ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 22-40.

УДК 517.94

СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ И ФОРМУЛА СЛЕДОВ

А.И. АТНАГУЛОВ, В.А. САДОВНИЧИЙ, З.Ю. ФАЗУЛЛИН

Аннотация. В работе изучаются свойства резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере S^2. Получена формула регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами, возмущённого оператором умножения на функцию из класса $W_2^1(S^2)$.

Ключевые слова: резольвента, ядро, оператор Лапласа-Бельтрами, возмущенный оператор.

Mathematics Subject Classification: 47B10, 47B15, 47A55

1. Введение

Пусть

$$H_0 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

– оператор Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере S^2. Работа посвящена исследованию спектральных свойств возмущения этого оператора $Hu = H_0u + Vu$. А именно, доказательству формулы регуляризованного следа Гельфанда-Левитана для оператора Лапласа-Бельтрами, возмущённого оператором V умножения на функцию $\nu(\omega)$, $\omega \in S^2$. Впервые формула следа для оператора Лапласа-Бельтрами, возмущённого нечётной функцией $\nu(\omega) \in C^\infty(S^2)$ была получена в 1993–1996 гг. в работах [1], [2](хотя задача была поставлена И.М. Гельфандом в 1962 г.). Отметим, что для метода, применяемого в этих работах, условия нечётности и принадлежности классу $C^\infty(S^2)$ для функции $\nu(\omega)$ являются существенными. Следующее продвижение в этой задаче было сделано в работах [3]–[5], основанных на одном способе суммирования второй поправки теории возмущений. В этих работах для любой функции (не обязательно нечётной) $\nu(\omega)$ конечной гладкости получена классическая формула следа Гельфанда-Левитана, причем в работе [5] требуется лишь $\nu(\omega) \in C^2(S^2)$.

Для дальнейшего ослабления требований на возмущения $\nu(\omega)$, как оказалось, необходимо более подробное исследование свойств ядра $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами (теорема 1), ядра $R_{0n}(\omega, \omega_0, \lambda)$ приведённой резольвенты (теорема 2). На основе этих исследований и методике работы [5] формула следа для оператора Лапласа-Бельтрами получена для возмущений $\nu(\omega)$ из класса $W_2^1(S^2)$.

Отметим, что параграфы 2 и 3 посвящены развёрнутому изложению результатов работы [6].

A.I. Atnagulov, V.A. Sadovnichy, Z.Yu. Fazullin, Properties of the resolvent of the Laplace operator on a two-dimensional sphere and a trace formula.

Работа выполнена при поддержке гранта 01201456408 Минобрнауки РФ.

Поступила 26 июня 2016 г.

2. Представление ядра $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами

Хорошо известно ([7]), что ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 (Лапласа-Бельтрами) в $L^2(S^2)$ равно

$$R_0(\omega, \omega_0, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(\cos\alpha)}{n(n+1) - \lambda}, \tag{2.1}$$

где α – угол между векторами $\omega, \omega_0 \in S^2$, $P_n(\cos\alpha)$ — полином Лежандра, а

$$P_n(\omega, \omega_0) = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\alpha)$$

– ядро ортогонального проектора P_n, проектирующего на собственное подпространство, соответствующее собственному числу $\lambda_n = n(n+1)$ оператора H_0, причем кратность λ_n равна $(2n+1)$.

С другой стороны, известно (см., например, [8, §4.3, 4.5]), что последовательность

$$f_n(\alpha) = \sqrt{n+1/2}\sqrt{\sin\alpha}\, P_n(\cos\alpha), n = 0, 1, \ldots, \tag{2.2}$$

образует ортнормированный базис из собственных функций задачи Дирихле обыкновенного дифференциального оператора

$$M f(\alpha) = -f''(\alpha) - (4\sin^2\alpha)^{-1} f(\alpha)$$

в пространстве $L_2[0, \pi]$, причем

$$M f_n(\alpha) = (n+1/2)^2 f_n(\alpha), \quad \mu_n = (n+1/2)^2.$$

Так что, согласно (2.2), ядро $G(\alpha, \alpha_0, z)$ интегрального оператора

$$G(z) = (M - z)^{-1}$$

представляется в виде:

$$G(\alpha, \alpha_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\alpha) f_n(\alpha_0)}{\mu_n - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})\sqrt{\sin\alpha \sin\alpha_0}\, P_n(\cos\alpha) P_n(\cos\alpha_0)}{(n+\frac{1}{2})^2 - z}. \tag{2.3}$$

Откуда, полагая,

$$\Gamma(\alpha, \alpha_0, z) = (\sin\alpha \sin\alpha_0)^{-\frac{1}{2}} G(\alpha, \alpha_0, z), \tag{2.4}$$

и учитывая, что $P_n(1) = 1$, получим

$$\Gamma(\alpha, 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1/2) P_n(\cos\alpha)}{(n+1/2)^2 - z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(\cos\alpha)}{n(n+1) - (z - 1/4)}. \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.1) и (2.5) между собой, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Для всех $\omega, \omega_0 \in S^2$ и $\lambda \notin \{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ представляется в виде:*

$$R_0(\omega, \omega_0, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\alpha, 0, \lambda + 1/4). \tag{2.6}$$

Таким образом, из леммы 1 и равенств (2.3)–(2.6) видно, что ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ может быть представлено посредством решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' + (4\sin^2\alpha)^{-1} u + z u = 0 \tag{2.7}$$

на интервале $(0, \pi)$.

Вначале заметим, что на промежутке $(0, \pi/2)$ справедливо равенство

$$(4\sin^2\alpha)^{-1} = (4\alpha^2)^{-1} + q(\alpha),$$

где $q(\alpha) \in C^{(2)}[0, \pi/2]$. Следовательно, линейно независимые решения уравнения (2.7) можно построить с помощью решений уравнения

$$\nu'' + (4\alpha^2)^{-1} + z\nu = 0. \tag{2.8}$$

В качестве линейно независимых решений «невозмущенного» уравнения (2.8) возьмем функции (см., например, [9, §1.8])

$$u_1^0(\alpha, z) = \sqrt{\alpha} J_0(\sqrt{z}\alpha), \quad u_2^0(\alpha, z) = \sqrt{\alpha} Y_0(\sqrt{z}\alpha)\frac{\pi}{2}, \tag{2.9}$$

где $J_0(\sqrt{z}\alpha)$ и $Y_0(\sqrt{z}\alpha)$ — функции Беселя первого и второго рода соответственно, а ветвь $\sqrt{z}$ выбираем из условия $0 \leqslant \arg\sqrt{z} < \pi$.

Для удобства изучения данной работы приведем различные представления цилиндрических функций, которыми будем часто пользоваться в дальнейшем.

Для функций $J_0(s)$ и $Y_0(s)$ воспользуемся разложениями ([8, §5.2]):

$$J_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}, \tag{2.10}$$

$$Y_0(s) = \frac{2}{\pi} J_0(s) \ln\frac{s}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k} \psi(k+1), \tag{2.11}$$

здесь

$$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}, \quad \psi(1) = -\gamma,$$

γ — постоянная Эйлера; а также асимптотическими представлениями ([8, §5.11]) при $|s| >> 1$, $|\arg s| \leqslant \pi - \delta$ ($\delta > 0$ – сколь угодно малое число):

$$J_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \left\{\gamma_1(s) \cos(s - \frac{\pi}{4}) + \gamma_2(s) \sin(s - \frac{\pi}{4})\right\} \tag{2.12}$$

$$Y_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \left\{\gamma_1(s) \sin(s - \frac{\pi}{4}) - \gamma_2(s) \cos(s - \frac{\pi}{4})\right\}, \tag{2.13}$$

где

$$\gamma_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (0, 2k)}{(2s)^{2k}}, \quad \gamma_2(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (0, 2k+1)}{(2s)^{2k+1}},$$

при этом $(\nu, 0) = 1$,

$$(\nu, m) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \cdot \ldots \cdot (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{2m} m!}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_1(s) = 1 - \frac{9}{128 s^2} + O(s^{-4}), \quad \gamma_2(s) = \frac{1}{8s} - \frac{75}{1024 s^3} + O(s^{-5}).$$

Известно, (см. [9, §1.8]), что вронскиан

$$W(u_1^0, u_2^0) = u_1^0(\alpha, z) u_2^{0\prime}(\alpha, z) - u_1^{0\prime}(\alpha, z) u_2^0(\alpha, z) \equiv 1. \tag{2.14}$$

Теперь линейно независимые решения уравнения (2.7) на промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$ построим как решения неоднородных вольтерровых уравнений

$$u_k(\alpha, z) = u_k^0(\alpha, z) + \int\limits_0^{\alpha} g(\alpha, t, z) q(t) u_k(t, z) dt, \tag{2.15}$$

где

$$g(\alpha, t, z) = u_1^0(\alpha, z) u_2^0(t, z) - u_1^0(t, z) u_2^0(\alpha, z). \tag{2.16}$$

Построенные нами на отрезке $[0, \pi/2]$ с помощью интегральных уравнений (2.15) решения $u_k(\alpha, z)$ уравнения (2.7) допускают продолжения на промежуток $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, а именно имеет место

Лемма 2. *Решения уравнений (2.7), построенные на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ как решения вольтерровых уравнений (2.15), продолжаются на промежуток $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ по формулам*

$$u_k(\alpha, z) = a_{k1}(z)u_1(\pi - \alpha, z) + a_{k2}(z)u_2(\pi - \alpha, z), \quad k = 1, 2,$$

где

$$\begin{cases} a_{11}(z) = u_1(\frac{\pi}{2}, z)u_2'(\frac{\pi}{2}, z) + u_1'(\frac{\pi}{2}, z)u_2(\frac{\pi}{2}, z), \quad a_{22}(z) = -a_{11}(z), \\ a_{12}(z) = -2u_1(\frac{\pi}{2}, z)u_1'(\frac{\pi}{2}, z), \quad a_{21}(z) = 2u_2(\frac{\pi}{2}, z)u_2'(\frac{\pi}{2}, z). \end{cases} \tag{2.17}$$

Доказательство. Легко заметить, что функции

$$\nu_k(\alpha, z) = u_k(\pi - \alpha, z), \quad \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \quad k = 1, 2,$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (2.7) на этом промежутке. Тогда продолжения $u_k(\alpha, z)$ выражаются как линейные комбинации $\nu_k(\alpha, z)$ при $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$:

$$u_k(\alpha, z) = a_{k1}(z)u_1(\pi - \alpha, z) + a_{k_2}u_2(\pi - \alpha, z), \tag{2.18}$$

где $a_{ki}(z)$ — постоянные, зависящие только от z.

При $\alpha = \pi/2$ должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} u_k(\frac{\pi}{2}, z) = a_{k1}(z)u_1(\frac{\pi}{2}, z) + a_{k2}(z)u_2(\frac{\pi}{2}, z) \\ u_k'(\frac{\pi}{2}, z) = -a_{k1}(z)u_1'(\frac{\pi}{2}, z) - a_{k2}(z)u_2'(\frac{\pi}{2}, z). \end{cases} \tag{2.19}$$

Очевидно, из соотношений (2.12)–(2.14) непосредственно следует, что

$$W(u_1, u_2) = W(u_1^0, u_2^0) = 1. \tag{2.20}$$

Решая системы (2.19) и учитывая (2.20), приходим к соотношениям (2.17). Лемма 2 доказана. □

Теперь мы готовы сформулировать основной результат данного параграфа. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ ядро $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ представляется в виде*

$$R_0(\omega, \omega_0, \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin\alpha}}[u_2(\alpha, \lambda + 1/4) - A(\lambda + 1/4)u_1(\alpha, \lambda + 1/4)], \tag{2.21}$$

где

$$A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2'(\frac{\pi}{2}, z)}{u_1'(\frac{\pi}{2}, z)} + \frac{u_2(\frac{\pi}{2}, z)}{u_1(\frac{\pi}{2}, z)}\right). \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть ядро $D(\alpha, t, z)$ равно:

$$D(\alpha, t, z) = \begin{cases} u_2(\alpha, z)u_1(t, z), \quad t \leqslant \alpha \leqslant \pi, \\ u_2(t, z)u_1(\alpha, z), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2.23}$$

Непосредственно используя (2.7) и (2.20), находим, что функция

$$\nu(\alpha, z) = \int\limits_0^{\pi} D(\alpha, t, z)h(t)dt,$$

где $h(t) \in L^2[0, \pi]$, является решением дифференциального уравнения

$$-\nu''(\alpha, z) - (4\sin^2\alpha)^{-1}\nu(\alpha, z) - z\nu(\alpha, z) = h(\alpha).$$

Тогда функция

$$u(\alpha, z) = \int_0^\pi G(\alpha, t, z)h(t)dt, \tag{2.24}$$

где $G(t, \alpha, z)$ есть ядро оператора $G(z)$ (см. (2.3)), представляется в виде

$$u(\alpha, z) = \int_0^\pi D(\alpha, t, z)h(t)dt + cu_1(\alpha, z), \tag{2.25}$$

где учтено, что $u(\alpha, z)$ должно удовлетворять условию существования конечного предела

$$\lim_{\alpha\to 0+} u(\alpha, z)(\pi - \alpha)^{-1/2}. \tag{2.26}$$

При $\alpha < \pi$, $\alpha \sim \pi$, правую часть формулы (2.25) можно представить в виде

$$u(\alpha, z) = u_2(\alpha, z)\int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt + cu_1(\alpha, z) + W(\alpha, z), \tag{2.27}$$

где

$$W(\alpha, z) = u_1(\alpha, z)\int_\alpha^\pi u_2(t, z)h(t)dt - u_2(\alpha, z)\int_\alpha^\pi u_1(t, z)h(t)dt,$$

причем легко показать, что $W(\alpha, z)$ удовлетворяет оценке

$$|W(\alpha, z)| \leqslant a_1(\pi - \alpha)(1 + |\ln(\pi - \alpha)|),$$

где $a_1 > 0$ — постоянная.

Так что $W(\alpha, z)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\alpha\to\pi-0} \frac{W(\alpha,z)}{\sqrt{\pi-\alpha}}=0$. Отсюда следует, что сумма первых двух слагаемых в правой части (2.27) должна удовлетворять условию (2.26). Согласно (2.18), эту сумму легко представить в виде

$$\begin{aligned} c[a_{11}(z)u_1(\pi - \alpha, z) + a_{12}(z)u_2(\pi - \alpha, z)] + \\ + \int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt[a_{21}(z)u_1(\pi - \alpha, z) + a_{22}(z)u_2(\pi - \alpha, z)] = \\ = [ca_{11}(z) + a_{21}(z)\int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt]u_1(\pi - \alpha, z) + \\ + [ca_{12}(z) + a_{22}(z)\int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt]u_2(\pi - \alpha, z). \end{aligned}$$

Так как по определению $u_1(\pi - \alpha, z)$ удовлетворяет условию (2.26) и, из-за наличия логарифмической особенности,

$$\lim_{\alpha\to\pi-0} \frac{u_2(\pi - \alpha, z)}{\sqrt{\pi - \alpha}} = \infty,$$

то коэффициент при $u_2(\pi - \alpha, z)$ должен обращаться в нуль:

$$ca_{12}(z) + a_{22}(z)\int_0^\pi u_1(t, z)h(t)dt = 0.$$

Итак, из (2.23), (2.24), (2.25) следует, что

$$G(\alpha, t, z) = D(\alpha, t, z) - \frac{a_{22}(z)}{a_{12}(z)} u_1(\alpha, z) u_1(t, z),$$

где, согласно (2.17),

$$A(z) = \frac{a_{22}(z)}{a_{12}(z)} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_2'(\frac{\pi}{2}, z)}{u_1'(\frac{\pi}{2}, z)} + \frac{u_2(\frac{\pi}{2}, z)}{u_1(\frac{\pi}{2}, z)}\right].$$

Отсюда, используя (2.4), (2.5) и соотношения

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{u_1(\alpha, z)}{\sqrt{\alpha}} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{u_1^0(\alpha, z)}{\sqrt{\alpha}} = 1,$$

приходим к утверждению теоремы. □

3. Представление ядра $R_{0n}(\omega, \omega_0, \lambda)$ приведенной резольвенты

Представление ядра $R_0(\omega, \omega_0, \lambda)$ в виде (2.21) позволяет вычислить ядро приведенной резольвенты оператора H_0

$$R_{0n}(\omega, \omega_0, \lambda_n) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \neq n} \frac{(2m+1) P_m(\cos \alpha)}{m(m+1) - n(n+1)}$$

в терминах функций $u_k(\alpha, z)$, а также их производных по переменной z

$$\varphi_k(\alpha, z) = \frac{\partial}{\partial z} u_k(\alpha, z), \quad \psi_k(\alpha, z) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_k(\alpha, z), \quad k = 1, 2,$$

в точке $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Поскольку, согласно теореме 1, спектр оператора H_0 совпадает с полюсами функции $A(\lambda + \frac{1}{4})$ ($A(z)$ см. формулу (2.22)), то есть с нулями функций $u_1(\frac{\pi}{2}, \lambda + \frac{1}{4})$ и $u_1'(\frac{\pi}{2}, \lambda + \frac{1}{4})$, причем нетрудно убедиться (см. [8, с.74–79]), что

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n + \frac{1}{4}\right) = 0, \quad n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$

$$u_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n + \frac{1}{4}\right) = 0, \quad n = 2k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

Пусть также

$$\varphi_k^0(\alpha, z) = \frac{\partial}{\partial z} u_k^0(\alpha, z), \quad \psi_k^0(\alpha, z) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_k^0(\alpha, z), \quad k = 1, 2,$$

тогда из (2.15), (2.16) непосредственно следует, что функции $\varphi_k(\alpha, z)$ и $\psi_k(\alpha, z)$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ являются решениями вольтерровых уравнений, а именно справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для всех $k = 1, 2$ и $z \neq 0$ в банаховом пространстве $C[0, \frac{\pi}{2}]$ существуют производные*

$$\lim_{h \to 0} \frac{u_k(\alpha, z+h) - u_k(\alpha, z)}{h} = \varphi_k(\alpha, z),$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi_k(\alpha, z+h) - \varphi_k(\alpha, z)}{h} = \psi_k(\alpha, z),$$

причем $\varphi_k(\alpha, z)$ есть решение вольтеррова уравнения

$$\varphi_k(\alpha, z) = \varphi_k^0(\alpha, z) + \int_0^\alpha g_1(\alpha, t, z) q(t) u_k(t, z) dt + \int_0^\alpha g(\alpha, t, z) q(t) \varphi_k(t, z) dt, \tag{3.3}$$

где

$$g_1(\alpha,t,z)=\varphi_1^0(\alpha,z)u_2^0(t,z)-\varphi_2^0(\alpha,z)u_1^0(t,z)+u_1^0(\alpha,z)\varphi_2^0(t,z)-u_2^0(\alpha,z)\varphi_1^0(t,z) \tag{3.4}$$

и

$$\psi_k(\alpha,z)=\psi_k^0(\alpha,z)+\int_0^\alpha g_2(\alpha,t,z)q(t)u_k(t,z)dt+2\int_0^\alpha g_1(\alpha,t,z)q(t)\varphi_k(t,z)dt+ \\ +\int_0^\alpha g(\alpha,t,z)q(t)\psi_k(t,z)dt, \tag{3.5}$$

где

$$g_2(\alpha,t,z)=\frac{\partial}{\partial z}g_1(\alpha,t,z)=\psi_1^0(\alpha,z)u_2^0(t,z)-\psi_2^0(\alpha,z)u_1^0(t,z)+u_1^0(\alpha,z)\psi_2^0(t,z)- \\ -u_2^0(\alpha,z)\psi_1^0(t,z)+2\left(\varphi_1^0(\alpha,z)\varphi_2^0(t,z)-\varphi_2^0(\alpha,z)\varphi_1^0(t,z)\right).$$

В дальнейшем для представления ядра приведенной резольвенты $R_{0n}(\omega,\omega_0,\lambda_n)$ понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ дважды дифференцируемы в окрестности $\lambda=\lambda_n$, причем $g(\lambda_n)=0,\quad g'(\lambda_n)\neq 0$, тогда*

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=\frac{f(\lambda_n)}{g'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}+\left[\frac{f'(\lambda_n)}{g'(\lambda_n)}-\frac{f(\lambda_n)g''(\lambda_n)}{g'^2(\lambda_n)}\right]+o(1).$$

Доказательство. Согласно условию леммы справедлива формула Тейлора

$$g(\lambda)=g'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)+\frac{g''(\lambda_n)}{2}(\lambda-\lambda_n)^2+o((\lambda-\lambda_n)^2).$$

Откуда имеем

$$\frac{1}{g(\lambda)}=\frac{1}{g'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}\left[1+\frac{g''(\lambda_n)}{2g'(\lambda_n)}(\lambda-\lambda_n)+o((\lambda-\lambda_n))\right]^{-1}= \\ =\frac{1}{g'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}\left[1-\frac{g''(\lambda_n)}{2g'(\lambda_n)}(\lambda-\lambda_n)+o((\lambda-\lambda_n))\right]= \\ =\frac{1}{g'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}-\frac{g''(\lambda_n)}{2g'^2(\lambda_n)}+o(1).$$

Поскольку из условия леммы следует, что

$$f(\lambda)=f(\lambda_n)+f'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)+\frac{f''(\lambda_n)}{2}(\lambda-\lambda_n)^2+o((\lambda-\lambda_n)^2),$$

то, перемножая между собой две последние формулы, получим, как раз, формулу для дроби из утверждения леммы. Тем самым, лемма доказана. □

Поскольку, в силу теоремы 1, полюса ядра $R_0(\omega,\omega_0,\lambda)$ совпадают с нулями функций $u_1(\frac{\pi}{2},z)$, $u_1'(\frac{\pi}{2},z)$, где $z=\lambda+\frac14$, согласно соотношениям (3.1) и (3.2), рассмотрим отдельно случаи $n=2k$ и $n=2k+1$, $k=0,1,\ldots$

Итак, пусть $n=2k+1$, тогда, согласно (2.21), (2.22) обозначив

$$f(\alpha,\lambda)=u_2(\frac{\pi}{2},\lambda+\frac14)u_1(\alpha,\lambda+\frac14),\quad g(\lambda)=4\pi u_1(\frac{\pi}{2},\lambda+\frac14),$$

в силу леммы 4 имеем

$$\frac{f(\alpha,\lambda)}{g(\lambda)} = -\frac{u_2(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)u_1(\alpha,\lambda_n+\frac14)}{4\pi\varphi_1(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)(\lambda-\lambda_n)} + \\ + \frac{\varphi_2(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)u_1(\alpha,\lambda_n+\frac14)+u_2(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)\varphi_1(\alpha,\lambda_n+\frac14)}{4\pi\varphi_1(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)} - \\ - \frac{\psi_1(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)u_2(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)u_1(\alpha,\lambda_n+\frac14)}{8\pi\varphi_1^2(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)} + o(1). \quad (3.6)$$

Отсюда, согласно соотношениям (2.1), (2.4), (2.5)

$$P_n(\omega,\omega_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{u_2\left(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14\right)u_1\left(\alpha,\lambda_n+\frac14\right)}{\sqrt{\sin\alpha}\varphi_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14\right)} = \frac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\alpha). \quad (3.7)$$

Так как

$$P_n(\omega,\omega) = \frac{2n+1}{4\pi}, \quad \lim_{\alpha\to+0}\frac{u_1(\alpha,\lambda_n+\frac14)}{\sqrt{\alpha}} = 1,$$

то при $n=2k+1$

$$\frac{u_2(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)}{\varphi_1(\frac{\pi}{2},\lambda_n+\frac14)} = 2n+1 \quad (3.8)$$

Замечание 1. Аналогично исследуется случай $n=2k$.

Таким образом, из теоремы 1 и соотношений (3.6)–(3.8), учитывая замечание 1 заключаем, что справедлива

Теорема 2. *Пусть $z_n=\lambda_n+\frac14$. Ядра*

$$P_n(\omega,\omega_0) = \frac{(2n+1)P_n(\cos\alpha)}{4\pi} \quad \text{и} \quad R_{0n}(\omega,\omega_0,\lambda_n)$$

представляются в виде

$$P_n(\omega,\omega_0) = \frac{(2n+1)u_1(\alpha,z_n)}{4\pi\sqrt{\sin\alpha}}$$

и

$$R_{0n}(\omega,\omega_0,\lambda_n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin\alpha}}\left[u_2(\alpha,z_n) - \frac{2n+1}{2}\varphi_1(\alpha,z_n) - a_nu_1(\alpha,z_n)\right],$$

где при $n=2k+1$

$$a_n = \frac{u_2'(\frac{\pi}{2},z_n)}{2u_1'(\frac{\pi}{2},z_n))} + \frac{(2n+1)\varphi_2(\frac{\pi}{2},z_n))}{2u_2(\frac{\pi}{2},z_n))} - \frac{(2n+1)^2\psi_1(\frac{\pi}{2},z_n))}{4u_2(\frac{\pi}{2},z_n))},$$

а при $n=2k$

$$a_n = \frac{u_2(\frac{\pi}{2},z_n)}{2u_1(\frac{\pi}{2},z_n))} + \frac{(2n+1)\varphi_2'(\frac{\pi}{2},z_n))}{2u_2'(\frac{\pi}{2},z_n))} - \frac{(2n+1)^2\psi_1'(\frac{\pi}{2},z_n))}{4u_2'(\frac{\pi}{2},z_n))}.$$

При вычислении формулы следов для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами по методике работы [5] ключевым моментом является асимптотика второй поправки теории возмущений

$$\alpha_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi g(\alpha)(2n+1)P_n(\cos\alpha)R_{0n}(\omega,\omega_0,\lambda_n)\sin\alpha d\alpha$$

(определение функции $g(\alpha)$ см. [5, с. 435-436]), причем

$$g'(0) = g'(\pi) = 0. \quad (3.9)$$

Следовательно, согласно представлению функций $P_n(\omega,\omega_0)$ и $R_{0n}(\omega,\omega_0,\lambda_n)$ в теореме 2, возникает необходимость изучения асимптотического поведения функций $u_k(\alpha,z)$, $\varphi_k(\alpha,z)$, $\psi_k(\alpha,z)$ и их производных по переменной α, а также чисел a_n при $n\to\infty$. С этой целью докажем ряд утверждений.

Лемма 5. *Существуют постоянные $c_0>0$ и $c_1>0$, не зависящие от z и α, такие, что для всех $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\quad z>0$, $\quad k=1,2$*

$$u_k(\alpha,z)=u_k^0(\alpha,z)+\omega_k(\alpha,z). \tag{3.10}$$

Причем

$$|u_k^0(\alpha,z)|\leqslant c_0 z^{-1/4}, \tag{3.11}$$

$$|\omega_k(\alpha,z)|\leqslant c_1 z^{-3/4}\alpha. \tag{3.12}$$

Доказательство. Поскольку $\sup\limits_{t\geq 0}|\sqrt{t}Y_0(t)|<\infty$ и $\sup\limits_{t\geq 0}|\sqrt{t}J_0(t)|<\infty$ (см.[9, с.172]), неравенства (3.11) являются следствием этих соотношений. Равенство (3.10) следует из (2.15), где

$$\omega_k(\alpha,z)=\int\limits_0^{\alpha} g(\alpha,t,z)q(t)u_k(t,z)dt. \tag{3.13}$$

Так как, согласно (3.11) и (2.16), при $z>0$ будет

$$|g(\alpha,t,z)|<c_0^2 z^{-1/2}, \tag{3.14}$$

то в уравнении (2.15) норма интегрального оператора оценивается сверху числом

$$2c_0^2 z^{-1/2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt.$$

Следовательно, из уравнения (2.15) вытекает оценка

$$||u_k(z)||=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}}|u_k(\alpha,z)|\leqslant c_0^2 z^{-1/4}+2c_0^2 z^{-1/2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt||u_k(z)||. \tag{3.15}$$

Откуда следует, что $\sup\limits_{z>0} z^{\frac14}||u_k(z)||<\infty$. Теперь оценка (3.12) следует из (3.13)–(3.15). $\square$

Далее начнем изучение функций

$$\varphi_k^0(\alpha,z)=\frac{\partial}{\partial z}u_k^0(\alpha,z),\quad \psi_k^0(\alpha,z)=\frac{\partial}{\partial z}\varphi_k^0(\alpha,z),\quad k=1,2,$$

и их производных по переменной α. При этом мы используем обычные обозначения для производных по переменной α:

$$u_k^{0\prime}(\alpha,z)=\frac{\partial}{\partial\alpha}u_k^0(\alpha,z),\quad u_k'(\alpha,z)=\frac{\partial}{\partial\alpha}u_k(\alpha,z)$$

$$\varphi_k^{0\prime}(\alpha,z)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_k^0(\alpha,z),\quad \varphi_k'(\alpha,z)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_k(\alpha,z).$$

Имеет место следующая

Лемма 6. *Для всех $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $z>0$*

$$\varphi_k^0(\alpha,z)=\frac{\alpha}{2z}u_k^{0\prime}(\alpha,z)-\frac{1}{4z}u_k^0(\alpha,z),\quad k=1,2. \tag{3.16}$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_1^0(\alpha, z) = \frac{\alpha^{3/2}}{2\sqrt{z}} J_0'(\sqrt{z}\alpha), \quad \varphi_2^0(\alpha, z) = \frac{\alpha^{3/2}}{2\sqrt{z}} Y_0'(\sqrt{z}\alpha). \tag{3.17}$$

Далее, для производных по α

$$u_1^0{}'(\alpha, z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_0(\sqrt{z}\alpha) + \sqrt{z\alpha} J_0'(\sqrt{z}\alpha), \tag{3.18}$$

$$u_2^0{}'(\alpha, z) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} Y_0(\sqrt{z}\alpha) + \sqrt{z\alpha} Y_0'(\sqrt{z}\alpha), \tag{3.19}$$

откуда следует, что

$$J_0'(\sqrt{z}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{z\alpha}} u_1^0{}'(\alpha, z) - \frac{1}{2\sqrt{z}\alpha^{3/2}} u_1^0(\alpha, z),$$

$$Y_0'(\sqrt{z}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{z\alpha}} u_2^0{}'(\alpha, z) - \frac{1}{2\sqrt{z}\alpha^{3/2}} u_2^0(\alpha, z).$$

Теперь из (3.17), (3.18) и (3.19) мы получим (3.16). Тем самым, лемма доказана. □

Лемма 7. *Для всех вещественных* $z > 0$

$$\max_{0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}} |\varphi_k^0(\alpha, z)| \leqslant c_0 |z|^{-3/4}, \quad k = 1, 2, \tag{3.20}$$

где $c_0 > 0$ *— постоянная, не зависящая от* z.

Доказательство. Согласно (3.11), второе слагаемое в (3.16) допускает оценку вида $O(|z|^{-5/4})$, равномерную относительно $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, а согласно (3.18), (3.19),

$$\frac{\alpha}{2} u_1^0{}'(\alpha, z) = \frac{1}{2z} u_1^0(\alpha, z) + \frac{\alpha}{z^{3/4}} \left[\sqrt{\sqrt{z}\alpha}\, J_0'(\sqrt{z}\alpha)\right],$$

$$\frac{\alpha}{2} u_2^0{}'(\alpha, z) = \frac{1}{2z} u_2^0(\alpha, z) + \frac{\alpha}{z^{3/4}} \left[\sqrt{\sqrt{z}\alpha}\, Y_0'(\sqrt{z}\alpha)\right].$$

Для производных функций $J_0(s)$ и $Y_0(s)$ из равенств (2.10)–(2.13) имеем:

$$J_0'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k-1}, \tag{3.21}$$

$$Y_0'(s) = \frac{2}{\pi s} J_0(s) + \frac{2}{\pi} J_0'(s) \ln\frac{s}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k-1} \psi(k+1), \tag{3.22}$$

а при $s >> 1$

$$\begin{aligned} J_0'(s) = -\frac{1}{2s} J_0(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (0, 2k)(2s)^{-2k} + O(s^{-2n-2})\right] - \\ - \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \left[4 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (0, 2k) k (2s)^{-2k-3} + O(s^{-2n-3})\right] - \\ - \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (0, 2k+1)(2s)^{-2k-1} + O(s^{-2n-3})\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \times \\ \times \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \left[2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (0, 2k+1)(2k+1)(2s)^{-2k-2} + O(s^{-2n-4})\right], \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$
\begin{gathered}
Y_0'(s) = -\frac{1}{2s}Y_0(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\sin\left(s-\frac{\pi}{4}\right)\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(0,2k+1)(2s)^{-2k-1}+O(s^{-2n-3})\right]-\right. \\
\left.-\left[4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(0,2k)k(2s)^{-2k-1}+O(s^{-2n-3})\right]\right\}+\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\cos\left(s-\frac{\pi}{4}\right)\times \\
\times\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(0,2k)(2s)^{-2k}+O(s^{-2n-2})\right]-\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\cos\left(s-\frac{\pi}{4}\right) \\
\left[2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(0,2k+1)(2k+1)(2s)^{-2k-2}+O(s^{-2n-4})\right]. \quad (3.24)
\end{gathered}
$$

Пусть N — достаточно большое фиксированное число. Тогда из (3.21), (3.22) находим, что при $|s| \leqslant N$ справедливы оценки

$$
|J_0'(s)| \leqslant c_1 s, \quad |Y_0'(s)| \leqslant \frac{c_2}{s} + c_3 s|\ln s|, \tag{3.25}
$$

где c_k, $k = 1,2,3$ — некоторые положительные постоянные.

Тогда равенства (3.16) и оценки (3.25) приводят нас к следующим неравенствам: при $\alpha\sqrt{z} \leqslant N$.

$$
|\varphi_1^0(\alpha,z)| \leqslant \frac{c_1\sqrt{z}\alpha^{5/2}}{2\sqrt{z}} \leqslant \frac{c_1 N^{5/2}}{z^{5/4}},
$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2^0(\alpha,z)| \leqslant \frac{c_2\alpha^{3/2}}{2\sqrt{z}\sqrt{z}\alpha} + \frac{c_3|\ln\sqrt{z}\alpha|\sqrt{z}\alpha\alpha^{3/2}}{2\sqrt{z}} = \\
= \frac{c_2\sqrt{\alpha}}{2z} + \frac{c_3(\sqrt{z}\alpha)^{5/2}|\ln\sqrt{z}\alpha|}{2z^{5/4}} \leqslant \frac{c_3c_4}{2z^{5/4}} + \frac{c_2\sqrt{\alpha}}{2z},
\end{aligned}
$$

где $c_4 = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant N} t^{5/2}|\ln t|$.

Если $\alpha\sqrt{z} > N$, то для оценки $J_0'(\sqrt{z}\alpha)$ и $Y_0'(\sqrt{z}\alpha)$ мы используем равенства (3.23) и (3.24), из которых непосредственно видно, что при $\alpha\sqrt{z} > N$ выполнено (3.20). Лемма 7 доказана. □

Лемма 8. *При $k = 1,2$ для всех $\alpha > 0$ и $z > 0$*

$$
\begin{aligned}
\psi_k^0(\alpha,z) = \frac{\partial}{\partial z}\varphi_k^0(\alpha,z) = -\frac{1}{z}\varphi_k^0(\alpha,z) - \frac{\alpha^2}{4z}u_k^0(\alpha,z) = \\
= \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{\alpha^2}{4z}\right)u_k^0(\alpha,z) - \frac{\alpha}{4z^2}u_k^{0\prime}(\alpha,z). \quad (3.26)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Согласно (3.17) имеем:

$$
\psi_1^0(\alpha,z) = -\frac{\alpha^{3/2}}{4z^{3/2}}J_0'(\sqrt{z}\alpha) + \frac{\alpha^{5/2}}{4z}J_0''(\sqrt{z}\alpha),
$$

поскольку $J_0(s)$ удовлетворяет уравнению

$$
J_0''(s) + \frac{1}{s}J_0'(s) + J_0(s) = 0, \tag{3.27}
$$

следовательно, используя (3.16), получим

$$\psi_1^0(\alpha,z) = -\frac{\alpha^{3/2}}{4z^{3/2}}J_0'(\sqrt{z}\alpha) - \frac{\alpha^{5/2}}{4z}\left[\frac{1}{\sqrt{z}\alpha}J_0'(\sqrt{z}\alpha) + J_0(\sqrt{z}\alpha)\right] =$$
$$= -\frac{\alpha^{3/2}}{2z^{3/2}}J_0'(\sqrt{z}\alpha) - \frac{\alpha^{5/2}}{4z}J_0(\sqrt{z}\alpha) = -\frac{1}{4z}\varphi_1^0(\alpha,z) - \frac{\alpha^2}{4z}u_1^0(\alpha,z) =$$
$$= -\frac{\alpha}{2z^2}u_1^0{}'(\alpha,z) + \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{\alpha^2}{4z}\right)u_1^0(\alpha,z).$$

Аналогичные выкладки верны также для $\psi_2^0(\alpha,z)$. Таким образом, лемма 8 доказана. $\square$

Лемма 9. *При $k=1,2$ для всех $\alpha>0$ и $z>0$*

$$\varphi_k^0{}'(\alpha,z) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_k^0(\alpha,z) = -\frac{1}{4z}u_k^0{}'(\alpha,z) - \left(\frac{1}{8\alpha z} + \frac{\alpha}{2}\right)u_k^0(\alpha,z).$$

Доказательство. В (3.17) применим дифференцирование по переменной α. В результате, используя (3.16) и (3.27), получим:

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1^0(\alpha,z) = \frac{3\alpha^{1/2}}{4\sqrt{z}}J_0'(\sqrt{z}\alpha) + \frac{\alpha^{3/2}}{2}J_0''(\sqrt{z}\alpha) =$$
$$= \frac{3\alpha^{1/2}}{4\sqrt{z}}J_0'(\sqrt{z}\alpha) - \frac{\alpha^{3/2}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{z}\alpha}J_0'(\sqrt{z}\alpha) + J_0(\sqrt{z}\alpha)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\varphi_1^0(\alpha,z) - \frac{\alpha}{2}u_1^0(\alpha,z) =$$
$$= \frac{u_1^0{}'(\alpha,z)}{4z} - \left(\frac{1}{8\alpha z} + \frac{\alpha}{2}\right)u_1^0(\alpha,z).$$

Аналогичные соотношения верны также для $\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_2^0(\alpha,z)$. Лемма 9 доказана. $\square$

Совершенно аналогично, используя (3.26), покажем, что имеет место

Лемма 10. *При $k=1,2$ для всех $\alpha>0$ и $z>0$*

$$\psi_k^0{}'(\alpha,z) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\psi_k^0(\alpha,z) = \left(\frac{1}{16\alpha z^2} - \frac{\alpha}{4z}\right)u_k^0(\alpha,z) - \frac{\alpha^2}{4z}u_k^0{}'(\alpha,z).$$

Теперь асимптотическое поведение функций $\varphi_k(\alpha,z)$ и $\psi_k(\alpha,z)$ и их производных легко изучить, используя эти леммы и уравнения (3.3), (3.5), соответственно.

4. Оценки, необходимые для вычисления асимптотики приведенной резольвенты

На основании формул (2.12), (2.13) и определений функций $u_k^0(\alpha,z)$, $\quad k=1,2$ (см. (2.9) при $\alpha\sqrt{z} > N >> 1$ имеем

$$u_1^0(\alpha,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{-1/4}\left\{\gamma_1(\sqrt{z}\alpha)\cos(\sqrt{z}\alpha - \frac{\pi}{4}) + \gamma_2(\sqrt{z}\alpha)\sin(\sqrt{z}\alpha - \frac{\pi}{4})\right\} \tag{4.1}$$

$$u_2^0(\alpha,z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}z^{-1/4}\left\{\gamma_1(\sqrt{z}\alpha)\sin(\sqrt{z}\alpha - \frac{\pi}{4}) - \gamma_2(\sqrt{z}\alpha)\cos(\sqrt{z}\alpha - \frac{\pi}{4})\right\} \tag{4.2}$$

$$\left(u_1^0\right)^2(\alpha,z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}}\{[\gamma_1^2(\sqrt{z}\alpha) + \gamma_2^2(\sqrt{z}\alpha)] + [\gamma_1^2 - \gamma_2^2]\sin 2(\sqrt{z}\alpha) -$$
$$- 2\gamma_1(\sqrt{z}\alpha)\gamma_2(\sqrt{z}\alpha)\cos 2(\sqrt{z}\alpha)\} \tag{4.3}$$

$$\left(u_2^0\right)^2(\alpha,z)=\frac{\pi}{4\sqrt{z}}\{[\gamma_1^2(\sqrt{z}\alpha)+\gamma_2^2(\sqrt{z}\alpha)]-[\gamma_1^2-\gamma_2^2]\sin 2(\sqrt{z}\alpha)+$$
$$+2\gamma_1(\sqrt{z}\alpha)\gamma_2(\sqrt{z}\alpha)\cos 2(\sqrt{z}\alpha\} \quad (4.4)$$

$$u_1^0(\alpha,z)\overset{0}{u}_2(\alpha,z)=-\frac{1}{2\sqrt{z}}\{[\gamma_1^2(\sqrt{z}\alpha)-\gamma_2^2(\sqrt{z}\alpha)]\cos 2(\sqrt{z}\alpha)+$$
$$+2\gamma_1(\sqrt{z}\alpha)\gamma_2(\sqrt{z}\alpha)\sin 2(\sqrt{z}\alpha)\} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2=1-\frac{1}{8t^2}+O(t^{-4}),\quad \gamma_1^2-\gamma_2^2=1-\frac{5}{32t^2}+O(t^{-4}),\quad \gamma_1\gamma_2=\frac{1}{8t}+O(t^{-3}).$$

Так как нам нужны значения функций $u_k(\alpha,z)$ и их производных в точке $\alpha=\frac{\pi}{2}$, согласно формулам (2.15), (2.16), то нам потребуются оценки функций

$$f_1(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)u_1(t,z)dt,\quad f_2(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_1^0(t,z)q(t)u_1(t,z)dt, \quad (4.6)$$

$$f_3(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)u_2(t,z)dt,\quad f_4(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)u_2(t,z)dt. \quad (4.7)$$

Используя (4.6), (4.7) функции $f_k(\alpha,z)$, согласно (3.10), представим в виде:

$$f_1(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)u_1^0(t,z)dt+F_1(\alpha,z), \quad (4.8)$$

$$F_1(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)w_1(t,z)dt \quad (4.9)$$

$$f_2(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha \left(u_1^0\right)^2(t,z)q(t)dt+F_2(\alpha,z), \quad (4.10)$$

$$F_2(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_1^0(t,z)q(t)w_1(t,z)dt \quad (4.11)$$

$$f_3(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)u_1^0(t,z)dt+F_3(\alpha,z), \quad (4.12)$$

$$F_3(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_1^2(t,z)q(t)w_2(t,z)dt \quad (4.13)$$

$$f_4(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha \left(u_2^0\right)^2(t,z)q(t)dt+F_4(\alpha,z), \quad (4.14)$$

$$F_4(\alpha,z)=\int\limits_0^\alpha u_2^0(t,z)q(t)w_2(t,z)dt. \quad (4.15)$$

Лемма 11. *Для всех* $\alpha \in [0;\pi/2]$ *и* $z > 0$ *справедлива оценка*

$$|F_k(\alpha, z)| \leqslant \frac{c}{z}\alpha^2, \quad c > 0, \quad k = 1,2,3,4.$$

Доказательство. Действительно, из определения функций F_k и оценок (3.11), (3.12) имеем

$$|F_k(\alpha, z)| \leqslant \frac{c}{z}\int\limits_0^\alpha t dt,$$

откуда вытекает доказательство леммы. □

Лемма 12. *Пусть* $z_n >> 1$*, тогда*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u_i^0(t, z_n)q(t)u_j(t, z_n)dt = O(z_n^{-1}), \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u_1^0(t, z_n)q(t)u_1(t, z_n)dt = \frac{1}{2\pi^2\sqrt{z_n}} + O\left(\frac{1}{z_n}\right),$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u_2^0(t, z_n)q(t)u_2(t, z_n)dt = \frac{1}{8\sqrt{z_n}} + O\left(\frac{1}{z_n}\right).$$

Доказательство. Пусть N — достаточно большое фиксированное число, тогда при $t\sqrt{z_n} \leqslant N$, поскольку $J_0(s) \approx 1$, $s \to 0$, в силу разложений (2.10), (2.11) имеем, что

$$u_1^0(t, z_n)| \leqslant c_1\sqrt{t}, \quad |u_2^0(t, z_n)| \leqslant c_2\frac{t^{\frac{1}{2}-\delta}}{z_n^{\frac{\delta}{2}}} \quad |u_1^0(t, z_n)u_2^0(t, z_n)| \leqslant c_3\frac{t^{1-\delta}}{z_n^{\frac{\delta}{2}}}, \tag{4.16}$$

где $0 < c_i$, $i = 1,2,3$ — постоянные, δ — достаточно малое положительное число. Следовательно,

$$\left|\int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z_n}}} \left(u_2^0\right)^2(t, z_n)q(t)dt\right| < \frac{c}{z^\delta}\int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z}}} t^{1-2\delta}dt = \frac{c}{(2-2\delta)z^\delta}\left(\frac{N}{\sqrt{z}_n}\right)^{2-2\delta} = O\left(\frac{1}{z_n}\right). \tag{4.17}$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z_n}}} \left(u_1^0\right)^2(t, z_n)q(t)dt = O\left(\frac{1}{z_n}\right), \quad \int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z_n}}} u_1^0(t, z_n)u_2^0(t, z_n)q(t)dt = O\left(\frac{1}{z_n}\right). \tag{4.18}$$

Теперь при $t\sqrt{z_n} > N >> 1$ для анализа интегралов

$$\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} u_i^0(t, z_n)u_j^0(t, z_n)q(t)dt$$

воспользуемся асимптотическими формулами (4.1)–(4.5). Итак,

$$\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} u_1^0(t,z_n)u_2^0(t,z_n)q(t)dt = -\frac{1}{2\sqrt{z_n}}\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\sqrt{z_n}t\left[1+O\left(\frac{1}{z_nt^2}\right)\right]q(t)dt =$$

$$= -\frac{q(t)}{4z_n}\sin 2\sqrt{z_n}\left[1+O\left(\frac{1}{z_nt^2}\right)\right]\Bigg|_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4z_n}\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\sqrt{z_n}tO\left(\frac{1}{z_nt^3}\right)q(t)dt +$$

$$+O\left(\frac{1}{z_n}\right) = O\left(\frac{1}{z_n}\right), \quad (4.19)$$

поскольку N можно подобрать таким образом, что $\sin 2N = 0$ и

$$\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\sqrt{z_n}t}{z_nt^3}dt = \int\limits_{N}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{z_n}} \frac{\sin 2\tau}{\tau^3}d\tau$$

– ограниченная величина. Аналогично используя асимптотические представления функций $\left(u_1^0\right)^2(t,z_n)$ и $\left(u_2^0\right)^2(t,z_n)$ из (4.1)–(4.5) получим, что:

$$\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(u_1^0\right)^2(t,z_n)q(t)dt = \frac{1}{\pi\sqrt{z_n}}\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt + O\left(\frac{1}{z_n}\right) \quad (4.20)$$

$$\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(u_2^0\right)^2(t,z_n)q(t)dt = \frac{\pi}{4\sqrt{z_n}}\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt + O\left(\frac{1}{z_n}\right). \quad (4.21)$$

Отметим, что

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} q(t)dt = \frac{1}{2\pi}. \quad (4.22)$$

Следовательно, доказательство леммы вытекает из представлений (4.6), (4.7), (4.8)–(4.15), леммы 11 и соотношений (4.17)–(4.22). □

5. Асимптотика второй поправки теории возмущений и формула следа

Теперь на основании теоремы 2 и лемм 5–12 изучим асимптотику второй поправки теории возмущений α_n, которая, как отмечалось выше, является ключевым моментом в вычислении формулы регуляризованного следа оператора H. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $g \in W_2^1[0;\pi]$ и $z_n >> 1$. Тогда справедлива оценка*

$$\alpha_n = O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right) = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

то есть последовательность α_n абсолютно суммируема.

Доказательство. Согласно теореме 2 и (3.9) имеем

$$\alpha_n = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\pi (2n+1)g(\alpha)P_n(\cos\alpha)R_{0n}(\omega,\omega_0,\lambda_n)\sin\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_0^\pi g(\alpha)\sqrt{z_n}u_1(\alpha,z_n)[u_2(\alpha,z_n)-\sqrt{z_n}\varphi_1(\alpha,z_n)-a_nu_1(\alpha,z_n)]d\alpha. \quad (5.1)$$

Так как при $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$u_k(\alpha,z)=a_{k1}(z)u_1(\pi-\alpha,z)+a_{k2}(z)u_2(\pi-\alpha,z), k=1,2, \quad (5.2)$$

то при $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ имеем

$$\varphi_1(\alpha,z)=a_{11}(z)\varphi_1(\pi-\alpha,z)+a_{12}(z)\varphi_2(\pi-\alpha,z)+a'_{11}(z)u_1(\pi-\alpha,z)+$$
$$+a'_{12}(z)u_2(\pi-\alpha,z). \quad (5.3)$$

Следовательно, для исследования асимптотического поведения α_n при $n>>1$, согласно (5.1) и (5.2), необходимо изучить асимптотику чисел $a_{ki}(z_n)$, $a'_{11}(z_n)$, $a'_{12}(z_n)$ и a_n.

Пусть $n=2k+1$, то есть $u_1(\frac{\pi}{2},z_n)=0$ (случай $n=2k$, $k=1,2,\ldots$ исследуется аналогично). Поскольку $W(u_1,u_2)=1$, заметим, что

$$a_{11}(z)=2u_1(\frac{\pi}{2},z)u'_2(\frac{\pi}{2},z)-1.$$

Поэтому из формул (2.17), (5.3) при $n=2k+1$ имеем

$$a_{11}(z_n)=-1,\quad a_{22}(z_n)=1,\quad a_{12}(z)=-2u_1(\frac{\pi}{2},z_n)u'_1(\frac{\pi}{2},z_n)=0. \quad (5.4)$$

$$a_{21}(z_n)=2u_2(\frac{\pi}{2},z_n)u'_2(\frac{\pi}{2},z_n),\quad a'_{12}(z_n)=-2\varphi_1(\frac{\pi}{2},z_n)u'_1(\frac{\pi}{2},z_n), \quad (5.5)$$

$$a'_{11}(z_n)=2\varphi_1(\frac{\pi}{2},z_n)u'_2(\frac{\pi}{2},z_n), \quad (5.6)$$

$$\varphi_1(\alpha,z_n)=-\varphi_1(\pi-\alpha,z_n)+a'_{11}(z_n)u_1(\pi-\alpha,z_n)+a'_{12}(z_n)u_2(\pi-\alpha,z_n). \quad (5.7)$$

Теперь, пользуясь формулами (3.8), (4.1)–(4.5), и на основе лемм 6 и 8 для $n>>1$, $n=2k+1$, получаем

$$a_{21}(z_n)=O\left(\frac{1}{z_n^{\frac{3}{2}}}\right),\quad a'_{11}(z_n)=O\left(\frac{1}{z_n^{\frac{3}{2}}}\right),\quad a'_{12}(z_n)=-\frac{1}{\sqrt{z_n}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{z_n}}\right)\right\}. \quad (5.8)$$

$$a_n=\left[\frac{u'_2(\frac{\pi}{2},z_n)}{u'_1(\frac{\pi}{2},z_n)}+\frac{z_n\varphi_2(\frac{\pi}{2},z_n)}{u_2(\frac{\pi}{2},z)}-\frac{z_n^2\psi_1(\frac{\pi}{2},z)}{u_2(\frac{\pi}{2},z)}\right]=$$

$$=[O(z_n^{-1})-\frac{1}{4\sqrt{z_n}}+O(z_n^{-1})+\frac{1}{2\sqrt{z_n}}+O(z_n^{-1})]=\frac{1}{4\sqrt{z_n}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{z_n}}\right)\right\}. \quad (5.9)$$

Далее, разобьем интеграл в формуле (5.1) по промежуткам $[0;\frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2};\pi]$. В интеграле по второму промежутку, используя соотношения (5.2) и (5.3), произведя замену переменной $\pi-\alpha=t$ и учитывая равенства (5.4)–(5.9) для чисел α_n при $n>>1$, из (5.1) получим следующее представление

$$\alpha_n = \frac{1}{16\pi^2}\Bigg\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [g(t) - g(\pi - t)]\sqrt{z_n} u_1(t, z_n) u_2(t, z_n) dt -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [g(t) + g(\pi - t)] z_n \varphi_1(t, z_n) u_1(t, z_n) dt -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [g(t) + g(\pi - t)] \frac{1}{4\sqrt{z_n}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{z_n}}\right)\right\} u_1^2(t, z_n) dt -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(\pi - t)\sqrt{z_n} u_1(t, z_n) u_2(t, z_n) dt + O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right) \Bigg\} =$$

$$= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right). \quad (5.10)$$

Изучим асимптотическое поведение $I_j(n)$, $j = 1, 2, 3, 4$, при $n \to \infty$. Для слагаемого $I_1(n)$, вначале проинтегрировав по частям, а затем используя оценки (3.11), (3.12) и (4.18) и асимптотическое представление (4.5), заключаем, что

$$I_1(n) = -\frac{\sqrt{z_n}}{16\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [g'(t) + g'(\pi - t)] \int\limits_0^t u_1(\tau, z_n) u_2(\tau, z_n) d\tau dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{z_n}}{16\pi^2} \left\{ \int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z_n}}} \int\limits_0^t + \int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z_n}}} \int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^t \right\} [g'(t) + g'(\pi - t)] u_1(\tau, z_n) u_2(\tau, z_n) d\tau dt =$$

$$= O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right), \quad (5.11)$$

где N — достаточно большое фиксированное число.

Для исследования $I_2(n)$, воспользовавшись представлениями (2.15), (3.3) и (3.16) и оценками (3.11), (3.12) и леммой 12, а также асимптотическими представлениями (4.1)–(4.5), устанавливаем, что

$$I_2(n) = -\frac{1}{16\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [g(t) + g(\pi - t)] \frac{t}{2} {u_1^0}'(t, z_n) u_1(t, z_n) dt +$$

$$+ \frac{1}{64\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [g(t) + g(\pi - t)] \left(u_1^0\right)^2 (t, z_n) dt + O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right) = I_2^{(1)}(n) + I_2^{(2)}(n) + O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right). \quad (5.12)$$

Интеграл $I_2^{(1)}(n)$ разобьем на два интеграла – по промежуткам $[0; \frac{N}{\sqrt{z_n}}]$ и $[\frac{N}{\sqrt{z_n}}; \frac{\pi}{2}]$. Затем, воспользовавшись оценками (3.25), (4.16) получим, что

$$-\frac{1}{16\pi^2} \int\limits_0^{\frac{N}{\sqrt{z_n}}} [g(t) + g(\pi - t)] \frac{t}{2} {u_1^0}'(t, z_n) u_1(t, z_n) dt = O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Для второго промежутка, используя асимптотическое представление функции $u_1^0(t, z_n)$ из (4.1)–(4.5) и, один раз интегрируя по частям, в силу неравенства Коши-Буняковского при условии $g \in W_2^1(0;\pi)$, заключаем, что

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\frac{N}{\sqrt{z_n}}}^{\frac{\pi}{2}}[g(t)+g(\pi-t)]\frac{t}{2}{u_1^0}'(t,z_n)u_1(t,z_n)dt = \frac{1}{64\pi^2}g\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right). \tag{5.13}$$

Далее, заметим, что

$$I_3(n)+I_2^{(2)}(n) = O(z_n^{-1}). \tag{5.14}$$

Наконец, изучим асимптотическое поведение слагаемого $I_4(n)$ в формуле (5.10). С этой целью, интегрируя по частям, имеем

$$I_4(n) = -\frac{\sqrt{z_n}}{16\pi^2}g\left(\frac{\pi}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u_1(t,z_n)u_2(t,z_n)dt -$$

$$-\frac{\sqrt{z_n}}{16\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}g'(\pi-t)\int\limits_0^{t}u_1(\tau,z_n)u_2(\tau,z_n)d\tau dt + O(z_n^{-1}). \tag{5.15}$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u_1^0\right)^2(t,z_n)\int\limits_0^{t}\left(u_2^0\right)^2(\tau,z_n)q(\tau)d\tau dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u_2^0\right)^2(t,z_n)\int\limits_0^{t}\left(u_1^0\right)^2(\tau,z_n)q(\tau)d\tau dt = O\left(z_n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

на основе лемм 5 и 12 получим, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u_1(t,z_n)u_2(t,z_n)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u_1^0(t,z_n)u_2^0(t,z_n)dt + O\left(z_n^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{5.16}$$

Теперь, воспользовавшись формулой ([10, с. 125]) и асимптотическими представлениями (4.1)–(4.5), а также для функций $J_1(s)$, $Y_1(s)$ (см. [11, с. 223]), заключаем, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u_1^0(t,z_n)u_2^0(t,z_n)dt = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}tJ_0(\sqrt{z_n}t)Y_0(\sqrt{z_n}t)dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}u_1^0(\sqrt{z_n}\frac{\pi}{2})u_2^0(\sqrt{z_n}\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi^3}{16}J_1(\sqrt{z_n}\frac{\pi}{2})Y_1(\sqrt{z_n}\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4z_n}+O\left(z_n^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{5.17}$$

Итак, согласно оценкам (5.11) и (5.16), из равенств (5.15) и (5.17) следует, что

$$I_4(n) = -\frac{1}{64\sqrt{z_n}}g\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(z_n^{-\frac{3}{4}}\right). \tag{5.18}$$

Следовательно, утверждение теоремы 3 вытекает из формулы (5.10) на основе равенств (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) и (5.18). □

Так как доказанная теорема 3 позволяет использовать методику работы [5] по вычислению формулы регуляризованного следа и поскольку из определения функции $g(\alpha)$ (см. [5, с.435-436]) вытекает, что гладкости функций $g(\alpha)$ и $v(w)$ совпадают, мы приходим к основному результату работы.

Теорема 4. *Пусть* $v(w) \in W_2^1(S^2)$. *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}[\mu_n^{(k)} - n(n+1) - c_0] = \frac{1}{16\pi^3}\int_{S^2}\int_{S^2}\frac{v(w)v(w_0)}{\sqrt{1-(w,w_0)^2}}d\mu(w)d\mu(w_0) - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S^2} v^2(w)d\mu(w),$$

где $\mu_n^{(k)}$ *– собственные числа оператора* H,

$$c_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} v(w)d\mu(w),$$

ряд в левой части формулы сходится абсолютно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовничий В.А., Дубровский В.В. *Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на сфере* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 61–62.
2. Подольский В.Е. *Формула регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с нечетным потенциалом на* S^2 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 71–77.
3. Фазуллин З.Ю. *Формула регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами* // Международная конференция по комплексному анализу и смежным вопросам. Тезисы докладов Нижний Новгород. 1997. С. 80–81.
4. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю. *Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами.* Дифференциальные уравнения 2001 Т. 37, № 3. С. 402–409.
5. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю. *Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере* S^2. Матем. заметки 2005 Т. 77, выпуск 3. С. 434–448.
6. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И. *Свойства резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере и формула следов* // Докл. АН. 2011. Т 441, №2. С. 174–176.
7. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1981. 512 с.
8. Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: ГИФМЛ. 1963. 358 с.
9. Сёге Г. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ. 1962. 500 с.
10. Ватсон Д.Н. *Теория Бесселевых функций.* М.: ИЛ. 1949.798 с.
11. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции.* М.: Наука. 1964. 344 с.

Арсэн Ильгизович Атнагулов,
Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50-летия Октября, 4,
450080, г. Уфа, Россия
E-mail: `russtudent1@yandex.ru`

Садовничий Виктор Антонович,
Московский государственный университет им. Ломоносова,
ул. Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
Зиганур Юсупович Фазуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `fazullinzu@mail.ru`