ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 38-53.

УДК 517.946

ОБ УБЫВАНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

В.Ф. ВИЛЬДАНОВА

Аннотация. Для линейного параболического уравнения второго порядка с двойным вырождением $\mu(x)u_t = (\rho(x)a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}$ в неограниченной области получена оценка сверху скорости убывания решения первой начально-краевой задачи. В широком классе областей вращения доказана оценка снизу. Приведены примеры, показывающие, что оценки сверху и снизу, в определенном смысле, точны.

Доказывается существование и единственность решения задачи в неограниченной области методом галеркинских приближений.

Ключевые слова: параболическое уравнение с двойным вырождением, скорость убывания решения, оценки сверху, существование решения.

Mathematics Subject Classification: 35B30, 35B45, 35K10, 35K20, 35K65

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ линейное уравнение второго порядка:

$$\mu(x)u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (\rho(x)a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}, \tag{1}$$

где веса $\mu(x) > 0$ и $\rho(x) > 0$ – измеримые функции, суммируемые на любом ограниченном подмножестве Ω: $\mu, \rho \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$. На симметричные коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ накладывается условие равномерной эллиптичности: существуют положительные постоянные γ, γ_1 такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(t,x) \in D$ справедливы неравенства:

$$\gamma|y|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)y_iy_j \leqslant \gamma_1|y|^2. \tag{2}$$

На боковой границе цилиндра D задано краевое условие Дирихле:

$$u(t,x)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega. \tag{3}$$

Мы будем иметь дело с обобщенным решением задачи (1), (3) с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x) \in L_2(\Omega, \mu dx). \tag{4}$$

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости скорости убывания при $t \to \infty$ решения задачи (1), (3), (4) от геометрии неограниченной области Ω и поведения весов μ, ρ при $x \to \infty$.

Первые исследования зависимости скорости убывания решения смешанной задачи для равномерно параболического уравнения ($\mu = \rho \equiv 1$) второго порядка от геометрии неограниченной

V.F. Vil'danova, On decay of solution to linear parabolic equation with double degeneracy.

Работа выполнена при поддержке гранта ученого совета БГПУ им. М.Акмуллы для молодых учёных.
Поступила 25 октября 2015 г.

области были выполнены А.К. Гущиным в работах [1, 2]. Для широкого класса областей в них для решения второй смешанной задачи установлена оценка

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}}{v(\sqrt{t})}, \qquad x \in \Omega,$$

где $v(r) = \operatorname{mes}\{x \in \Omega : |x| < r\}$. Доказана также точность этой оценки. В частности, для решения задачи Коши эта оценка принимает вид

$$|u(t,x)| \leqslant C\frac{\|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{(\sqrt{t})^n}.$$

Более полные исследования зависимости поведения при большом значении времени решения второй смешанной задачи от геометрии области и от начальной функции выполнены А.В. Лежневым в [3]. В.И. Ушаков [4] получил результаты, близкие к результатам А.К. Гущина, для третьей смешанной задачи в нецилиндрической области. Ранее в работе [5] Ф.Х. Мукминовым была доказана оценка скорости убывания решения первой смешанной задачи в случае равномерно параболического уравнения второго порядка и доказана ее точность в классе неограниченных монотонно расширяющихся областей вращения. В работе [6] получены точные оценки решения параболического уравнения четвертого и шестого порядка с краевыми условиями Риккье на боковой границе неограниченной цилиндрической области.

Упомянем ещё работу [7], в которой для квазилинейных параболических уравнений в неограниченной области изучалась зависимость поведения решения от структуры нелинейности уравнений.

Более полный обзор результатов, примыкающих к теме нашей работы, можно найти в [6]–[14].

Приступим к формулировке нашего результата.

Определим функции

$$\lambda(r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\Omega)} F_r(g), \quad F_r(g) = \frac{\int\limits_{\Omega[r]} \rho(x)|\nabla g|^2 dx}{\int\limits_{\Omega[r]} \mu g^2 dx}, \tag{5}$$

где $\Omega[r] = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$;

$$\widetilde{\lambda}(r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int\limits_{S_r} \rho(x)|\nabla g|^2 dS}{\int\limits_{S_r} \rho g^2 dS}, \tag{6}$$

где $S_r = \{x \in \Omega| \ |x| = r\}$. Очевидно, что функция $\lambda(r)$ ограничена на интервале $r > r_0$, если множество $\Omega[r_0]$ не пусто.

В следующем утверждении речь идет об обобщенном решении задачи (см. §2).

Теорема 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи* (1), (3), (4) *с начальной функцией φ, равной нулю при $|x| > R_0$. Тогда найдется число $\nu_1 > 0$, зависящее только от n, γ_1, R_0, и T, зависящее еще и от функций $\lambda, \widetilde{\lambda}$, такие, что для всех $t > T$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x) u^2(t,x) dx \leqslant C \exp\left(-\nu_1 \int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)} ds\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x) dx, \tag{7}$$

где $r = r(t)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $t\lambda(r) \geq \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}\, ds$. Постоянная C зависит от γ, γ_1 и от функции $\widetilde{\lambda}$.

Известно, что в случае плоского угла $\Omega = \{(r,\psi)| \ r > 0, 0 < \psi < \alpha\}$ при $\mu = \rho \equiv 1$ убывание решения задачи (1), (3), (4) будет степенным: $u(t,x) = O(t^{-(\pi/\alpha+1)})$ (см.[5]). Для таких ситуаций (то есть когда решение убывает степенным образом) оценка (7) дает неадекватный результат, поскольку точное значение постоянной ν_1 не определено (т.е. не определяется точно показатель степени t).

Если выполнено неравенство $\rho(x) \leq \mu(x)$ для почти всех $x \in \Omega$, то можно получить оценку, несколько слабее, чем (7), не используя функцию $\widetilde{\lambda}$ (см. теорему 2, §3).

Отметим, что утверждение теоремы останется верным, если области $\Omega[r], S_r$ заменить на $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$ и $S_r = \{(x_1, x') \in \Omega \mid x_1 = r\}$. При этом предполагается, что области $\Omega(r)$ ограничены при всех $r > 0$.

Формально функция $r(t) = R_0 + 1$ удовлетворяет неравенству из теоремы. Но ясно, что неравенство (7) будет более сильным, если выбрать функцию $r(t) \geq R_0 + 1$ наибольшей среди допустимых. В случае, когда функция $\lambda(r)$ непрерывна и положительна хотя бы в одной точке $r \geq R_0 + 1$, выбираем функцию $r(t)$, как наибольший среди корней уравнения $t\lambda(r) = \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds$. (При достаточно больших t существует хотя бы один корень.) В конце §3 приведено условие, при котором функция $\lambda(r)$ будет непрерывной. Такой же подход применим при наличии оценки $\lambda(r) \geq h(r)$ с заменой $\lambda(r)$ на непрерывную функцию $h(r)$. В простейшем случае $\rho = \mu = 1$ выбор функции $h(r)$ можно сделать, используя неравенство (5.4) ([21], гл.II, §5), которое в случае $\operatorname{mes}\Omega[r] \leqslant (1-\varepsilon)\operatorname{mes} B(r)$, где $\operatorname{mes} B(r)$ — шар радиуса r запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega[r]} u^2(t,x)dx \leqslant \beta\varepsilon^{-2}r^2 \int\limits_{\Omega[r]} |\nabla u|^2(t,x)dx, \qquad \beta > 0. \tag{8}$$

Отсюда следует неравенство $\lambda(r) \geq \dfrac{\varepsilon^2}{\beta r^2}$. Отметим еще, что неравенство (8), примененное вместо $\Omega[r]$ к конусу с вершиной в точке O и сферическим основанием S_r, дает оценку $\widetilde{\lambda}(r) \geq \delta^2(r)/(\beta r^2)$, где $1 - \delta(r) = \operatorname{mes}_{n-1} S_r r^{1-n}/\omega_n$, ω_n – мера единичной сферы. В частности, когда функция $\delta(r)$ достаточно быстро убывает, возможно неравенство $\int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds < \infty$, и тогда оценка (7) становится несодержательной.

В §4 также приведены примеры выбора функций $r(t)$ для функций μ, ρ, отличных от 1. В §5 приведена теорема 2 об оценке неотрицательного решения снизу в случае, когда область Ω является областью вращения. На примерах показано, что неравенство (7) теоремы 1 является, в определенном смысле, точным.

2. Существование и единственность решения

Введем следующие обозначения: $D_a^b = (a,b) \times \Omega$, $D^T = D_0^T$, $D = D_0^\infty$,

$$\|u\|^2_{D^T,\mu} = \int\limits_{D^T} \mu u^2 dxdt, \quad \|\nabla u\|_{D^T,\rho} = \int\limits_{D^T} \rho|\nabla u|^2 dxdt.$$

На множестве сужений на D^T функций из $C_0^\infty(D_{-1}^T)$ определим нормы

$$\|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} = \|u\|^2_{D^T,\mu} + \|\nabla u\|^2_{D^T,\rho}; \quad \|u\|^2_{H^{1,1}(D^T)} = \|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} + \|u_t\|^2_{D^T,\mu}.$$

Соответствующие пополнения этих линейных нормированных пространств обозначим $\mathring{H}^{0,1}(D^T)$ и $\mathring{H}^{1,1}(D^T)$. Для единственности градиента функций из введенных весовых пространств потребуем выполнения условия из работы [20]:

$$\rho^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (\mu u^2 + \rho|\nabla u|^2)dx$.

Обобщенным решением задачи (1), (3), (4) в D^T будем называть функцию $u(t,x) \in \mathring{H}^{0,1}(D^T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int\limits_{D^T}\left(-\mu u v_t+\sum_{i,j=1}^{n}\rho a_{ij}(t,x)u_{x_i}v_{x_j}\right)dxdt=\int\limits_{\Omega}\mu\varphi(x)v(0,x)dx, \qquad (9)$$

для любой функции $v(t,x)\in \mathring{H}^{1,1}(D^T)$.

Функция $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) в D, если при всех $T>0$ она является решением задачи (1), (3), (4) в D^T.

Обобщенное решение задачи (1), (3), (4) в D^T существует и единственно. Существование доказывается методом Галеркина (см., например, [21, с.181–186]).

Выберем набор линейно независимых функций $w_i(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$ так, чтобы их линейная оболочка была плотна в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Не ограничивая общность, можно считать, что эти функции ортонормированы в $L_2(\Omega,\mu dx)$.

Галеркинские приближения будем искать в виде

$$u^l(t,x)=\sum_{i=1}^{n}C_i^l(t)w_i(x). \qquad (10)$$

Уравнения на искомые коэффициенты получим из требования

$$\int\limits_{\Omega}(\mu(x)u_t^l w_s+\sum_{i,j=1}^{n}\rho(x)a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}(w_s)_{x_j}dx=0,\quad s=\overline{1,l}. \qquad (11)$$

Условия (11), благодаря ортонормированности функций w_i, приводят к системе обыкновенных уравнений

$$(C_i^l)'+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)C_j^l=0,\qquad i=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (12) выберем следующими

$$C_i^l(0)=(\varphi,w_i). \qquad (13)$$

Условия (12), (13) определяют единственный набор функций $C_i^l(t)$.

Докажем ограниченность множества u^l галеркинских приближений в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D^T)$. Умножим равенство (11) на C_s^l и сложим. Получим

$$\int\limits_{\Omega}(\mu u_t^l u^l+\sum_{i,j=1}^{n}\rho a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}u^l_{x_j})dxdt=0. \qquad (14)$$

Проинтегрировав (14) по $t\in(0,T)$ и воспользовавшись условием (2), будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\mu(x)\left[(u^l(t,x))^2-(u^l(0,x))^2\right]dx+\gamma\int\limits_{D^T}\rho(x)|\nabla u^l|^2dxdt\leqslant 0. \qquad (15)$$

Очевидно, что

$$\|u^l(0,x)\|^2_{L_2(\Omega,\mu dx)}=\sum_{i=1}^{l}(\varphi,w_i)^2.$$

Тогда (15) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega}\mu(x)u^l(t,x))^2dx+2\gamma\int\limits_{D^T}\rho(x)|\nabla u^l|^2dxdt\leqslant\|\varphi\|^2_{D^T,\mu}. \qquad (16)$$

Отсюда следует ограниченность множества u^l в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D^T)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в этом пространстве к некоторой функции $u\in\mathring{H}^{0,1}(D^T)$. Чтобы не нагромождать индексы, будем считать, что сама последовательность слабо сходится.

Умножим (11) на функцию $d_s(t) \in C_0^\infty(-1,T)$ и проинтегрируем по $t \in (0,T)$. После обозначения $v = d_s w_s$, интегрирования по частям и предельного перехода при $l \to \infty$ получим

$$\int\limits_{D^T} \left(-\mu u(v)_t + \sum_{i,j=1}^{n} \rho a_{ij}(t,x) u_{x_i} (v)_{x_j} dxdt \right) = \int\limits_{\Omega} \mu \varphi(x) v(0,x) dx. \tag{17}$$

Отметим, что (17) справедливо не только для функций $v = d_s w_s$, но и для сумм таких функций. Остается еще добавить, что функциями вида $v^m = \sum\limits_{s=1}^{m} d_s w_s$ можно приблизить любую функцию w из $C_0^\infty(D_{-1}^T)$ по норме пространства $\overset{\circ}{H}{}^{1,1}(D^T)$.

Теперь покажем единственность решения задачи (1), (3), (4).

Через $v_h(t,x)$ будем обозначать осреднение Стеклова функции $v(t,x)$:

$$v_h(t,x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau,x) d\tau,$$

которое обладает следующими свойствами:

1)$(v, u_{-h}) = (v_h, u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1},\mu dxdt)}$, где $(v,u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1},\mu dxdt)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mu v u \, dxdt$,

2)если $v \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D_0^T)$, то $(v_h)_{x_i} = (v_{x_i})_h$,

3)если $v, v_t \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mu dxdt)$, то $(v_t)_h = (v_h)_t$,

4) если $v \in L_2(D^T, \mu dxdt)$, то для любого $\delta > 0$ имеет место сходимость $v_h \to v$ в $L_2(D^{T-\delta}, \mu dxdt)$ при $h \to 0$ $(h < \delta)$.

Подставим в интегральное тождество (9) пробную функцию v_{-h}, где v – из пространства $C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$. Это допустимо, так как $v_{-h} \in C_0^\infty(D_0^T)$ при $0 < h < \delta$. Воспользовавшись свойствами осреднения Стеклова, будем иметь

$$\int\limits_{D^T} \left[\mu (u_h)_t v + \rho \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} \right] dxdt = 0. \tag{18}$$

Предельным переходом доказывается, что последнее соотношение справедливо не только для функций $v \in C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$, но и для функций $v \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$.

Заметим, что равенства (18) имеют вид

$$\int\limits_{D^T} \mu (u_h)_t v dxdt = l_h(v), \tag{19}$$

где $l_h(v)$ линейный функционал в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$.

Докажем равномерную ограниченность линейного функционала $l_h(v)$ при $|h| < \delta_0$ в единичном шаре пространства $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$.

Рассмотрим $l_h(v)$, с учетом равномерной эллиптичности будем иметь:

$$|l_h(v)| = | \int\limits_{D^{T-\delta}} \rho \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} dxdt| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\frac{\gamma_1}{h} \int\limits_t^{t+h} \rho |\nabla u(\tau,x)| d\tau \right) |\nabla v(t,x)| dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \gamma_1 \rho \left(\frac{1}{h^2} \left(\int\limits_t^{t+h} |\nabla u(\tau,x)| d\tau \right)^2 + |\nabla v(t,x)|^2 \right) dxdt.$$

Таким образом получаем, что $|l_h(v)| \leqslant C$.

Итак, ограниченность линейного функционала $l_h(v)$ доказана.

Подставим в равенство $(19)_{h_1}$–$(19)_{h_2}$ функцию $v=(u_{h_1}-u_{h_2})\chi(t_1,t_2)\in \mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$, где $\chi(t_1,t_2)$ характеристическая функция интервала (t_1,t_2). Получим

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\mu((u_{h_1})_t-(u_{h_2})_t)(u_{h_1}-u_{h_2})dxdt\right|=$$
$$=|(l_{h_1}-l_{h_2})(\chi(u_{h_1}-u_{h_2}))|\leqslant C\|(u_{h_1}-u_{h_2})\|_{H^{0,1}}\leqslant\varepsilon.$$

Последнее неравенство вытекает при достаточно малых h_1,h_2 из сходимости $u_h\to u$ в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D_0^{T-\delta})$. После интегрирования по t будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\mu(u_{h_1}-u_{h_2})^2(t_1,x)dx\leqslant\int\limits_{\Omega}\mu(u_{h_1}-u_{h_2})^2(t_2,x)dx+2\varepsilon.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по $t_2\in[t_1,T-\delta]$:

$$(T-\delta-t_1)\int\limits_{\Omega}\mu(u_{h_1}-u_{h_2})^2(t_1,x)dx\leqslant\mu\|(u_{h_1}-u_{h_2})\|^2_{L_2(D^{T-\delta},\mu dx)}+2\varepsilon(T-\delta-t_1).$$

Поскольку $u_h\to u$ в $L_2(D^{T-\delta},\mu dx)$, то при $t_1<T-2\delta$ будем иметь неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\mu(u_{h_1}-u_{h_2})^2(t_1,x)dx\leqslant\frac{\varepsilon_1}{\delta}+2\varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная фундаментальность в $L_2(\Omega,\mu dx)$ по t_1 семейства функций $u_h(t_1,x)$. Поэтому $u_h(t,x)\rightrightarrows u(t,x)$ в $L_2(\Omega,\mu dx)$ при $h\to 0$ равномерно по $t\in[0,T-2\delta]$, и предельная функция непрерывна по t в норме $L_2(\Omega,\mu dx)$. Подставим теперь в (18) функцию $v=u_h\chi(0,t)$:

$$\int\limits_{D_0^t}(\mu(u_h)_tu_h+\rho\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_i})_h(u_h)_{x_j})\,dxdt=0.$$

После интегрирования первого слагаемого по t и предельного перехода $h\to 0$ будем иметь

$$\frac12\int\limits_{\Omega}\mu u^2(t,x)dx+\int\limits_{D_0^t}\rho\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dxdt=\frac12\int\limits_{\Omega}\mu u^2(0,x)dx. \tag{20}$$

Если доказать, что $u(0,x)=\varphi(x)$, то последнее соотношение совпадет с (9). С этой целью подставим в тождество (9) непрерывную пробную функцию $v(t,x)=\eta(\frac{t}{\varepsilon})\psi(x)$, где $\eta(t)=1-t$ при $t\in[0,1]$ и $\eta(t)$ постоянна в оставшихся интервалах $(-\infty,0]$, $[1,\infty)$. Поскольку $v_t=-\frac{1}{\varepsilon}\psi(x)$, то тождество (9) принимает вид

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\mu(x)\psi(x)u(t,x)dtdx+l^{\varepsilon}(\psi)=\int\limits_{\Omega}\mu(x)\varphi(x)\psi(x)dx,$$

где линейный функционал $l^{\varepsilon}(\psi)$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. После предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\mu(x)\psi(x)u(0,x)dx=\int\limits_{\Omega}\mu(x)\varphi(x)\psi(x)dx$$

при любом $\psi\in C_0^{\infty}(\Omega)$. Это доказывает выполнение начального условия $u(0,x)=\varphi(x)$.

3. Оценка решения сверху

Сначала установим две оценки, характеризующие убывание решения задачи (1), (3), (4) при $|x| \to \infty$.

Предложение 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией φ, равной нулю вне шара радиуса R_0. Пусть выполнено неравенство*

$$\rho(x) \leqslant C\mu(x), \qquad C > 0, \qquad x \in \Omega. \tag{21}$$

Тогда для всех $t > 0$, $r \geq R_0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx \leqslant e \exp\left(-\widetilde{C} t^{-1}(r-R_0)^2\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{22}$$

где $\widetilde{C}$ — постоянная зависящая от γ и γ_1.

Доказательство.

Пусть $\xi(\tau, r, \varrho)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при $\tau \leqslant r$ и единице при $\tau \geq r + \varrho$. В оставшемся интервале она линейна $\dfrac{\partial \xi}{\partial \tau} = \dfrac{1}{\varrho}$. Подставив в тождество (18) пробную функцию $v = \eta(x; r, \varrho)u_h$, $\eta(x) = \xi^2(|x|, r, \varrho)$, получим

$$\int\limits_{D^T} \left[\frac{1}{2}\mu(u_h^2\eta)_t + \sum_{i,j=1}^{n} \rho(a_{ij}u_{x_i})_h(\eta u_h)_{x_j}\right] dxdt = 0. \tag{23}$$

После предельного перехода в равенстве (23) при $h \to 0$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} \mu(u^2(T,x) - \varphi^2(x))\eta dx + 2\int\limits_{D^T} \sum_{i,j=1}^{n} \rho a_{ij}u_{x_i}(\eta u)_{x_j} dxdt = 0.$$

Отсюда, в силу условия $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega[R_0]$, для любых $r \geq R_0$ и $\varrho > 0$ нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mu\eta u^2(T,x)dx + 2\int\limits_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^{n} \eta a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant -2\int\limits_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}u\frac{\partial \eta}{\partial x_j} dxdt \leqslant 2\int\limits_{D^T} \rho\gamma_1|u\nabla u\nabla\eta|dxdt. \tag{24}$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \mu\eta u^2(T,x)dx + \int\limits_{D^T} \gamma\rho\eta|\nabla u|^2 dxdt \leqslant 2\int\limits_{D^T} \rho\gamma_1|u\nabla u\nabla\eta|dxdt.$$

Используя вид функции η, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r+\varrho]} \mu u^2(t,x)dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r+\varrho]} \rho\gamma|\nabla u|^2 dxdt \leqslant \frac{C}{\varrho^2}\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega[r+\varrho]\setminus\Omega[r]} \rho u^2 dxdt.$$

Вводя обозначение

$$H_r(t) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \mu u^2(x,t)dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \rho\gamma|\nabla u|^2 dxdt,$$

пользуясь условием (21), устанавливаем, что

$$H_{r+\varrho}(t) \leqslant \frac{C}{\varrho^2} \int\limits_0^t H_r(\tau) d\tau. \tag{25}$$

Неравенство (25) будем применять индуктивно для последовательности r_i, $i = 0, 1, 2, ...k$, $r_{i+1} = r_i + \varrho$, $r_0 = R_0$. Учитывая, что из (20) следует неравенство $H_r(t) \leqslant A = \int\limits_\Omega \mu(x)\varphi^2(x)dx$, $r > 0$, $t > 0$ будем иметь

$$H_{R_0+\varrho}(t) = \frac{ACt}{\varrho^2}. \tag{26}$$

Далее индукцией по k установим неравенство

$$H_{r_k}(t) \leqslant \frac{AC^k t^k}{\varrho^{2k} k!}. \tag{27}$$

Действительно,

$$H_{r_k+\varrho}(t) \leqslant \frac{C}{\varrho^2} \int\limits_0^t H_{r_k}(\tau) d\tau \leqslant \frac{C}{\varrho^2} \int\limits_0^t \frac{AC^k \tau^k}{\varrho^{2k} k!} d\tau = \frac{AC^{k+1} t^{k+1}}{\varrho^{2(k+1)} (k+1)!},$$

что завершает индукцию. Пользуясь неравенством Стирлинга, из (27) нетрудно получить

$$H_{r_k}(t) \leqslant \frac{AC^k e^k t^k}{\sqrt{2\pi k} \varrho^{2k} k^k} \leqslant A \exp\left(-k \ln \frac{\varrho^2 k}{Cet}\right). \tag{28}$$

Выберем k равным целой части числа $\dfrac{(r-R_0)^2}{Ce^2 t}$. Если $k = 0$, то $\dfrac{(r-R_0)^2}{Ce^2 t} < 1$ и $H_r(t) \leqslant A = eAe^{-1}$, откуда следует неравенство (22). Если $k \geq 1$, то $k \geq \dfrac{(r-R_0)^2}{2Ce^2 t}$. Теперь выбираем $\varrho = (r - R_0)/k$. Тогда $r_k = r$ и $\varrho^2 k = \dfrac{(r-R_0)^2}{k} \geq Ce^2 t$. Следовательно, $\dfrac{\varrho^2 k}{Cet} \geq 1$. Поэтому из (28) следует, что $H_r(t) = H_{r_k}(t) \leqslant Ae^{-k}$. Тем самым, неравенство (22) установлено.

Предложение 2. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией φ, равной нулю вне шара радиуса R_0. Тогда для всех $t > 0$, $r \geq R_0 + 1$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx \leqslant C \exp\left(-2\nu \int\limits_{R_0+1}^r \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)} ds\right) \int\limits_\Omega \mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{29}$$

где C, ν — постоянные зависящие от γ и γ_1, а C – еще и от функции $\widetilde{\lambda}$.

Доказательство.

Пусть $\xi(\tau, r)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при $\tau \leqslant R_0$, линейная при $R_0 < \tau < R_0 + 1$ и равная единице при $\tau \geq r$. В оставшемся интервале она удовлетворяет условию $\dfrac{\partial \xi}{\partial \tau} = \nu\sqrt{\widetilde{\lambda}}\xi$, число ν выберем ниже.

Легко видеть, что $\xi_\tau = \xi(R_0 + 1, r)$ при $\tau \in (R_0, R_0 + 1)$, где

$$\xi(R_0+1, r) = \exp\left(-\nu \int\limits_{R_0+1}^r \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)} ds\right).$$

Подставив в тождество (18) пробную функцию $v = \eta(x;r)u_h$, $\eta(x;r) = \xi^2(|x|, r)$, получим

$$\int\limits_{D^T} \left[\frac{1}{2}\mu(u_h^2\eta)_t + \sum_{i,j=1}^n \rho(a_{ij}u_{x_i})_h(\eta u_h)_{x_j}\right] dxdt = 0. \tag{30}$$

После предельного перехода в равенстве (30) при $h \to 0$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} \mu(u^2(T,x) - \varphi^2(x))\eta dx + 2\int\limits_{D^T} \sum_{i,j=1}^{n} \rho a_{ij} u_{x_i} (\eta u)_{x_j} dxdt = 0.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mu\eta u^2(T,x)dx + 2\int\limits_{D^T} \rho \sum_{i,j=1}^{n} \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{D^T} \rho\gamma_1 |u\nabla u \nabla\eta| dxdt. \tag{31}$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \xi^2 \mu u^2 dx + \int\limits_{D^T} \gamma\rho\xi^2 |\nabla u|^2 dxdt \leqslant \int\limits_{D^T} \rho\gamma_1 \left(\varepsilon\xi^2|\nabla u|^2 + \frac{u^2\xi'^2}{\varepsilon} dx\right) dt.$$

Взяв $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \xi^2 \mu u^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{D^T} \rho\xi^2 |\nabla u|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_1^2}{\gamma}\left(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega[r]\setminus\Omega[R_0+1]} \nu^2\rho u^2\xi^2\widetilde{\lambda} dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega[R_0+1]\setminus\Omega[R_0]} \rho u^2\xi^2(R_0+1) dxdt\right). \tag{32}$$

Используя вид функции ξ, преобразуем последние слагаемые

$$\int\limits_{\Omega[r]\setminus\Omega[R_0+1]} \nu^2\rho u^2\xi^2\widetilde{\lambda} dx = \int\limits_{R_0+1}^{r} \nu^2\xi^2(\tau)\widetilde{\lambda}(\tau)d\tau \int\limits_{S_\tau} \rho u^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R_0+1}^{r} \nu^2\xi^2(\tau)d\tau \int\limits_{S_\tau} \rho|\nabla u|^2 dS = \nu^2 \int\limits_{\Omega[r]\setminus\Omega[R_0+1]} \rho\xi^2|\nabla u|^2 dx. \tag{33}$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\Omega[R_0+1]\setminus\Omega[R_0]} \rho u^2 dx \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{[R_0,R_0+1]} \widetilde{\lambda}(\tau)} \int\limits_{\Omega[R_0+1]\setminus\Omega[R_0]} \rho|\nabla u|^2 dx. \tag{34}$$

Возьмем $\nu = \dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$. Подставляя (33) и (34) в (32) и оценивая правую часть (34) с помощью (20), устанавливаем неравенство (29), $C = 2\gamma_1^2/(\gamma \inf\limits_{[R_0,R_0+1]} \widetilde{\lambda}(\tau))$.

Теорема 2. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией φ, равной нулю при $|x| > R_0$, и выполнено неравенство (21). Тогда найдется число $\nu_2 > 0$, зависящее только от n, γ_1, R_0 такое, что для всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)u^2(t,x)dx \leqslant C\exp\left(-\nu_2 t\lambda(r(t))\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx, \tag{35}$$

где $r = r(t)$ произвольная функция, удовлетворяющая неравенству $t\lambda(r) \leqslant t^{-1}(r-R_0)^2$. Постоянная C зависит от γ, γ_1 и n.

Доказательство теорем 1,2.

Пусть $T > 0$ – произвольное число. Введем обозначение

$$\varepsilon = \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx.$$

Справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx \leqslant \varepsilon + \int\limits_{\Omega[r]} \mu u^2(t,x)dx. \tag{36}$$

Так как функция $u(t,x)$ для почти всех $t \in (0,T)$ является элементом пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$, то из (5) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx \leqslant \varepsilon + \lambda^{-1}(r) \int\limits_{\Omega} \rho|\nabla u|^2 dx. \tag{37}$$

Для функции $E(t) = \int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx$ с помощью соотношения, вытекающего из (20)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mu u^2(t,x)dx \leqslant -\gamma \int\limits_{\Omega} \rho|\nabla u|^2 dx,$$

выводим неравенство

$$\gamma(E(t)-\varepsilon)\lambda(r) \leqslant -\frac{d}{dt}E(t).$$

Решая его, находим

$$E(T) - \varepsilon \leqslant e^{-T\lambda(r)\gamma}E(0). \tag{38}$$

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся оценкой (22):

$$\varepsilon \leqslant e \exp\left(-\widetilde{C}T^{-1}(r-R_0)^2\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x)dx.$$

Тогда

$$E(T) \leqslant E(0)\left(e\exp\left(-\widetilde{C}T^{-1}(r-R_0)^2\right) + e^{-T\lambda(r)\gamma}\right). \tag{39}$$

Последнее неравенство справедливо при всех $r \geq R_0$. Естественно взять инфимум правой части по r. Но, поскольку точка инфимума не находится конструктивным способом, можно взять такое значение $r(T) > R_0$ (по возможности меньшее), чтобы выполнялось неравенство

$$T^{-1}(r-R_0)^2 \geq T\lambda(r).$$

Возможность выбора такого $r(T)$ следует из ограниченности функции $\lambda(r)$. Подставляя $r = r(T)$ в (39), получаем оценку теоремы 2.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся оценкой (29):

$$\varepsilon \leq C\exp\left(-2\nu \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds\right) \int\limits_{\Omega} \mu\varphi^2(x)dx.$$

Выберем число $r = r(T)$ (по возможности большее) так, чтобы

$$T\lambda(r) \geq \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)}ds.$$

Тогда из (38) вытекает неравенство (7) теоремы 1.

Покажем теперь, что функция $\lambda(r)$ непрерывна в достаточно широкой ситуации. Назовем область Ω регулярной, если существует семейство диффеоморфизмов $\varphi_{r_1,r_2} : \Omega[r_1] \to \Omega[r_2]$, $0 < r_1 < r_2$ таких, что $\varphi_{r_1,r_2}(x) \to id$ в $C^1(\Omega[r_1])$ как при $r_1 \to r_2$, так и при $r_2 \to r_1$.

Покажем, что для регулярной области функция $\lambda(r)$ будет непрерывной. Для любого $\varepsilon > 0$, $r > 0$ существует функция $g_r \in C_0^1(\Omega)$ (зависящая от ε) такая, что $F_r(g_r) < \lambda(r) + \varepsilon$. Очевидно, что $\lambda(r_1) \leq F_{r_1}(g_{r_2})$. Поэтому

$$\lim\sup_{r_1 \to r_2} \lambda(r_1) \leq \lambda(r_2) + \varepsilon.$$

Далее, $F_{r_2}(g_{r_1}(\varphi_{r_1,r_2}(x))) \geq \lambda(r_2)$. Следовательно,

$$\lambda(r_2) \leq \lim\inf_{r_1 \to r_2} F_{r_2}(g_{r_1}(\varphi_{r_1,r_2}(x))) =$$

$$= \lim\inf_{r_1 \to r_2} F_{r_1}(g_{r_1}(\varphi_{r_1,r_2}(x))) = \lim\inf_{r_1 \to r_2} F_{r_1}(g_{r_1}(x)) \leq \varepsilon + \lim\inf_{r_1 \to r_2} \lambda(r_1).$$

Из полученных соотношений, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, следует непрерывность функции $\lambda(r)$ слева. Непрерывность справа доказывается аналогично.

4. Примеры

Ограничимся построением примеров в случае $n = 2$, хотя аналогичные примеры несложно адаптировать к многомерной ситуации для области вращения

$$\Omega_f = \{(x_1, x')|\ x_1 > 0; |x'| < f(x_1)\},$$

определяемой непрерывной положительной функцией $f(x_1)$, $f(x_1) \geq 1$, $x_1 > 0$. Получим некоторые оценки функций $\lambda, \widetilde{\lambda}$ в случае плоской области Ω_f. Для простоты будем ссылаться на вариант теоремы 1, когда области $\Omega[r], S_r$ заменены на $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$ и $S_r = \{(x_1, x') \in \Omega|\ x_1 = r\}$.

Выведем аналог неравенства Стеклова-Фридрихса с весами. Пусть $g(s) \in C^1[0, r]$ и $g(0) = 0$. Возведя в квадрат равенство

$$g(s) = g(s) - g(0) = \int_0^s g'(t)dt,$$

нетрудно получить

$$g^2(s) \leqslant \int_0^r \rho^{-1}(t)dt \int_0^r \rho(t)(g'(t))^2 dt.$$

Домножим это на $\mu(s)$ и проинтегрируем по s :

$$\int_0^r \mu(s)g^2(s)ds \leqslant \int_0^r \mu(s)ds \int_0^r \rho^{-1}(t)dt \int_0^r \rho(t)(g'(t))^2 dt.$$

Пусть теперь $g(x_1, x_2) \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда имеем

$$\int_0^{f(x_1)} \mu(x)g^2(x)dx_2 \leqslant \int_0^{f(x_1)} \mu(x)dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho^{-1}(x)dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2 dx_2. \tag{40}$$

Введем обозначение $\Lambda(r) = \sup\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant r} M(x_1)$, где

$$M(x_1) = \int_0^{f(x_1)} \mu(x)dx_2 \int_0^{f(x_1)} \rho^{-1}(x)dx_2.$$

Тогда

$$\int_0^{f(x_1)} \mu(x)g^2(x)dx_2 \leqslant \Lambda(r) \int_0^{f(x_1)} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2 dx_2. \tag{41}$$

Или, интегрируя по x_1, получим

$$\int\limits_{\Omega[r]} \mu(x) g^2(x) dx \leqslant \Lambda(r) \int\limits_{\Omega[r]} \rho(x)(g'_{x_2}(x))^2 dx. \tag{42}$$

В качестве $\mu(x)$ и $\rho(x)$ рассмотрим функции

$$\rho(x_1, x_2) = \begin{cases} \widetilde{\rho}(x_1)(f(x_1) - |x_2|)^{\alpha}, & |x_2| \in [f(x_1) - 1, f(x_1)]|, \\ \widetilde{\rho}(x_1), & |x_2| < f(x_1) - 1, \end{cases}$$

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} \widetilde{\mu}(x_1)(f(x_1) - |x_2|)^{\beta}, & |x_2| \in [f(x_1) - 1, f(x_1)]|, \\ \widetilde{\mu}(x_1), & |x_2| < f(x_1) - 1, \end{cases}$$

где $|\alpha| < 1$, $\beta > -1$. Функции $\widetilde{\mu}(x_1), \widetilde{\rho}(x_1)$ определим ниже. Потребуем для простоты, чтобы $f(r) \geq \dfrac{|\alpha|}{1-|\alpha|}$ и $f(r) \geq \dfrac{-\beta}{1+\beta}$ при $r \geq R_0$.

Вычисляя $M(x_1)$ при $\mu = \rho$, из (41) находим, что

$$\widetilde{\lambda}(r) \geq \left[\left(f(r) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(f(r) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^{-1} \geq \frac{1}{2f^2(r)}, \tag{43}$$

при $r \geq R_0$. Подставляя эту оценку в (29), получаем

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega(r)} \mu u^2(t,x) dx \leqslant C \exp\left(-2\nu \int\limits_{R_0+1}^{r} \frac{ds}{f(s)}\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x) dx.$$

Легко видеть также, что

$$\Lambda(r) = \sup_{0 \leqslant x_1 \leqslant r} \frac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} \left(f(x_1) - \frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(f(x_1) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \leqslant$$

$$\max\left(\sup_{0 \leqslant x_1 \leqslant r} 4\frac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} f^2(x_1), \sup_{0 \leqslant x_1 \leqslant R_0} 4\frac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} \frac{|\beta|}{1+\beta} \frac{|\alpha|}{1-\alpha}\right).$$

Для простоты будем предполагать, что функция $\dfrac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} f^2(x_1)$ возрастает и $\dfrac{\widetilde{\mu}(R_0)}{\widetilde{\rho}(R_0)} f^2(R_0) \geq \sup\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant R_0} \dfrac{\widetilde{\mu}(x_1)}{\widetilde{\rho}(x_1)} \dfrac{|\beta|}{1+\beta} \dfrac{|\alpha|}{1-\alpha}$. Ввиду (42) имеем $\lambda(r) \geq \Lambda^{-1}(r)$, поэтому

$$\lambda(r) \geq \frac{\widetilde{\rho}(r)}{4\widetilde{\mu}(r) f^2(r)}. \tag{44}$$

Несколько загрубляя оценку Теоремы 1 (см. ее доказательство), можно функцию $r(t)$ выбрать удовлетворяющей неравенству $\dfrac{t\widetilde{\rho}(r)}{\widetilde{\mu}(r) f^2(r)} \geq \displaystyle\int\limits_{R_0+1}^{r} \frac{ds}{f(s)}$. Тогда оценка (7) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x) u^2(t,x) dx \leqslant C \exp\left(-\nu_2 \int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)}\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x) dx. \tag{45}$$

В частности, если $f(s) = s^p, p \in (0,1) : \displaystyle\int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \leqslant \frac{r^{1-p}}{1-p}$. Пусть для простоты $\dfrac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{\mu}} = \dfrac{r^q}{1-p}, q < 1-p$, тогда неравенство для выбора $r(t)$ обретает вид $t \geq r^{1-p-q}$, допустим выбор $r(t) = t^{(1-p-q)^{-1}}$. В таком случае оценка (45) обретает вид

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x) u^2(t,x) dx \leqslant C_1 \exp\left(-C_2 t^{\frac{1-p}{1-p-q}}\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x) dx.$$

Отметим, что в многомерном случае функция $f(s) = s^p$ порождает параболоид вращения и все предыдущие выкладки сохраняются с соответствующими изменениями констант.

В случае $f(s) = s$ имеем внутренность угла на плоскости (или конуса в многомерном случае). Тогда $\int\limits_{R_0+1}^{r(t)} \frac{ds}{f(s)} \leqslant \ln r$. В качестве примера подберем функции $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\mu}$ так, чтобы $\frac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{\mu}} = \frac{\ln r}{r^q}$, $q > 0$. Тогда неравенство для выбора $r(t)$ обретает вид $t \geq r^q$. Выберем $r(t) = t^{1/q}$. Теперь оценка (45) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x) u^2(t,x) dx \leqslant C_3 \exp\left(-C_4 \ln t\right) \int\limits_{\Omega} \mu(x)\varphi^2(x) dx.$$

5. Оценка снизу

Напомним неравенство Гарнака, установленное Ю. Мозером в [23] для равномерно параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x) u_{x_i})_{x_j}. \tag{46}$$

Сформулируем его в удобном для нас виде: для неотрицательного в цилиндре $Q = (0, 9C_1\rho^2] \times B(2\rho, \mathbf{w}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $C_1 > 1$, решения уравнения (46) справедливо неравенство

$$\max_{Q^-} u(\tau, x) \leqslant H \min_{Q^+} u(\tau, x),$$

где $Q^- = [\rho^2, 2\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w})$, $Q^+ = [8C_1\rho^2, 9C_1\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w})$, $B(\rho, \mathbf{w})$ – шар радиуса ρ с центром в точке $\mathbf{w} \in \Omega$, а постоянная $H \geq 1$ зависит только от n, C_1 и констант параболичности уравнения.

Напомним понятие A_2-веса, введенное Макенхауптом. Это измеримая функция $\vartheta(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_K \vartheta(x) dx \times \int\limits_K \frac{1}{\vartheta(x)} dx < C_0 |K|^2$$

для любого куба $K \subset \mathbb{R}^n$. В работе [24] доказано, что если в Q выполнено равенство $\rho = \mu = \vartheta$, где ϑ — некоторый A_2-вес, то для любого неотрицательного решения в Q уравнения (1) выполнено неравенство Гарнака. При этом постоянная H зависит только от C_0, C_1, n, γ и γ_1. Покажем, что можно отказаться от требования $\rho = \mu$, если $\mu = \vartheta$ и выполнены неравенства

$$C_1^{-1} \leqslant \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} \leqslant C_1, \ \ x \in B(2\rho, \mathbf{w}). \tag{47}$$

После замены $\tau = \frac{\rho(\mathbf{w})}{\mu(\mathbf{w})} t$ получаем уравнение

$$div(\rho(x) a(t,x) \nabla u) = \mu(x) u_t = \frac{\mu(x)\rho(\mathbf{w})}{\mu(\mathbf{w})} u_\tau$$

или при $x \in B(2\rho, \mathbf{w})$:

$$div(\vartheta(x) \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} a(\tau, x) \nabla u) = \vartheta(x) u_\tau.$$

Последнее уравнение в Q имеет вид (1) с $\rho = \mu = \vartheta$ и $\widetilde{a} = \frac{\rho(x)\mu(\mathbf{w})}{\mu(x)\rho(\mathbf{w})} a$. Если переменные $(\tau, x) \in Q$, то $(t, x) \in \widetilde{Q} = (0, 9C_1\rho^2 \frac{\mu(\mathbf{w})}{\rho(\mathbf{w})}] \times B(2\rho, \mathbf{w})$. Очевидным образом изменяются $Q^- \to \widetilde{Q}^-$ и $Q^+ \to \widetilde{Q}^+$. Для этих новых цилиндров остается справедливым неравенство Гарнака.

Таким образом, если в окрестности каждой точки $\mathbf{w} \in \Omega$ выполнено неравенство (47) и функция $\mu(x)$ в этой окрестности совпадает с некоторым весом ϑ (зависящим от выбора точки $\mathbf{w}$), то неотрицательное решение уравнения (1) либо всюду положительно в Ω, либо тождественно равно нулю. Это доказывается стандартной техникой, если радиус окрестности непрерывно зависит от точки. Далее будет рассматриваться положительное решение уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть $s > pf(s), p \in (0,1)$ при $s \geq z_0$, Ω_f – область вращения и вес $\mu(x)$ совпадает в $\Omega_{pf} \cap \{x_1 > z_0\}$ с некоторым A_2 — весом ϑ. Пусть выполнены неравенства*

$$\frac{f(x_1')}{f(x_1'')} \leqslant 2, \qquad \frac{\rho(x')\mu(x'')}{\mu(x')\rho(x'')} \leqslant C_1 \tag{48}$$

при всех $x', x'' \in \Omega_{pf}$ таких, что x_1', $x_1'' \in [s - pf(s), s + pf(s)]$ и всех $s \geq z_0$. Тогда для положительного решения уравнения (1) выполнено неравенство

$$\min_{x \in B(r', \mathbf{w})} u(t,x) \geq u(t_1, (z_0, 0)) \exp\left(-C_2 \int\limits_{z_0}^{\widetilde{r}(t)} \frac{ds}{f(s)}\right),$$

где $B(2r', \mathbf{w})$ – некоторый шар, вписанный в $\Omega_{pf} \cap \{z_0 < x_1 < \widetilde{r}(t)\}$; $t_1 > 0$ – некоторое фиксированное число, $\widetilde{r}(t), t \geq t_1$, определяется как наименьшее r, удовлетворяющее неравенству

$$\int\limits_{z_0}^{r} \frac{ds}{f(s)} \geq tL(r), \quad L(r) = \inf_{[z_0, r]} \frac{4\rho(z,0)}{\mu(z,0)pf^2(z)},$$

а постоянная C_2 зависит только от p, C_0, C_1 n, γ, γ_1.

Доказательство. Пусть $y_0 = z_0$ и $r \geq z_0$ – произвольное число. Строим последовательность касающихся шаров с радиусами r_i, $i = 1, 2, ..$ и точками касания $\mathbf{v}_i = (y_{i-1} + 2r_i, 0)$, такими, что удвоенный шар $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$, где $\mathbf{w}_i = (z_i, 0)$, $z_i = y_{i-1} + r_i$, касается множества $\partial\Omega_{pf}$ изнутри. Отметим, что $r_{i+1} \leq 3r_i$, так как в противном случае $B(2r_i, \mathbf{w}_i) \subset B(2r_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1})$, то есть шар $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ не касается границы Ω_{pf}.

Обозначим $\mu_i = \mu(\mathbf{w}_i)$, $\rho_i = \rho(\mathbf{w}_i)$, $t_1 = r_1^2 \dfrac{\mu_1}{\rho_1}$; $t_{i+1} = t_i + (9C_1 - 1)\dfrac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2$.

Если при некотором i выполнено неравенство $r_i \leqslant r_{i+1}$, то при $s = z_{i+1}$, имеем $s - z_i \leqslant 2r_{i+1} \leqslant pf(s)$, поэтому из (48) получаем неравенство

$$\frac{\mu_{i+1}\rho_i}{\rho_{i+1}\mu_i} \leqslant C_1. \tag{49}$$

Если же $r_i > r_{i+1}$, то полагаем $s = z_i$, $z_{i+1} - s < 2r_i < pf(s)$, и из (48) снова получаем (49). Кроме того, при $s = z_i$ из (48) вытекают также аналог неравенства (47)

$$C_1^{-1} \leqslant \frac{\rho(x)\mu(w_i)}{\mu(x)\rho(w_i)} \leqslant C_1, \ x \in B(2\rho_i, w_i)$$

и неравенство

$$\frac{f(x_1')}{f(x_1'')} \leqslant 2, \ \forall x', x'' \in [s - 2r_i, s + 2r_i]. \tag{50}$$

Рассмотрим цилиндры

$$\widetilde{Q}_i = \left[t_i - \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2, t_i + (9C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2\right] \times B(2r_i, \mathbf{w}_i),$$

$$\widetilde{Q}_i^- = \left[t_i, t_i + \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2\right] \times B(r_i, \mathbf{w}_i),$$

$$\widetilde{Q}_i^+ = \left[t_i + (8C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2, t_i + (9C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2\right] \times B(r_i, \mathbf{w}_i).$$

Покажем, что если $t_{i+1} \leq T$, то $\widetilde{Q}_i \subset (0, T] \times \Omega_{pf}$. Для этого достаточно установить, что $t_i \geq \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2$. Первый шаг индукции выполнен. Далее, ввиду (49),

$$t_{i+1} = t_i + (9C_1 - 1)\frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \geq 9C_1 \frac{\mu_i}{\rho_i} r_i^2 \geq \frac{\mu_{i+1}}{\rho_{i+1}} r_{i+1}^2,$$

что завершает индукцию.

Пусть k – первый номер, такой что $y_{k+1} \geq r$ или $t_{k+1} \geq T$. Тогда по неравенству Гарнака

$$u(t_1, (y_0, 0)) \leqslant Hu(t_2, \mathbf{v}_1) \leqslant ... \leqslant H^k u(t_{k+1}, \mathbf{v}_k).$$

Отсюда $u(t_{k+1}, \mathbf{v}_k) \geq H^{-k}C_3$. Оценим сверху число k. Пусть s_i – абсцисса одной из точек касания шара $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ границы области Ω_{pf}. Ясно, что $|z_i - s_i| \leq 2r_i$, $pf(s_i) \leq 2r_i$, поэтому, ввиду (50), $f(s)/2 \leq f(s_i)$ при $s \in [y_{i-1}, y_i]$, и $r_i \geq pf(z_i)/4$. Тогда

$$k = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i - y_{i-1}}{2r_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i - y_{i-1}}{pf(s_i)} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{2ds}{pf(s)} \leqslant \int\limits_{y_0}^{r} \frac{2ds}{pf(s)}.$$

Пусть $\dfrac{\mu_m}{\rho_m} r_m^2 = \max\limits_{j \leqslant k} \dfrac{\mu_j}{\rho_j} r_j^2 \geq \max\limits_{z \in [z_0, r]} \dfrac{\mu(z,0)}{64C_1\rho(z,0)}(pf(z))^2$. Последнее неравенство следует из (48). Для номеров $i = m+1, m+2, \ldots$ заменим шары $B(2r_i, \mathbf{w}_i)$ на шары $B(2r_m, \mathbf{w}_m)$. Цилиндры $\widetilde{Q}_i, i = m+1, m+2, \ldots$ изменятся соответствующим образом. Поскольку каждый цилиндр увеличивает t_i на величину $(9C_i - 1)\dfrac{\mu_m}{\rho_m} r_m^2$, то до значения t может понадобиться не более $N = \left[\dfrac{t\rho_m}{(9C_1 - 1)\mu_m r_m^2}\right] \leqslant 2tL(r)/p$ цилиндров. Таким образом, получаем оценку

$$\min_{x \in B(r_m, \mathbf{w}_m)} u(t,x) \geq H^{-(k+N)} C_3 \geq \exp\left(-\left(\int\limits_{z_0}^{r} \frac{2ds}{pf(s)} + 2tL(r)/p\right) \ln H\right), \tag{51}$$

из которой следует утверждение теоремы.

Применим неравенство (51) к примеру из §4, имеем

$$L(r) = \inf_{[z_0, r]} \frac{4\widetilde{\rho}(z)}{\widetilde{\mu}(z) p f^2(z)} = \frac{4\widetilde{\rho}(r)}{\widetilde{\mu}(r) p f^2(r)} \leqslant 16\lambda(r)/p.$$

Воспользовавшись еще неравенством (43), получим

$$\int\limits_{\Omega(r)} \mu(x) u^2(t,x) dx \geq \pi r_m^2 \min_{x \in B(r_m, v_m)} \mu(x) C_3 \exp\left(-\frac{8}{p^2} \ln H \left(\int\limits_{z_0}^{r} p\sqrt{\widetilde{\lambda}}(s) ds\right) + 8t\lambda(r)\right).$$

Теперь выбор $r = r(t)$ как во введении (в предположении непрерывности функции $\lambda(r)$) :

$$t\lambda(r) = \int\limits_{R_0+1}^{r} \sqrt{\widetilde{\lambda}(s)} ds,$$

в определенном смысле, подтверждает точность оценки сверху (7), если множитель перед экспонентой в последнем неравенстве не слишком мал.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гущин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. Т. 126. 1973. С. 5–45.
2. Гущин А.К. *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 101(143). № 4(12). 1976. С. 459–499.
3. Лежнев А.В. *О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 129. № 2. 1986. С. 186–200.
4. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Матем. сб. Т. 111(153). 1980. № 1. С. 95–115.
5. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. Т. 111(153). № 4. 1980. С. 503–521.
6. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. Т. 195. № 3. 2004. С. 115–142.

7. Акулов В.Ф., Шишков А.Е. *Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях* // Матем. сб. Т. 182. № 8. 1991. С. 1200–1210.
8. Гущин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 119(161). № 4(12). 1982. С. 451–508.
9. Гущин А.К. *Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 97(139). №2(6). 1975. С. 242–261.
10. Денисов В.Н. *О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности* //Дифференц. уравнения. Т. 24. 1988. С. 288–299.
11. Жиков В.В. *О стабилизации решений параболических уравнений* // Матем. сб. Т. 104(146). 1977. С. 597–616.
12. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191. № 2. 2000. С. 91–131.
13. Кожевникова Л.М. *О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области* // Известия РАН. Т. 65. № 3. 2001. С. 51–66.
14. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196. № 7. 2005. С. 67-100.
15. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье-Стокса:* Дис. докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН. 1994. 225 с.
16. Мукминов Ф.Х. *Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 23. № 10. 1987. С. 1172–1180.
17. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравения. Т. 25. № 3. 1989. С. 491–498.
18. Тедеев А.Ф. *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 27. № 10. 1991. С. 1795–1806.
19. Ушаков В.И. *О поведении решений третьей смешанной задачи для параболических уравнений второго порядка при $t \to \infty$* // Дифференц. уравнения. Т. 15. 1979. С. 310–320.
20. Жиков В.В. *О весовых соболевских пространствах* // Матем. сб. Т. 189(8). 1998. С. 27–58
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.
22. Крылов Н.В., Сафонов М.В. *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 44. № 1. 1980. С. 161 -175.
23. J.A. Moser *Harnack inequality for parabolic differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. V. 17. № 1. 1964. P. 101–134.
24. F. Chiarenza, R. Serapioni *A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. № 73. 1985. P. 179–190.

Венера Фидарисовна Вильданова
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gilvenera@mail.ru