ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 3 (2016). С. 135-140.

УДК 517.956.3

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.А. СОЗОНТОВА

Аннотация. В данной работе рассматриваются граничные задачи для гиперболических систем второго порядка со старшими частными производными u_{xy}, v_{xy} и u_{xx}, v_{yy}. Целью исследования является отыскание достаточных условий разрешимости рассматриваемых задач в квадратурах. Предлагается способ отыскания решения указанных задач в явном виде, основанный на факторизации уравнений исходных систем. В результате в терминах коэффициентов этих систем получено по 14 условий разрешимости в квадратурах каждой граничной задачи.

Ключевые слова: гиперболическая система, задача Гурса, граничная задача, разрешимость в квадратурах, факторизация уравнения.

Mathematics Subject Classification: 35L51, 35L53, 35G45

1. В работах [1, с. 62–67; 2, 3] с различных точек зрения изучалась система, имеющая в векторно-матричной форме вид

$$u_{xy} + Au_x + Bu_y + Cu = F.$$

В частности известно, что для нее является однозначно разрешимой задача Гурса. Здесь предлагается для определенного частного случая способ отыскания решения той же задачи в квадратурах путем факторизации каждого из уравнений, которые оказывается удобным рассматривать в формах

$$\begin{aligned} u_{xy} + a_1u_x + b_1u_y + c_1v_y + d_1u + e_1v = 0, \\ v_{xy} + a_2u_x + b_2v_x + c_2v_y + d_2u + e_2v = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для реализации проводимых рассуждений достаточно предполагать, что в рассматриваемой области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ выполняются включения

$$a_1,\ a_2,\ b_2 \in C^{(1,0)},\ b_1,\ d_1,\ d_2 \in C^{(0,1)},\ d_1,\ d_2,\ e_1,\ e_2 \in C^{(0,0)}. \tag{2}$$

Также предлагается аналогичный подход к исследованию некоторой характеристической задачи для системы со старшими частными производными u_{xx}, v_{yy}.

Задача 1. В области D найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad u(x, y_0) = \psi_1(x), \\ v(x_0, y) = \varphi_2(y), \quad v(x, y_0) = \psi_2(x). \end{aligned} \tag{3}$$

При этом предполагается, что $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^1(\overline{X})$, $\psi_1,\ \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$ ($X,\ Y$ – стороны характеристического прямоугольника D при $x = x_0,\ y = y_0$ соответственно) и выполняются условия согласования

$$\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0). \tag{4}$$

E.A. Sozontova, On solvability by quadratures conditions for second order hyperbolic systems.

Поступила 7 августа 2015 г.

Попытаемся найти такие функции $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$, чтобы первое уравнение (1) имело вид

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}+\alpha_1)(u_x+\beta_1 u+\gamma_1 v)=0. \tag{5}$$

Произведя указанные в (5) действия, убеждаемся, что совпадение (1_1) с (5) имеет место, если выполняются тождества

$$\begin{aligned} b_{1y}+a_1b_1-d_1\equiv 0,\\ c_{1y}+a_1c_1-e_1\equiv 0, \end{aligned} \tag{6}$$

и при этом

$$\alpha_1=a_1,\ \beta_1=b_1,\ \gamma_1=c_1. \tag{7}$$

Аналогично получаем, что если имеют место тождества

$$\begin{aligned} a_{2x}+a_2c_2-d_2\equiv 0,\\ b_{2x}+b_2c_2-e_2\equiv 0, \end{aligned} \tag{8}$$

то второе уравнение (1) представимо в виде

$$(\tfrac{\partial}{\partial x}+\alpha_2)(v_y+\beta_2 u+\gamma_2 v)=0,$$

где

$$\alpha_2=c_2,\ \beta_2=a_2,\ \gamma_2=b_2. \tag{9}$$

Таким образом, задачу 1 можно редуцировать к следующим трем задачам

$$w_{1y}+\alpha_1w_1=0,\quad w_1(x,y_0)=\psi_{1x}+\beta_1\psi_1+\gamma_1\psi_2, \tag{10}$$

$$w_{2x}+\alpha_2w_2=0,\quad w_2(x_0,y)=\varphi_{2y}+\beta_2\varphi_1+\gamma_2\varphi_2, \tag{11}$$

$$\begin{cases} u_x+\beta_1u+\gamma_1v=w_1,\\ v_y+\beta_2u+\gamma_2v=w_2, \end{cases} \tag{12}$$

$$u(x_0,y)=\varphi_1(y),\qquad v(x,y_0)=\psi_2(x). \tag{13}$$

Задачи (10)–(13) следует решать последовательно, начиная с первой из них. Функции $w_1,\ w_2$ вычисляются непосредственным интегрированием, причем в случае задачи (10) x рассматривается как параметр, а в случае задачи (11) в качестве параметра выступает y. Таким образом, остается решить задачу Гурса (12)–(13), которая является однозначно разрешимой [4]. Для отыскания условий ее разрешимости в явном виде мы воспользуемся возможностью редукции системы (12) к двум уравнениям вида

$$\Theta_{xy}+a\Theta_x+b\Theta_y+c\Theta=f, \tag{14}$$

которые получаются путем исключения из рассматриваемой системы одной из искомых функций. При выполнении неравенства $\gamma_1\neq 0$, эквивалентного в силу (7)

$$c_1\neq 0, \tag{15}$$

приходим к (14) для $\Theta=u$. При этом коэффициенты уравнения даются формулами

$$\begin{aligned} a=\gamma_2-(\ln\gamma_1)_y,\ b=\beta_1,\ c=\beta_{1y}+\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1-\beta_1(\ln\gamma_1)_y,\\ f=w_{1y}+\gamma_2w_1-\gamma_1w_2-w_1(\ln\gamma_1)_y. \end{aligned} \tag{16}$$

При выполнении неравенства $\beta_2\neq 0$, равносильного вследствие (9)

$$a_2\neq 0, \tag{17}$$

приходим к (14) для $\Theta=v$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} a=\gamma_2,\ b=\beta_1-(\ln\beta_2)_x,\ c=\gamma_{2x}+\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1-\gamma_2(\ln\beta_2)_x,\\ f=w_{2x}-\beta_2w_1+\beta_1w_2-w_2(\ln\beta_2)_x. \end{aligned} \tag{18}$$

Решение $u(x,y)$ первого уравнения, выведенного при $\gamma_1\neq 0$, позволяет вычислить функцию $v(x,y)$ из первого уравнения в (12). Аналогично, при $\beta_2\neq 0$ по известному решению

v второго уравнения функция u определяется из второго уравнения (12). Однако, для отыскания $\Theta = u$ или $\Theta = v$ к условиям (13) необходимо из (3) добавить еще значения

$$u(x, y_0) = \psi_1(x), \quad v(x_0, y) = \varphi_2(y) \tag{19}$$

и условия согласования (4). Понятно, что первые (вторые) соотношения в (13) и (19) есть граничные условия задачи Гурса для первого (второго) уравнения вида (14). При этом для получения решения исходной задачи 1 достаточно построить решение хоть одной из указанных задач Гурса.

Известно [5, с. 172; 6, с. 14], что решения сформулированных задач Гурса записываются через соответствующие функции Римана, причем для последних имеются [6, с.15–16; 7, 8] различные случаи их построения в явном виде. В только что указанных источниках обеспечивающие эти случаи условия представлены в терминах следующих соотношений:

$$\begin{gathered} 1)\ a_x + ab - c \equiv 0; \\ 2)\ b_y + ab - c \equiv 0; \\ 3)\ a_x \equiv b_y,\ c - a_x - ab \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0; \\ 4)\ b_y - a_x \equiv a_x + ab - c \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0; \\ 5)\ a_x - b_y \equiv b_y + ab - c \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0; \\ 6)\ ma_x - b_y \equiv mb_y - a_x \equiv (m-1)(ab - c); \\ 7)\ \sigma = \frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2},\ [s(x) + t(y)]s'(x)t'(y) \neq 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $\xi_k,\ \eta_k \in C^1\ (k = \overline{0,2}),\ s,\ t,\ m \in C^2$, причем m зависит только от одной из переменных (x, y) и не принимает значение 2. В остальном указанные функции произвольны: то есть в соответствующем классе должны найтись функции, при которых перечисленные соотношения выполняются. Коэффициенты $a,\ b,\ c$ имеют гладкость, обеспечивающую возможность выполнения записанных формул. Классы гладкости задаются на замкнутых множествах определения соответствующих функций. Каждого из тождеств 1)–2) и наборов 3)–5) достаточно для получения явного вида функций Римана. Формулами же 6)–7) следует пользоваться совместно: при выполнении набора 6) функцию Римана можно построить, когда левая часть хотя бы одного из соотношений 1), 2) имеет вид σ, указанный в 7). Иными словами, имеется по семь вариантов условий разрешимости в квадратурах каждой из двух полученных задач Гурса. Для всех вариантов виды функций Римана можно найти в [6]–[8]. Понятно, что общее количество вариантов обсуждаемой разрешимости равно 14.

Используя формулы (7), (9), (16), (18), запишем 1)–7) через коэффициенты системы (1). Начнем с первой задачи Гурса, связанной с неравенством (15):

$$\begin{gathered} 1)\ b_{2x} - b_{1y} - (\ln c_1)_{xy} + a_2 c_1 \equiv 0; \\ 2)\ a_2 \equiv 0; \\ 3)\ b_{2x} - b_{1y} - (\ln c_1)_{xy} \equiv 0,\ b_{1y} - b_{2x} + (\ln c_1)_{xy} - a_2 c_1 \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0; \\ 4)\ 2[(\ln c_1)_{xy} - b_{2x} + b_{1y}] \equiv a_2 c_1,\ (\ln c_1)_{xy} - b_{2x} + b_{1y} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0; \\ 5)\ b_{2x} - b_{1y} - (\ln c_1)_{xy} \equiv a_2 c_1 \equiv \xi_2(x)\eta_3(y) \neq 0; \\ 6)\ m[b_{2x} - (\ln c_1)_{xy}] - b_{1y} \equiv mb_{1y} - b_{2x} + (\ln c_1)_{xy} \equiv (m-1)(a_2 c_1 - b_{1y}); \\ 7)\ \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\ [s_k(x) + t_k(y)]s_k'(x)t_k'(y) \neq 0,\ k = 1, 2. \end{gathered} \tag{21}$$

В последней строке нужно считать $\sigma_1,\ \sigma_2$ равными левой части тождеств 1), 2) соответственно. Кроме того учтем, что для обеспечения возможности реализации соотношений (20) необходимо повысить гладкость коэффициентов системы (1) и функций $\varphi_i,\ \psi_i\ (i = 1, 2)$. Пусть теперь $a_i, \ldots, e_i \in C^{(2,2)},\ \varphi_i,\ \psi_i \in C^2\ (i = 1, 2)$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть при выполнении тождеств (6), (8) и неравенства (15) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (21), или существуют такие функции*

$m,\ \xi_k,\ \eta_k\ (k=\overline{0,2}),\ s_k,\ t_k\ (k=1,2)$ указанных выше классов, что для совокупности (21) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций $\sigma_1,\ \sigma_2$. Тогда задача 1 разрешима в квадратурах.

Аналогами формул (21) для второй задачи Гурса (отвечающей условию (17)) являются

$$\begin{gathered}1)\ c_1\equiv 0;\\ 2)\ -b_{2x}+b_{1y}-(\ln a_2)_{xy}+a_2c_1\equiv 0;\\ 3)\ b_{2x}-b_{1y}+(\ln a_2)_{xy}\equiv 0,\ -a_2c_1\equiv \xi_3(x)\eta_3(y)\neq 0;\\ 4)\ b_{1y}-b_{2x}-(\ln a_2)_{xy}\equiv a_2c_1\equiv \xi_4(x)\eta_4(y)\neq 0;\\ 5)\ 2[(\ln a_2)_{xy}+b_{2x}-b_{1y}]\equiv a_2c_1,\ (\ln a_2)_{xy}+b_{2x}-b_{1y}\equiv \xi_5(x)\eta_5(y)\neq 0;\\ 6)\ mb_{2x}+(\ln a_2)_{xy}-b_{1y}\equiv m(b_{1y}-(\ln a_2)_{xy})-b_{2x}\equiv (m-1)(a_2c_1-b_{2x});\\ 7)\ \sigma_k=\frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\ [s_k(x)+t_k(y)]s_k'(x)t_k'(y)\neq 0,\ k=3,4.\end{gathered}\tag{22}$$

В последней строке $\sigma_3,\ \sigma_4$ равны соответственно левой части тождеств 1), 2) совокупности (22).

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть при выполнении тождеств (6), (8) и неравенства (17) или удовлетворяется хоть одно из тождеств 1), 2) совокупности (22), или существуют такие функции $m,\ \xi_k,\ \eta_k\ (k=\overline{3,5}),\ s_k,\ t_k\ (k=3,4)$ указанных выше классов, что для совокупности (22) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций $\sigma_3,\ \sigma_4$. Тогда задача 1 разрешима в квадратурах.*

2. Применим теперь описанный выше алгоритм для отыскания условий разрешимости в квадратурах следующей задачи

Задача 2. В области $D=\{x_0<x<x_1,\ y_0<y<y_1\}$ найти регулярное решение системы

$$\begin{cases}u_{xx}+a_1u_x+b_1v_x+c_1u+d_1v=0,\\ v_{yy}+a_2u_y+b_2v_y+c_2u+d_2v=0,\end{cases}\tag{23}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}u(x_0,y)=\varphi_1(y),\quad v(x,y_0)=\psi_1(x),\\ (u_x+b_1v)(x_0,y)=\varphi_2(y),\quad (v_y+a_2u)(x,y_0)=\psi_2(x),\end{gathered}\tag{24}$$

где $\varphi_1,\ \varphi_2\in C^1(\overline{X}),\ \psi_1,\ \psi_2\in C^1(\overline{Y})$. Гладкость коэффициентов системы (23) определяется включениями

$$a_1,\ b_1\in C^{(1,0)},\ a_2,\ b_2\in C^{(0,1)},\ c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2\in C^{(0,0)}.\tag{25}$$

Система (23) изучалась, например, в работах [9], [10]. В частности, в [9] получено решение задачи 2, записанное в терминах матрицы Римана. Целью нашего исследования является получение условий разрешимости задачи 2 в квадратурах.

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что первое уравнение (23) представимо в виде

$$(\tfrac{\partial}{\partial x})(u_x+\beta_1u+\gamma_1v)=0,$$

если выполняются тождества

$$\begin{gathered}a_{1x}-c_1\equiv 0,\\ b_{1x}-d_1\equiv 0,\end{gathered}\tag{26}$$

и при этом

$$\beta_1=a_1,\ \gamma_1=b_1.\tag{27}$$

Аналогично, если

$$\begin{gathered}a_{2y}-c_2\equiv 0,\\ b_{2y}-d_2\equiv 0,\end{gathered}\tag{28}$$

то второе уравнение (23) можно записать в виде

$$(\tfrac{\partial}{\partial y})(v_y + \beta_2 u + \gamma_2 v) = 0,$$

где

$$\beta_2 = a_2,\ \gamma_2 = b_2. \tag{29}$$

Таким образом, задача 2 редуцируется к трем задачам вида

$$w_{1x} = 0, \quad w_1(x_0, y) = \varphi_2 + \beta_1\varphi_1, \tag{30}$$

$$w_{2y} = 0, \quad w_2(x, y_0) = \psi_2 + \gamma_2\psi_1, \tag{31}$$

$$\begin{cases} u_x + \beta_1 u + \gamma_1 v = w_1, \\ v_y + \beta_2 u + \gamma_2 v = w_2, \end{cases} \tag{32}$$

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad v(x, y_0) = \psi_1(x). \tag{33}$$

Задачи (30)–(33) следует решать последовательно, начиная с первой из них. Функции $w_1,\ w_2$ из (30), (31) вычисляются непосредственным интегрированием, причем в случае задачи (30) x рассматривается как параметр, а в случае задачи (31) в качестве параметра выступает y. Задача (32)–(33), как известно из п.1, редуцируется к двум задачам Гурса для уравнения (14). Причем, при выполнении неравенства

$$b_1 \neq 0 \tag{34}$$

приходим к (14) для $\Theta = u$ с коэффициентами (16), а при

$$a_2 \neq 0 \tag{35}$$

приходим к (14) для $\Theta = v$ с коэффициентами (18). Условия разрешимости указанных задач Гурса определяются соотношениями (20). Используя формулы (16), (18), (27), (29), запишем эти соотношения в терминах коэффициентов системы (23). Для первой задачи Гурса, связанной с неравенством (34), имеем

$$\begin{gathered} 1)\ b_{2x} - a_{1y} - (\ln b_1)_{xy} + a_2 b_1 \equiv 0; \\ 2)\ a_2 \equiv 0; \\ 3)\ b_{2x} - a_{1y} - (\ln b_1)_{xy} \equiv 0,\ a_{1y} - b_{2x} + (\ln b_1)_{xy} - a_2 b_1 \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0; \\ 4)\ 2[(\ln b_1)_{xy} - b_{2x} + a_{1y}] \equiv a_2 b_1,\ (\ln b_1)_{xy} - b_{2x} + a_{1y} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0; \\ 5)\ b_{2x} - a_{1y} - (\ln b_1)_{xy} \equiv a_2 b_1 \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0; \\ 6)\ m[b_{2x} - (\ln b_1)_{xy}] - a_{1y} \equiv m a_{1y} - b_{2x} + (\ln b_1)_{xy} \equiv (m-1)(a_2 b_1 - a_{1y}); \\ 7)\ \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\ [s_k(x)+t_k(y)]s_k'(x)t_k'(y) \neq 0,\ k=1,2. \end{gathered} \tag{36}$$

В последней строке нужно считать $\sigma_1,\ \sigma_2$ равными соответственно левой части тождеств 1), 2) совокупности (36). Кроме того, необходимо повысить гладкость коэффициентов системы (23) и функций $\varphi_i,\ \psi_i\ (i=1,2)$. Пусть теперь $a_i, \ldots, d_i \in C^{(2,2)},\ \varphi_i,\ \psi_i \in C^2\ (i=1,2)$. Тогда справедлива

Теорема 3. *Если наряду с выполнением тождеств (26), (28) и неравенства (34) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) из (36), или существуют такие функции* $m,\ \xi_k,\ \eta_k\ (k=\overline{0,2}),\ s_k,\ t_k\ (k=1,2)$ *указанных выше классов, что для совокупности (37) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций* $\sigma_1,\ \sigma_2$, *тогда задача 2 разрешима в квадратурах.*

Аналогами формул (36) для второй задачи Гурса (отвечающей условию (35)) являются:

$$\begin{gathered}
1)\ b_1 \equiv 0;\\
2)\ a_{1y} - b_{2x} - (\ln a_2)_{xy} + a_2 b_1 \equiv 0;\\
3)\ b_{2x} - a_{1y} + (\ln a_2)_{xy} \equiv 0,\ -a_2 b_1 \equiv \xi_3(x)\eta_3(y) \neq 0;\\
4)\ a_{1y} - b_{2x} - (\ln a_2)_{xy} \equiv a_2 b_1 \equiv \xi_4(x)\eta_4(y) \neq 0;\\
5)\ 2[(\ln a_2)_{xy} + b_{2x} - a_{1y}] \equiv a_2 b_1,\ (\ln a_2)_{xy} + b_{2x} - a_{1y} \equiv \xi_5(x)\eta_5(y) \neq 0;\\
6)\ m b_{2x} + (\ln a_2)_{xy} - a_{1y} \equiv m(a_{1y} - (\ln a_2)_{xy}) - b_{2x} \equiv (m-1)(a_2 b_1 - b_{2x});\\
7)\ \sigma_k = \tfrac{2s_k^{'}(x)t_k^{'}(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\ [s_k(x)+t_k(y)]s_k'(x)t_k'(y) \neq 0,\ k = 3,4,
\end{gathered} \tag{37}$$

где $\sigma_3,\ \sigma_4$ равны соответственно левой части тождеств 1), 2) совокупности (37).

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Если наряду с выполнением тождеств (26), (28) и неравенства (35) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) из (37), или существуют такие функции $m,\ \xi_k,\ \eta_k\ (k=\overline{3,5}),\ s_k,\ t_k\ (k=3,4)$ указанных выше классов, что для совокупности (37) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций $\sigma_3,\ \sigma_4$, тогда задача 2 разрешима в квадратурах.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. Жибер А. В., Михайлова Ю. Г. *Алгоритм построения общего решения n-компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами Лапласа и краевые задачи* // Уфимск. матем. журн. 2009. Т. 1. № 3. С. 28–45.
3. Воронова Ю. Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 20–26.
4. Чекмарев Т. В. *Решение гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями* // Изв. вузов. Математика. 1959. № 6. С. 220–228.
5. Бицадзе А. В. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1982.
6. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань, 2001.
7. Жегалов В. И. *К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций* // Неклассические уравнения математической физики Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 73–79.
8. Жегалов В. И., Сарварова И. М. *К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* // Изв. вузов. Математика. 2013. № 3. С. 68–73.
9. Миронова Л. Б. *О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. Вып.43. С. 31–37.
10. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Изв. вузов. Математика. 2007. № 3. С. 12–21.

Елена Александровна Созонтова,
Елабужский институт КФУ,
ул. Казанская, 89,
423600, г. Елабуга, Россия
E-mail: sozontova-elena@rambler.ru