0,\infty) \text{ такая, что} \\ 0 < g(u) \leqslant f(u) \text{ при } u > 0 \text{ и } g(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнения подобного вида рассматривались многими авторами в евклидовых пространствах (см., например, [5]–[8]). Наиболее часто в исследованиях встречается функция $A(p)$ следующих видов:

$$A(p) = p^{m-2}, \quad m > 1; \tag{3}$$

$$A(p) = (1+p^2)^{-\frac{1}{2}}; \tag{4}$$

или, в более общем виде

$$A(p) = (1+p^2)^{-\alpha}, \quad \alpha \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5}$$

В соответствии с этим, оператор L в неравенстве (1) называется *m-лапласианом* при выборе функции A в виде (3), *оператором средней кривизны* в случае (4) и *обобщенным оператором средней кривизны* в случае (5) при $0 < \alpha < 1/2$.

Целым решением неравенства (1) на римановом многообразии M будем называть функцию $u \in C^1(M)$ такую, что $A(|\nabla u|)\nabla u \in C^1(M)$, и удовлетворяющую неравенству (1) в каждой точке $x \in M$.

В простейшем случае $A(p) \equiv 1$, проблема существования целых решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$ изучалась в ряде работ. В частности, если f — неубывающая функция, Keller J. и Osserman R. (см. [6] и [7]) показали, что неравенство $\Delta u \geq f(u)$ имеет положительные целые решения тогда и только тогда, когда

$$\int^{\infty} \left(\int^{s} f(t)dt \right)^{-\frac{1}{2}} ds = \infty.$$

Naito Y. и Usami H. в работе [5] обобщили их результат для неравенства (1) и получили критерий существования целых нетривиальных неотрицательных решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$. Целью настоящей работы является получение аналогичных результатов на классе модельных римановых многообразий. При этом естественно рассматривать оператор L в неравенстве (1) в метрике (2) многообразия M.

Сначала рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$. Введем обозначение

$$I(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r q^{n-1}(s)\, ds.$$

Заметим, что из условий на метрику модельного риманова многообразия сразу следует, что $I(0) = \lim\limits_{r\to+0} I(r) = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ *и многообразие* M_q *таково, что* $\limsup\limits_{r\to\infty} I(r) = \infty$. *Тогда если выполнено условие* (F)*, то на* M_q *не существует целых положительных решений неравенства* (1)*.*

Далее рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$. Определим непрерывную функцию $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ в виде

$$\Psi(p) = p^2 A(p) - \int\limits_0^p tA(t)dt, \qquad p \geq 0.$$

Легко показать, что Ψ строго возрастающая и $\Psi(0) = 0$. Также заметим, что при $p \geq 1$ выполнено

$$\Psi(p) + \int\limits_0^1 tA(t)dt = p^2 A(p) - \int\limits_1^p tA(t)dt \geq pA(p),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{p\to\infty} \Psi(p) = \infty$.

Таким образом, обратная к Ψ функция Φ определена на $[0,\infty)$. Ясно, что Φ строго возрастающая функция и $\lim\limits_{p\to\infty} \Phi(p) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$*, и многообразие* M_q *таково, что* $I'(r) \geq k > 0$. *Тогда если выполнено условие* (F) *и, кроме того,*

$$\int\limits^{\infty} \left(\Phi \left(k \int\limits^{s} g(t)dt \right) \right)^{-1} ds < \infty, \tag{6}$$

то на M_q *не существует целых положительных решений неравенства* (1)*.*

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$*, и многообразие* M_q *таково, что* $q'(r) \geq 0$. *Тогда если*

$$\int\limits^{\infty} \left(\Phi \left(\int\limits^{s} f(t)dt \right) \right)^{-1} ds = \infty, \tag{7}$$

то неравенство (1) *имеет континуум положительных целых решений.*

2. Радиальные решения

В начале данного параграфа сформулируем аналог принципа сравнения, полученный в работе [5], на котором основаны дальнейшие рассуждения.

Лемма 1. ([5]) *Пусть $\Omega \subset M$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а u — неотрицательное решение* (1) *в Ω и $v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega)$ — положительная функция такая, что $A(|\nabla v|)\nabla v \in C^1(\Omega)$, $Lv \leqslant g(v)$ в Ω, и $u \leqslant v$ на границе $\partial\Omega$. Тогда если выполнено условие* (F)*, то $u \leqslant v$ в Ω.*

Основой доказываемых утверждений является изучение радиально-симметричных решений $v(r)$ рассматриваемых неравенств. Несложно показать, что на модельном многообразии M_q

$$Lv(r) \equiv \mathrm{div}(A(|\nabla v(r)|)\nabla v(r)) = q^{1-n}(r)\Big(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)'.$$

Далее рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Big(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)' = q^{n-1}(r)g(v(r)), \quad r \geq 0, \tag{8}$$

где g — непрерывная положительная неубывающая на $(0,\infty)$ функция из условия (F).

Пусть $v(r)$ решение уравнения (8) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Заметим, что если $v(r)$ определена для $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, то $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Действительно, проинтегрировав равенство (8) по отрезку $[0,r], r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = q^{1-n}(r)\int\limits_0^r q^{n-1}(s)g(v(s))ds, \qquad 0 < r < R. \tag{9}$$

Следовательно, $A(|v'(r)|)v'(r) > 0$ для $0 < r < R$, откуда вытекает, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$.

Лемма 2. *Пусть условие* (F) *выполнено. Тогда, если неравенство* (1) *имеет положительное целое решение $u(r,\theta) > 0$ на M_q, то на $[0;\infty)$ существует положительное решение $v(r)$ уравнения* (8) *с условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$.*

Доказательство леммы. Предположим противное, то есть указанного в формулировке леммы решения уравнения (8) $v(r)$ не существует, но при этом существует положительное целое решение $u(r,\theta)$ неравенства (1). Из положительности решения неравенства в частности следует, что $u(O) > 0$. Пусть $a \in (0, u(O))$, а $[0;R)$ – максимальный промежуток существования решения v уравнения (8), с условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. В силу предположения, выполнено $R < \infty$. Выше мы показали, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Тогда мы имеем либо $v(r) \to \infty$ при $r \to R$, либо $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$.

В случае $v(r) \to \infty$ при $r \to R$, выберем $R_1 \in (0,R)$ так, чтобы

$$v(R_1) > \max_{\Omega} u(r,\theta), \tag{10}$$

где $\Omega \equiv B_{R_1} = \{(r,\theta) : r \in [0,R_1]\}$. Тогда $Lv = g(v)$ в Ω и $v \geq u$ на $\partial\Omega$. Следовательно, по лемме 1, $u \leqslant v$ в Ω, что противоречит условию $v(0) = a < u(O)$.

Далее рассмотрим случай, когда $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$. Если при этом найдется $R_1 \in (0;R)$ такое, что будет выполнено неравенство (10), мы получаем противоречие, аналогичное указанному выше. Пусть $v(r) \leqslant \max\limits_{\theta\in S^{n-1}} u(r,\theta)$ для всех $0 < r < R$. Выберем $R_1 \in (0;R)$ так, чтобы

$$v'(R_1) > \max_{\Omega}\left\{\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\right\}, \tag{11}$$

где $\Omega \equiv B_{R_1} = \{(r,\theta) : r \in [0,R_1]\}$. Обозначим $\delta = \max\limits_{\theta\in S^{n-1}}(u(R_1,\theta) - v(R_1)) > 0$ и пусть $w(r) = v(r) + \delta$. Тогда $w(R_1) \geq u(R_1,\theta)$ для всех $\theta \in S^{n-1}$ и $w(R_1) = u(R_1,\theta^*)$ для некоторого $\theta^* \in S^{n-1}$. Тогда $Lw \leqslant g(w)$ в области Ω, $w \geq u$ на границе $\partial\Omega$ и по лемме получаем $w \geq u$ в Ω.

Далее, учитывая условия $w(R_1) = u(R_1, \theta^*)$, $w(r) \geq u(r, \theta)$ при $(r, \theta) \in B_{R_1}$, получаем

$$v'(R_1) = w'(R_1) \leqslant \frac{\partial u}{\partial r}(R_1, \theta^*),$$

что противоречит (11). Лемма доказана.

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r, \theta) > 0$. Тогда из леммы 2 следует существование положительного решения $v(r)$ уравнения (8) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на луче $[0; \infty)$.

Так как $g(v)$ и $v(r)$ неубывающие функции, то из (9) следует, что

$$A(|v'(r)|)v'(r) \leqslant g(v(r))I(r). \tag{12}$$

Заметим, что уравнение (8) может быть представлено в виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = g(v(r)). \tag{13}$$

Объединяя (12) и (13), получаем

$$(A(|v'|)v')' \geq g(v(r))\left[1 - (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}I(r)\right] = g(v(r))I'(r). \tag{14}$$

Напомним, что $I(0) = 0$. Интегрируя неравенство (14) по отрезку $[0; r]$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) \geq \int\limits_0^r g(v(s))I'(s)\,ds \geq g(v(0))I(r). \tag{15}$$

Из условий на функцию A следует, что

$$g(v(0))I(r) \leq A(|v'(r)|)v'(r) \leqslant \lim_{p\to\infty} pA(p) < \infty, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to \infty$ и переходя в левой части неравенства к верхнему пределу, получаем противоречие с конечностью правой части. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r, \theta) > 0$. Тогда, из леммы 2 следует, что на $[0, \infty)$ существует решение $v(r)$ уравнения (8) с начальными условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Из (15) и условия теоремы 2 следует, что при $r \to \infty$ справедливо $\lim\limits_{r\to\infty} v'(r) = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = \infty$. Умножая неравенство (14) на $v' > 0$ и интегрируя по отрезку $[0; r]$, получим

$$\int\limits_0^r (A(|v'|)v')'v'\,ds \geq \int\limits_0^r g(v(s))I'(s)v'(s)ds \geq k\int\limits_0^r g(v(s))v'(s)ds = k\int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(t)dt.$$

С другой стороны, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int\limits_0^r (A(|v'|)v')'v'\,ds = \int\limits_0^r v'\,d(A(|v'|)v') = (v'(r))^2 A(|v'(r)|) - \int\limits_0^{v'(r)} A(t)t\,dt = \Psi(v'(r)).$$

Следовательно,

$$\Psi(v'(r)) \geq k\int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(t)\,dt.$$

Переходя к обратной функции Φ, из последнего неравенства получаем

$$\left(\Phi\left(k\int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(s)ds\right)\right)^{-1} \cdot v'(r) \geq 1, \quad r > 0.$$

Интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0; r]$, получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi\left(k\int\limits_{v(0)}^{s} g(t)dt\right)\right)^{-1} ds \geq r. \tag{16}$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ в (16), имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi\left(k\int\limits_{v(0)}^{s} g(t)dt\right)\right)^{-1} ds = \infty,$$

что противоречит (6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы нам достаточно показать существование положительного решения $v(r)$ уравнения

$$(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r))' = q^{n-1}(r)f(v(r)), \tag{17}$$

с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на интервале $[0; \infty)$, поскольку функция $v(r)$ является радиально-симметричным положительным целым решением неравенства (1).

Выберем $a > 0$ такое, что $f(a) > 0$, и пусть $v(r)$ — решение (17) с начальными условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. Интегрируя равенство (17) по $[0; r], \quad r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r q^{n-1}(s)f(v(s))ds, \quad 0 < r < R. \tag{18}$$

Тогда $v'(r) \geq 0$ для $0 \leqslant r < R$, так как $A(v'(r))v'(r) \geq 0$. Покажем, что решение $v(r)$ существует на $[0; \infty)$. Предположим противное, что решение $v(r)$ определено на конечном интервале $[0; R), \quad R < \infty$.

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leqslant r < R$, то $v(R-0)$ принимает значения в промежутке $(0; \infty]$. Рассмотрим случай, когда $v(R-0) < \infty$. Тогда из (18) следует, что $v'(R-0) < \infty$, и, следовательно, решение v может быть продолжено вправо за R (см. [9], стр. 58-62). Это противоречит выбору R. Следовательно, $v(R-0) = \infty$.

Представим (17) в следующем виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = f(v(r)).$$

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leqslant r < R$ и $q'(r) \geq 0$, то

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' \leqslant f(v(r)).$$

Умножая последнее неравенство на $v'(r)$ и интегрируя его по отрезку $[0; r], \quad r < R$, получим

$$\Psi(v'(r)) \leqslant \int\limits_{v(0)}^{v(r)} f(s)ds.$$

Откуда

$$\left(\Phi\left(\int\limits_{v(0)}^{v(r)} f(s)ds\right)\right)^{-1} v'(r) \leqslant 1, \quad r > 0.$$

Интегрируя еще раз по отрезку $[0;r]$, при $r < R$, имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi\left(\int\limits_{v(0)}^{s} f(t)dt\right)\right)^{-1} ds \leqslant r, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to R$, получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi\left(\int\limits_{v(0)}^{s} f(t)dt\right)\right)^{-1} ds \leqslant R < \infty,$$

что противоречит (7). Следовательно, решение v уравнения (17) с начальными данными $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$ существует на луче $[0, \infty)$. В силу произвольности выбора значения $a > 0$ получаем континуум различных положительных решений уравнения (17), и, следовательно, неравенства (1). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Grigor'yan *Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bull. Amer. Math. Soc. N 36. 1999. p. 135–249.
2. Лосев А.Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Матем. N 12. 1991. С. 15–24.
3. Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях* // Изв. вузов. Математика. N 6. 1999. С. 41–49.
4. Лосев А.Г., Федоренко Ю.С. *О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях* // Мат. Заметки. Т. 81. Вып. 6. 2007. С. 867-878.
5. Naito Y., Usami H. *Entire solutions of the inequality div* $(A(|Du|)Du) \geq f(u)$ // Math. Z. N 255. 1997. P. 167-175.
6. Keller J.B. *On solutions of* $\Delta u = f(u)$ // Commun. Pure Appl. Math. N 10. 1957. P. 503-510.
7. Osserman R. *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$ // Pack. J. Math. N 7. 1957. P. 1641-1647.
8. Kusano T., Swanson C.A. *Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations* // Journal of diff. equation. N 83. 1990. P. 379-399.
9. Ю.Н. Бибиков *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* Учебное пособие для университетов. Высшая школа. М.: 1991. 304 С.

Александр Георгиевич Лосев,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: alexander.losev@volsu.ru

Елена Алексеевна Мазепа,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: lmazepa@rambler.ru