ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 54-71.

НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С НЕСТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С.А. ИСХОКОВ, М.Г. ГАДОЕВ, И.А. ЯКУШЕВ

Аннотация. Для эллиптических операторов высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидового пространства R_n с нестепенным вырождением доказывается весовой аналог неравенства Гординга, и с помощью этого неравенства изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле, решение которой ищется в замыкание класса бесконечнодифференцируемых финитных функций. Вырождение коэффициентов оператора по разной независимой переменной характеризуется с помощью разных функций. Предполагается, что младшие коэффициенты оператора принадлежат некоторым весовым L_p-пространствам. Для одного класса эллиптических операторов со степенным вырождением в полупространстве изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями.

Ключевые слова: эллиптический оператор, нестепенное вырождение, неравенство Гординга, вариационная задача Дирихле.

Mathematics Subject Classification: 35J35, 35D05, 35J70, 46E35, 35J40

1. Введение

Из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1, 2]) известно, что неравенство Гординга [3] играет важную роль в исследовании разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических уравнений методами функционального анализа. Однако исследование краевых задач для эллиптических уравнений с вырождением методами функционального анализа, в основном, проводилось без использования неравенства Гординга (см., например, [4]–[10]). В случае дифференциальных операторов с вырождением, неравенство Гординга было доказано в работах [11, 12]. Эллиптические операторы, рассмотренные в [11], имеют специальный вид, заданы в ограниченной области Ω^+, расположенной в полупространстве $E^+_{n+1} = \{(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y) : y > 0\}$ и прилегающей к гиперплоскости $y = 0$. В их определении вместо обычных операторов дифференцирования использовались операторы вида

$$\widetilde{D}^{m+r} = D^m_x \widetilde{D}^r_y, \quad D^m_x = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}, \quad \widetilde{D}^r_y = y^r \frac{\partial^r}{(y\partial y)^r},$$

и вследствие этого вырождение имело место только на части Γ^0 границы области Ω^+, лежащей на гиперплоскости $y = 0$. Эллиптические операторы, рассмотренные в [12], заданы в произвольной (ограниченной или неограниченной) области и имеют одинаковое вырождение по всем независимым переменным.

S.A. Iskhokov, M.G. Gadoev, I.A. Yakushev, Garding inequality for higher order elliptic operators with a non-power degeneration and its applications.

Поступила 12 мая 2015 г.

В отличие от работ [11, 12], здесь рассматриваются общие эллиптические операторы высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

Часть результатов статьи в кратком виде без доказательства анонсирована в [13].

2. Функциональные пространства. Вспомогательные интегральные неравенства

Пусть R_n – n-мерное евклидово пространство и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1,n}\}$ — единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \dots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть Ω — произвольное открытое множество в R_n и пусть $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ — определенные в Ω положительные функции. Положим $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon\cdot\vec{g}(\xi)}(\xi)$, где $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \dots, g_n(\xi))$.

Далее в работе предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ связаны условием: существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon_0,\vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И. Лизоркина [14]. В [14] также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция. Предположим, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют положительные числа $\lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)$ такие, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lambda(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \nu(\varepsilon) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\varepsilon)} \leqslant \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \leqslant \nu(\varepsilon),\ \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \leqslant \frac{g_i(x)}{g_i(\xi)} \leqslant \lambda(\varepsilon),\ i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

для всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ и всех $\xi \in \Omega$.

Класс положительных функций $\sigma(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию (2.1), обозначим через $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$.

Пусть $1 \leqslant p < +\infty$ и r — натуральное число. Символом $L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})$, где целое число s такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $k = (k_1, k_2 \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 \dots + k_n \leqslant r$, с конечной полунормой

$$\|u; L^s_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=s} \int\limits_{\Omega} (\sigma(x) g_1^{k_1-r}(x) g_2^{k_2-r}(x) \dots g_n^{k_n-r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ — пространство функций $u \in L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \|u; L^r_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p + \|u; L^0_{p,r}(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \tag{2.2}$$

Пространство $W^r_p(\Omega; \sigma, \vec{g})$ банахово с нормой (2.2), и в сделанных выше предположениях при всех $p \in [1, \infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в нем [10].

Символом $L_p(\Omega;\, \sigma)$ обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u;\, L_p(\Omega; \sigma)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \sigma^p(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Для любого натурального числа m и любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon_m,\vec{g}}(\xi)$ при $\varepsilon_m = m \cdot \varepsilon/(m+1)$. Заметим, что $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi) \subset \Pi_{\varepsilon_0,\vec{g}}(\xi)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, для любого натурального числа m.

Следующая лемма (см. лемму 2 работы [10]) является обобщением известной леммы Труази [15] на рассматриваемый случай и используется при выводе весовых интегральных неравенств из безвесовых.

Лемма 2.1. [10]. *В сделанных выше предположениях относительно области Ω и положительных функций $\sigma(x)$, $g_i(x)$, $x \in \Omega$, $i = \overline{1,n}$, справедливо соотношение эквивалентности*

$$\int\limits_\Omega (\sigma(\xi)\|u; L_p(\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi))\|)^p \, d\xi \asymp \int\limits_\Omega \left(\sigma(x)(g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x))^{1/p}|u(x)|\right)^p dx,$$

где символ $\asymp$ означает наличие двусторонней оценки с некоторыми положительными константами.

Лемма 2.2. *Пусть $\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(x;\xi)$ — характеристическая функция параллелепипеда $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$. Тогда для любого натурального числа m и достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n g_1^{-1}(x) g_2^{-1}(x)\dots g_n^{-1}(x) \int \chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(x;\xi) d\xi \leqslant \left(\frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2}\right)^n, \tag{2.3}$$

где $\lambda(\varepsilon)$ — такое же число как в условии (2.1).

Доказательство. Для произвольной фиксированной точки $x \in \Omega$ вводим следующие обозначения

$$T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) = \left\{\xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}\, g_i(\xi),\ i = \overline{1,n}\right\},$$

$$D_{\varepsilon,\vec{g}}(x) = \left\{\xi \in R_n : |\xi_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}\, g_i(x),\ i = \overline{1,n}\right\}.$$

Пусть $\xi \in D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)$. Тогда из условия (2.1) следует, что $|\xi_i - x_i| < \varepsilon \cdot g_i(x)/2\lambda(\varepsilon) < \varepsilon g_i(\xi)/2$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\xi \in T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$ и поэтому $D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x) \subset T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$ для всех $x \in \Omega$. Аналогично в силу условия (2.1) доказывается, что $T_{\varepsilon,\vec{g}}(x) \subset D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Пусть $\chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi)$ – характеристическая функция параллелепипеда $\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(\xi)$. Так как $\int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi = |T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)|$, где правая часть обозначает объем параллелепипеда $T_{\varepsilon,\vec{g}}(x)$, то из доказанных выше включений следует, что

$$\left|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon)^{-1},\vec{g}}(x)\right| \leqslant \int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi \leqslant \left|D_{\varepsilon\lambda(\varepsilon),\vec{g}}(x)\right|.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda(\varepsilon)}\right)^n \leqslant g_1^{-1}(x) \cdot g_2^{-1}(x)\dots g_n^{-1}(x) \int \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(x,\xi) d\xi \leqslant \left(\frac{\lambda(\varepsilon)\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Заменяя в этом неравенстве ε через $\varepsilon_m = \varepsilon m/(m+1)$, получим (2.3). □

Лемма 2.3. *Пусть целое число s такое, что $0 \leqslant s < r$. Пусть $p \geq 1$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_0$ и удовлетворяют условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-s}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \text{при} \quad n - (r-s)p > 0;$$

$$q_0 - \text{любое конечное число при } n - (r-s)p \leqslant 0.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ и всех $v \in W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ справедливо неравенство

$$\left\| v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}, \vec{g}\right)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \tau \left\| v; W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\| + c_1 \tau^{-\mu} \left\| v; L_{q_1}(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}, \vec{g})\right\|, \tag{2.4}$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + sn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-s)n^{-1}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. В условиях этой леммы из интерполяционных неравенств для классических пространств Соболева (см. например, [16, §4.7]) следует, что

$$\left\| u^{(k)}; L_{q_0}(\Pi(0))\right\| \leqslant \tau \sum_{|l|=r} \left\| u^{(l)}; L_p(\Pi(0))\right\| +$$
$$+ \tau \left\| u; L_p(\Pi(0))\right\| + c_1 \tau^{-\mu} \left\| u; L_{q_1}(\Pi(0))\right\|, \tag{2.6}$$

где k — любой мультииндекс длины s, и число μ определяется равенством (2.5).

Неравенство (2.4) выводится из (2.6) применением леммы 2.1 и техникой, использованной при доказательстве леммы 2.2 работы [12]. □

Аналогично лемме 2.3 доказывается, что если число s такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$, и выполняются условия

$$1 \leqslant p \leqslant q_0 < +\infty,\ r - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q_0} > 0,$$

то для всех $v \in W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ имеет место неравенство

$$\left\| v; L^s_{q_0,r}\left(\Omega; \sigma(g_1 g_2 \dots g_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}}, \vec{g}\right)\right\| \leqslant M \left\| v; W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\right\|, \tag{2.7}$$

где число $M > 0$ не зависит от функции $v(x)$.

Лемма 2.4. *Пусть положительные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ и r, t — натуральные числа. Для мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \leqslant t$, определим числа q_l, λ_{kl}, s_k посредством следующих соотношений*

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \dfrac{1}{q} - \dfrac{t-|l|}{n}, & n > q(t-|l|), \\ \varepsilon_1,\ 0 < \varepsilon_1 \leqslant 1/q, & n \leqslant q(t-|l|), \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r-|k|}{n},\ \text{\textit{при}}\ n - p(r-|k|) > 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_2,\ \text{\textit{где}}\ 0 < \varepsilon_2 < 1/p,\ \text{\textit{при}}\ n - p(r-|k|) \leqslant 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{s_k} \geq \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \tag{2.11}$$

Пусть положительная функция $\sigma_{kl}(x)$ принадлежит классу $\Phi_{\varepsilon,\vec{g}}(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{kl}(x)\alpha^{-1}(x)\beta^{-1}(x) \leqslant$$
$$\leqslant c g_1^{k_1+l_1}(x) g_2^{k_2+l_2}(x) \dots g_n^{k_n+l_n}(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-t+\frac{1}{q}-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda_{kl}}} \tag{2.12}$$

для всех $x \in \Omega$; положительное число c не зависит от x.

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\right\| \leqslant \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g})\right\| \cdot \left\{ \left\| u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g})\right\| + \right.$$
$$\left. + c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha, (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{s_k}})\right\| \right\}, \tag{2.13}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k|n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}} \tag{2.14}$$

и положительная постоянная c_0 *зависит только от* $n, p, r, |k|$.

Доказательство. Пусть $|k| < r,\ |l| \leqslant t$. Так как число q_l, определенное равенством (2.8), удовлетворяет условиям

$$1 \leqslant q \leqslant q_l < \infty,\ t - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} > 0,$$

то, применяя неравенство (2.7), имеем

$$\left\| v^{(l)}; L_{q_l}\left(\Omega; \beta(x) g_1^{l_1}(x) g_2^{l_2}(x) \dots g_n^{l_n}(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-t + \frac{1}{q} - \frac{1}{q_l}}\right)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant M \left\| v; W_q^t(\Omega; \beta, \vec{g})\right\|, \tag{2.15}$$

где M – положительная константа не зависящая от $v(x)$.

Далее заметим, что при $q_0 = p_k,\ s = |k|,\ q_1 = s_k$, где $p_k = \left(\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1}\right)^{-1}$, и числа $q_l,\ \lambda_{kl},\ s_k$ определены соотношениями (2.8) – (2.11), выполняются условия леммы 2.3. Поэтому, применяя лемму 2.3, в этом случае получим

$$\left\| u^{(k)}; L_{p_k}\left(\Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}}\right)\right\| \leqslant \tau \|u; W_p^r(\Omega; \alpha, \vec{g})\| +$$
$$+ c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u; L_{s_k}(\Omega; \alpha (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{s_k}})\right\|, \tag{2.16}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k - p_k^{-1} + |k|n^{-1}}{p_k^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}}. \tag{2.17}$$

В силу равенства

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l} \tag{2.18}$$

и условия (2.12) с помощью неравенства Гельдера доказывается, что

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\right\| \leqslant \left\| v^{(l)}; L_{q_l}\left(\Omega; \beta g_1^{l_1} g_2^{l_2} \dots g_n^{l_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-t + \frac{1}{q} - \frac{1}{q_l}}\right)\right\| \times$$
$$\times \left\| u^{(k)}; L_{q_k}\left(\Omega; \alpha g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_n^{k_n} (g_1 g_2 \dots g_n)^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}}\right)\right\|. \tag{2.19}$$

Теперь легко можно заметить, что из (2.15), (2.16), (2.19) следует неравенство (2.13). Равенство (2.14) следует из (2.17) в силу равенства (2.18). □

3. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|k|, |l| \leqslant r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)},\ x \in \Omega, \tag{3.1}$$

где

$$p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r + k_1}(x) g_2^{-r + k_2}(x) \dots g_n^{-r + k_n}(x) \tag{3.2}$$

и $a_{kl}(x)$ — комплекснозначные функции.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (3.1) методами функционального анализа связано со следующей полуторалинейной формой, порожденной этим оператором

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leqslant r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \tag{3.3}$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (3.3), ранее изучалась в работе С.А. Исхокова [10] в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|,|l|\leqslant r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l} \geq c\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{3.4}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r}$. Число $c > 0$ не зависит от x, ζ. Здесь в этом разделе вместо условия (3.4) мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|,|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geq c|\xi|^{2r} \tag{3.5}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_n$; $\xi^k = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}$, c — положительное число, не зависящее от x, ξ.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (3.5) и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu \tag{3.6}$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y) = \left\{ z \in R_n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2}\varepsilon g_i(y),\ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|,|l| \leqslant r$ и $|k| + |l| \leqslant 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}\left(\Omega; (g_1 \cdot g_2 \dots g_n)^{-1/p_{kl}}\right)$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \leqslant r-1,\ |l| \leqslant r \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r,\ |l| \leqslant r-1, \end{cases}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r-|k|-|l|} < q_{kl} \leqslant \frac{n}{r-|l|}, \text{если } n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|);$$

$$\frac{n}{r-|k|-\varepsilon_1 n} < q_{kl},\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2},\ \text{ если } n > 2(r-|k|),\ n \leqslant 2(r-|l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n},\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2},\ \text{ если } n \leqslant 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \text{любое конечное число} >1, \text{ если } \ n \leqslant 2(r-|k|),\ n \leqslant 2(r-|l|). \end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$, что

$$Re\, B[u,u] \geq c_1\|u; W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 - c_2\|u; L_{2,r}^0(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2 \tag{3.7}$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда полуторалинейная форма (3.3) не содержит младшие коэффициенты, то есть когда $a_{kl}(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$ для всех мультииндексов k, l таких, что $|k|,|l| \leqslant r$ и $|k| + |l| \leqslant 2r - 1$.

Фиксируя произвольную точку $y \in \Omega$, рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_y[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{R_n} a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,\ u,v \in C_0^\infty(R_n).$$

Применяя неравенство Гординга для сильно эллиптических операторов с постоянными коэффициентами, имеем

$$\sum_{|k|=r}\int_{R_n}|u^{(k)}(x)|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\mathrm{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\int_{R_n}a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\int_{R_n}|u(x)|^2dx\right\}\tag{3.8}$$

для всех $u\in C_0^\infty(R_n)$.

Вводим обозначение

$$\Pi_m(0)=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R_n:|x_i|<\frac{m}{2(m+1)},\ i=\overline{1,n}\right\},$$

где m — натуральное число.

Берем функцию $\varphi_m(x)\in C_0^\infty(\Pi_{2m}(0))$ со следующими свойствами:

1) $0\leqslant\varphi_m(x)\leqslant 1$ для всех $x\in\Pi(0)$;

2) $\varphi_m(x)=1$ для всех $x\in\Pi_m(0)$;

3) существует число $c>0$ такое, что $|\varphi_m^{(k)}(x)|\leqslant c$ для всех $x\in\Pi(0)$ и всех мультииндексов $k:\ |k|\leqslant r$.

Пусть $u(x)$ — произвольная функция класса $C^\infty(\Pi(0))$. Продолжая функцию $v_m(x)=u(x)\varphi_m(x)$ вне множества $\Pi(0)$ нулем, получаем функцию $v_m\in C_0^\infty(R_n)$. Так как $v_m(x)=u(x)$ для всех $x\in\Pi_m(0)$, то из неравенства (3.8) для функции $v_m(x)$ следует, что

$$\sum_{|k|=r}\int_{\Pi_m(0)}|u^{(k)}(x)|^2dx\leqslant M_0\left\{\mathrm{Re}\,B_y[v_m,v_m]+\int_{\Pi(0)}|u(x)|^2dx\right\}.\tag{3.9}$$

Форму $B_y[v_m,v_m]$ представим в виде

$$B_y[v_m,v_m]=B_y^{(1)}[v_m,v_m]+B_y^{(2)}[v_m,v_m],\tag{3.10}$$

где

$$B_y^{(1)}[v_m,v_m]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_{\Pi(0)}a_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B_y^{(2)}[v_m,v_m]=B_y[v_m,v_m]-B_y^{(1)}[v_m,v_m].$$

Так как во всех интегралах, составляющих полуторалинейную форму $B_y^{(2)}[v_m,v_m]$, порядок хотя бы одной из производных $u^{(k)}(x),\ u^{(l)}(x)$ не превосходит $r-1$, то, применяя соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева без веса, а также неравенство Юнга с малым параметром, получаем: для любого достаточно малого числа $\tau>0$ существует конечное число $M(\tau)>0$ такое, что

$$|B_y^{(2)}[v_m,v_m]|\leqslant\tau\sum_{|k|=r}\int_{\Pi(0)}|u^{(k)}(x)|^2dx+M(\tau)\int_{\Pi(0)}|u(x)|^2dx.\tag{3.11}$$

Действительно, интегралы, составляющие форму $B_y^{(2)}[v_m,v_m]$, имеют следующий общий вид

$$I_{y,k,l,\mu,\nu}^{(m)}(u)=\int_{\Pi(0)}C_{k,\mu}C_{l,\nu}a_{kl}(y)\varphi_m^{(\mu)}(x)u^{(k-\mu)}(x)\varphi_m^{(\nu)}(x)\overline{u^{(l-\nu)}(x)}dx,$$

где $|\mu|+|\nu|\neq 0$, и в силу свойства 3) функций φ_m и ограниченности коэффициентов a_{kl}, $|k|=|l|=r$, для них имеет место неравенство

$$\left|I^{(m)}_{y,k,l,\mu,\nu}(u)\right|\leqslant M_0\int_{\Pi(0)}\left|u^{(k-\mu)}(x)\right|\cdot\left|u^{(l-\nu)}(x)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant M_0\left\|u^{(k-\mu)};\,L_2(\Pi(0))\right\|\cdot\left\|u^{(l-\nu)};\,L_2(\Pi(0))\right\|.$$

Далее, применяя неравенство Юнга

$$|ab|\leqslant\delta|a|^2+\frac{1}{4\delta}|b|^2,$$

где δ – достаточно малое положительное число, а также интерполяционное неравенство (2.6), можно показать, что $\left|I^{(m)}_{y,k,l,\mu,\nu}(u)\right|$ не превосходит правую часть неравенства (3.11).

Учитывая свойство 2) функций $\varphi_m(x)$, представим форму $B^{(1)}_y[v_m,v_m]$ в виде

$$B^{(1)}_y[v_m,v_m]=B^{(11)}_{y,m}[u,u]+B^{(12)}_{y,m}[u,u],\tag{3.12}$$

где

$$B^{(11)}_{y,m}[u,u]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Pi_m(0)}a_{kl}(y)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$B^{(12)}_{y,m}[u,u]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Pi^{(m)}(0)}a_{kl}(y)\varphi^2_m(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$\Pi^{(m)}(0)=\Pi(0)\setminus\Pi_m(0)=\left\{x\in R_n:\frac{m}{2(m+1)}<|x_i|<\frac{1}{2},\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Так как коэффициенты a_{kl} ($|k|=|l|=r$) ограничены, то, применяя неравенство Коши-Буняковского и принимая во внимание, что $|\Pi^{(m)}(0)|\to 0$ при $m\to\infty$, получаем

$$|B^{(12)}_{y,m}[u,u]|\leqslant\mu_m\|u;L^r_2(\Pi(0))\|^2,\tag{3.13}$$

где

$$\|u;L^r_2(\Pi(0))\|=\left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Pi(0)}\left|u^{(k)}(x)\right|^2dx\right\}^{1/2}$$

и положительные числа μ_m стремятся к нулю при $m\to\infty$.

Из представлений (3.10), (3.12) в силу неравенства (3.9) имеем

$$\|u;L^r_2(\Pi_m(0))\|^2-M_0|B^{(2)}_y[v_m,v_m]|-M_0|B^{(12)}_{y,m}[u,u]|\leqslant M_0\operatorname{Re}B^{(11)}_{y,m}[u,u].$$

Далее, подбирая натуральное число m достаточно большим и применяя неравенство (3.11) при $\tau=\dfrac{1}{m}$, а также неравенство (3.13), приходим к неравенству

$$\|u;L^r_2(\Pi_m(0))\|^2-$$

$$-c_m\|u;L^r_2(\Pi(0))\|^2-\mathbb{C}_m\|u;L_2(\Pi(0))\|^2\leqslant M_0\operatorname{Re}B^{(11)}_{y,m}[u,u]\tag{3.14}$$

для всех $u\in C^\infty(\Pi(0))$, где $c_m,\mathbb{C}_m$ — положительные числа, не зависящие от $u(x)$ и $c_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Пусть v — произвольная функция из класса $C^\infty_0(\Omega)$ и y — произвольная фиксированная точка области Ω. Отображение $z\to x$, определенное равенствами $x_i=(z_i-y_i)/(\varepsilon g_i(y))$, $i=\overline{1,n}$, отображает параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec g}(y)=\{z\in R_n:|z_i-y_i|<\varepsilon g_i(y)/2\}$ в единичный куб $\Pi(0)$, а параллелепипед $\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)$ — в $\Pi_m(0)$. При достаточно малых $\varepsilon>0$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\vec g}(y)$ содержится в области Ω, и поэтому функция $\hat v_y(x)=v(x_i\varepsilon g_i(y)+y_i)$ определена для всех $x\in\Pi(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(\Pi(0))$.

Неравенство (3.14) для функции $u(x)=\hat{v}_y(x)$ примет вид

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{\Pi_m(0)}|\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2dx-c_m\int\limits_{\Pi(0)}|\hat{v}_y^{(k)}(x)|^2dx\right\}\varepsilon^{2r}g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)-$$

$$-\mathbb{C}_m\int\limits_{\Pi(0)}|\hat{v}_y(x)|^2dx\leqslant M_0\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\varepsilon^{2r}g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y)\dots g_n^{k_n+l_n}(y)\times$$

$$\times\int\limits_{\Pi_m(0)}a_{kl}(y)\hat{v}_y^{(k)}(x)\overline{v_y^{(l)}(x)}dx.$$

В интегралах этого неравенства, переходя к новым переменным интегрирования $z_i=x_i\varepsilon g_i(y)+y_i$, получим

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz-c_m\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right\}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)\times$$

$$\times g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)-\mathbb{C}_m\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v(z)|^2dz\varepsilon^{-n}g_1^{-1}(y)g_2^{-1}(y)\dots g_n^{-1}(y)dz\leqslant$$

$$\leqslant M_0\operatorname{Re}\left\{\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=|l|=r}g_1^{k_1+l_1-1}(y)g_2^{k_2+l_2-1}(y)\dots g_n^{k_n+l_n-1}(y)\times\right.$$

$$\left.\int\limits_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(y)}a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)dz}\right\}.$$

Обе части этого неравенства умножим на $\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}$, и результат проинтегрируем по $y\in\Omega$. В итоге имеем

$$\sum_{|k|=r}\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}\times$$

$$\times g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}^{(m)}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy-$$

$$-c_m\sum_{|k|=r}\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}\times$$

$$\times g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy-$$

$$-\mathbb{C}_m\int_\Omega\sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\leqslant$$

$$\leqslant M_0\varepsilon^{2r-n}\operatorname{Re}B_{\varepsilon,m}[v,v],\tag{3.15}$$

где

$$B_{\varepsilon,m}[v,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{k_1+l_1}(y)g_2^{k_2+l_2}(y)\dots g_n^{k_n+l_n}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)}a_{kl}(y)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz\right)dy. \qquad (3.16)$$

Далее, применяя лемму 2.1 и неравенства (2.1), оценим интегралы в левой части неравенства (3.15). Для первого интеграла с помощью неравенств (2.1) имеем

$$\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\geq$$

$$\geq\varepsilon^{2r-n}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-2r-1}\times$$

$$\times\, g_1^{2k_1}(z)g_2^{2k_2}(z)\dots g_n^{2k_n}(z)\left(\int_{\Omega}\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\right)|v^{(k)}(z)|^2dz,$$

где $\varepsilon_m=m\varepsilon/(m+1)$.

Далее, применяя лемму 2.1, получим

$$\varepsilon^{2r-n}\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\times$$

$$\times g_1^{2k_1}(y)g_2^{2k_2}(y)\dots g_n^{2k_n}(y)\left(\int_{\Pi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\geq$$

$$\geq\varepsilon^{2r}\nu^{-2}(\varepsilon_m)\lambda^{-2n}(\varepsilon_m)2^{-n}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2. \qquad (3.17)$$

Теперь оценим второй интеграл в левой части неравенства (3.15). Применяя неравенства (2.1), имеем

$$\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec g}(y)}|v^{(k)}(z)|^2dz\right)dy\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^{2r-n}\nu^{2}(\varepsilon)\lambda^{-n}(\varepsilon)\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(z)g_1^{2k_1-2r-1}(z)g_2^{2k_2-2r-1}(z)\dots g_n^{2k_n-2r-1}(z)|v^{(k)}(z)|^2\times$$

$$\times\left(\int_{\Omega}\chi_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\right)dz.$$

Далее, применяя лемму 2.1, получаем следующую окончательную оценку

$$\sum_{|k|=r}\int_{\Omega}\sigma^{2}(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r}\varepsilon^{2r-n}g_1^{2k_1-1}(y)g_2^{2k_2-1}(y)\dots g_n^{2k_n-1}(y)\times$$

$$\times \left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz\right) dy \leqslant \varepsilon^{2r}\nu^2(\varepsilon)2^{-n}\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \qquad (3.18)$$

Переходим к оценке третьего интеграла в левой части неравенства (3.15). Применяя неравенства (2.1), имеем

$$\int_\Omega \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)} |v(z)|^2 dz\right) dy \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-n}\nu^2(\varepsilon)\lambda^{-2rn-n}(\varepsilon)\times$$
$$\times \int_\Omega \sigma^2(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-2r-1}|v(z)|^2\left(\int_\Omega \chi_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y)dy\right) dz.$$

Теперь, для оценки внутреннего интеграла применяем лемму 2.1 и приходим к следующему неравенству

$$\int_\Omega \sigma^2(y)(g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y))^{-2r-1}\varepsilon^{-n}\left(\int_{\Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)} |v(z)|^2 dz\right) dy \leqslant$$
$$\leqslant \nu^2(\varepsilon)\lambda^{-2rn}(\varepsilon)2^{-n}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \qquad (3.19)$$

В силу полученных неравенств (3.17) – (3.19) из (3.15) следует, что

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\,\mathrm{Re}\,B_{\varepsilon,m}[v,v], \qquad (3.20)$$

где полуторалинейная форма $B_{\varepsilon,m}[v,v]$ определена равенством (3.16) и

$$\begin{aligned}
&\widetilde{c}_m = c_m\nu^4(\varepsilon_m)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\ \varepsilon_m = \frac{\varepsilon m}{m+1},\\
&\widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon) = \mathbb{C}_m\nu^4(\varepsilon)\lambda^{-2rn}(\varepsilon)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\\
&M_m(\varepsilon) = M_0\nu^2(\varepsilon_m)\lambda^{2n}(\varepsilon_m)2^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.
\end{aligned} \qquad (3.21)$$

Вводим новую полуторалинейную форму

$$B^{(1)}_{\varepsilon,m}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z;y)a_{kl}(y)dy\right)\times$$
$$\times(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}p_k(z)p_l(z)u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz,$$

где функции $p_k(z)$ определены равенством (3.2).

Учитывая ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$, имеем

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B_{\varepsilon,m}[v,v]\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z;y)\left|1-\frac{p_k(y)p_l(y)}{p_k(z)p_l(z)}\cdot\frac{g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)}{g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y)}\right|\times\right.$$
$$\left.\times\, p_k(z)p_l(z)(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z))^{-1}|v^{(k)}(z)||v^l(z)|dz\right)dy. \qquad (3.22)$$

В силу условии (2.1) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\mu_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|1-\frac{p_k(y)p_l(y)}{p_k(z)p_l(z)}\cdot\frac{g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)}{g_1(y)g_2(y)\dots g_n(y)}\right| \leqslant \mu_1(\varepsilon) \qquad (3.23)$$

для всех $y, z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec{g}}(z;y) \neq 0$; $\mu_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Учитывая это обстоятельство и применяя лемму 2.1, а также неравенство Коши-Буняковского из (3.22), получим

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-B_{\varepsilon,m}[v,v]\right|\leqslant \varepsilon^n\mu_1(\varepsilon)\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2 \tag{3.24}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим новую полуторалинейную форму

$$B^{(2)}_{\varepsilon,m}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\right)a_{kl}(z)p_k(z)p_l(z)\times$$
$$\times\left(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)\right)^{-1}u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz,\ \ (u,v\in C_0^\infty(\Omega)).$$

В силу условия (3.6), леммы 2.1, действуя стандартным образом с помощью неравенства Коши-Буняковского, доказывается, что для любого достаточно малого положительного ν существует число $\varepsilon_\nu>0$ такое, что

$$\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right|\leqslant \varepsilon^n\nu\left\|v;L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec g)\right\|^2 \tag{3.25}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\nu)$.

Лемма 3.1. *Для любой вещественнозначной функции $\Phi(z)\in L_1(\Omega)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливо неравенство*

$$c_{n,m}\int_\Omega\left(\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\right)\left(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)\right)^{-1}\Phi(z)dz\leqslant$$
$$\leqslant\lambda^n(\varepsilon_m)\varepsilon^n\int_\Omega\Phi(z)dz+\varepsilon^n\left[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\right]\int_\Omega\Phi^-(z)dz, \tag{3.26}$$

где

$$\Phi^-(z)=(|\Phi(z)|-\Phi(z))/2,\ c_{n,m}=2^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.$$

Доказательство. Определим также функцию $\Phi^+(z)=(|\Phi(z)|+\Phi(z))/2$. Заметим, что $\Phi(z)=\Phi^+(z)-\Phi^-(z)$ и функции $\Phi^+(z),\Phi^-(z)$ неотрицательны.

В силу леммы 2.1 имеем

$$\varepsilon^n2^{-n}\lambda^{-n}(\varepsilon_m)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}\leqslant\left(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)\right)^{-1}\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy,$$

$$\left(g_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)\right)^{-1}\int_\Omega\chi^{(m)}_{\varepsilon,\vec g}(z;y)dy\leqslant\varepsilon^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}2^{-n}\lambda^n(\varepsilon_m).$$

Обе части первого неравенства умножим на $\Phi^-(z)$, а второе неравенство – на $\Phi^+(z)$ и затем интегрируем по $z\in\Omega$. Из полученных неравенств на основе равенства $\Phi(z)=\Phi^+(z)-\Phi^-(z)$ получим (3.26). □

Применяя неравенство (3.26) при

$$\Phi(z)=\operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}a_{kl}(z)p_k(z)p_l(z)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)},$$

имеем

$$c_{n,m}\operatorname{Re}B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\leqslant\lambda^n(\varepsilon_m)\varepsilon^n\operatorname{Re}B[v,v]+$$
$$+\varepsilon^n[\lambda^n(\varepsilon_m)-\lambda^{-n}(\varepsilon_m)]\int_\Omega\Phi^-(z)dz. \tag{3.27}$$

Так как коэффициенты $a_{kl}(z),|k|=|l|=r$, ограничены, то

$$\int_\Omega \Phi^-(z)dz \leqslant \int_\Omega |\Phi(z)|dz \leqslant M \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega p_k(z)p_l(z)|v^{(k)}(z)||v^{(l)}(z)|dz \leqslant$$
$$\leqslant M\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2.$$

Отсюда и из (3.27) следует, что

$$\operatorname{Re} B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] \leqslant \varepsilon^n M \left\{\operatorname{Re} B[v,v] + \mu_2(\varepsilon)\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\|^2\right\}, \tag{3.28}$$

где M — положительное число, не зависящее от $\varepsilon > 0$ и $v(x)$, и

$$\mu_2(\varepsilon) = \lambda^n(\varepsilon_m) - \lambda^{-n}(\varepsilon_m),\ \varepsilon_m = \frac{\varepsilon\, m}{m+1}. \tag{3.29}$$

Используя неравенство (3.20), имеем

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\operatorname{Re} B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] + \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\left|B_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right| +$$
$$+\varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\left|B^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right|.$$

Отсюда в силу неравенств (3.24), (3.25) следует, что

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-n}M_m(\varepsilon)\operatorname{Re} B^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v] + \mu_1(\varepsilon)M_m(\varepsilon)\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 +$$
$$+ M_m(\varepsilon)\nu\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2.$$

Далее, применяя неравенство (3.28), имеем

$$(1-\widetilde{c}_m(\varepsilon))\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - \widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_m(\varepsilon)M\left\{\operatorname{Re} B[v,v] + \mu_2(\varepsilon)\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2\right\} +$$
$$+\mu_1(\varepsilon)M_m(\varepsilon)\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 + M_m(\varepsilon)\nu\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$[1-\widetilde{c}_m(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon)M_m(\varepsilon)M - \mu_1(\varepsilon)M_m(\varepsilon) - M_m(\varepsilon)\nu]\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 -$$
$$-\widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)\varepsilon^{-2r}\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \leqslant M_m(\varepsilon)M\operatorname{Re}B[v,v], \tag{3.30}$$

где числа $\widetilde{c}_m(\varepsilon)$, $\widetilde{\mathbb{C}}_m(\varepsilon)$, $M_m(\varepsilon)$ такие же, как в (3.21), $\mu_1(\varepsilon)$ — такое же, как в (3.23), а число $\mu_2(\varepsilon)$ определено равенством (3.29).

Подбирая число m достаточно большим, а числа ε, ν — достаточно малыми, из (3.30) получаем неравенство

$$\operatorname{Re} B[v,v] \geq c_3\left\|v; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - c_4\left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \tag{3.31}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$; c_3, c_4 — положительные постоянные, не зависящие от $v(x)$.

Таким образом, неравенство Гординга для вырождающегося эллиптического оператора, ассоциированного с полуторалинейной формой $B[u,v]$, определенной равенством (3.3) в случае $a_{kl} \equiv 0$ при $|k|+|l| \leqslant 2r-1$, доказано.

Теперь перейдем к доказательству неравенства Гординга (3.7) в общем случае.

Положим

$$B_0[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \quad B_1[u,v] = B[u,v] - B_0[u,v].$$

Согласно вышедоказанному результату для полуторалинейной формы $B_0[u,v]$ имеет место неравенство вида (3.31), то есть существуют числа $c_5 > 0,\ c_6 \geq 0$ такие, что

$$\mathrm{Re} B_0[u,u] \geq c_5 \left\|u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - c_6 \left\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 \tag{3.32}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Полуторалинейную форму $B_1[u,v]$ представим в виде

$$B_1[u,v] = B_{11}[u,v] + B_{12}[u,v], \tag{3.33}$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}[u,v] &= \sum_{|k|<r, |l|\leqslant r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \\ B_{12}[u,v] &= \sum_{|k|=r, |l|< r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Используя неравенство Гельдера с показателями q_{kl}, λ_{kl}, в силу условия

$$\left\|a_{kl}; L_{q_{kl}}(\Omega; (g_1 g_2 \dots g_n)^{-1/q_{kl}})\right\| < +\infty,\ \ |k| + |l| \leqslant 2r - 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} |B_{11}[u,v] &\leqslant \sum_{|k|<r, |l|\leqslant r} \int_\Omega (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-1/q_{kl}} |a_{kl}(x)| \sigma_{kl}(x) |u^{(k)}(x)| |v^{(l)}(x)| dx \leqslant \\ &\leqslant M_0 \sum_{|k|<r, |l|\leqslant r} \left\|u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\right\|. \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2.4 при $p = q = 2$, получим

$$|B_{11}[u,v] \leqslant M \left\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| \left\{\tau \left\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|\right\}, \tag{3.35}$$

где $\mu = \max\limits_{|k|<r} \mu_k$ и числа μ_k определяются равенством (2.14); τ — достаточно малое положительное число.

Так как (см. (3.34)) полуторалинейная форма $B_{12}[u,v]$ содержит $u^{(k)}(x) v^{(l)}(x)$ при $|l| < r$, $|k| = r$, то, меняя ролями $u(x)$ и $v(x)$, и действуя так же, как в доказательстве неравенства (3.35), имеем

$$|B_{12}[u,v] \leqslant M \left\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| \left\{\tau \left\|v; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\|v; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|\right\}. \tag{3.36}$$

Используя неравенства (3.35), (3.36) при $u(x) \equiv v(x)$ и равенство (3.33), получаем

$$|B_1[u,u] \leqslant M \left\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| \left\{\tau \left\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|\right\}. \tag{3.37}$$

Так как $B[u,v] = B_0[u,v] + B_1[u,v]$, то, используя неравенства (3.32), (3.37), находим

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, B[u,u] &\geq \mathrm{Re}\, B_0[u,u] - |B_1[u,u]| \geq \\ &\geq (c_5 - \tau) \left\|u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - (\tau + c_0 \tau^{-2\mu} + c_6) \left\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \end{aligned}$$

Далее, фиксируя достаточно малое число $\tau > 0$, получим

$$\mathrm{Re}\, B[u,u] \geq c_7 \left\|u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 - c_8 \left\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2. \tag{3.38}$$

Так как

$$\left\|u; W^r_2(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\| = \left\{\left\|u; L^r_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2 + \left\|u; L^0_{2,r}(\Omega;\sigma,\vec{g})\right\|^2\right\}^{1/2},$$

то из полученного неравенства (3.38) следует неравенство (3.7). □

Теорема 3.1 доказана.

4. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением

В этом разделе сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле, который доказывается с помощью полученного выше неравенства Гординга и обобщенной теоремы Лакса-Мильграма (см., например, [8]).

Пусть $(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ – пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Рассмотрим следующую вариационную задачу Дирихле, связанную с полуторалинейной формой (3.3).

Задача D_λ. Для заданного функционала $F\in(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,v]+\int_\Omega \sigma^2(x)\left(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)^{-2r}U(x)\overline{v(x)}dx=\langle F,\,v\rangle, v\in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.1}$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$.

Заметим, что в случае достаточной гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ и правой части F уравнения (4.1), решение $U(x)$ задачи D_λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(AU)(x)+\lambda\sigma^2(x)\left(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)\right)^{-2r}U(x)=F(x),\ x\in\Omega,$$

где A такой же дифференциальный оператор как в (3.1).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда существует число $\lambda_0\ge 0$ такое, что при $\lambda>\lambda_0$ для любого заданного функционала $F\in(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'$ задача D_λ имеет единственное решение $U(x)$, и при этом выполняется оценка*

$$\|U;\,W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})\|\leqslant M\left\|F;\,(W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g}))'\right\|,$$

где положительное число M не зависит от F.

5. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями в полупространстве

В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_2^r(\Omega;\sigma,\vec{g})$ теорема 2 позволяет установить разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для конкретных видов областей $\Omega\subset R_n$ (например, ограниченные области, дополнения к ограниченным областям, полупространство и т.д.), а для изучения разрешимости таких задач с неоднородными граничными условиями требуется предварительно доказать теорему вложения разных метрик для соответствующих весовых пространств, элементы которых, в общем случае, не аппроксимируются с помощью функций из класса $C_0^\infty(\Omega)$. В этом разделе без доказательства сформулируем результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса эллиптических операторов в полупространстве со степенным вырождением.

Пусть $R_n^+=\{x|x=(x',x_n)\in R_n, x_n>0\}$ и пусть функция $\varphi(t)\in C^\infty(R_1^+)$ такая, что $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$ для любого $t\in\left[\frac12;1\right]$ и $\varphi(t)\equiv 0$, когда $t\ge 1$; $\varphi(t)=1$ для любого $t\in\left[0;\frac12\right]$. Для любых двух вещественных чисел α,β определим функцию

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t)=\varphi(t)t^{-\alpha}+(1-\varphi(t))t^\beta\ (t>0).$$

Обозначим через $W_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$ пространство функций $u(x)$ $(x\in R_n^+)$ с конечной нормой

$$\|u;W_{p;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\|=\left\{\|u;L_{p;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\|^p+\|u;L_{p;\alpha,\gamma}^0(R_n^+)\|^p\right\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L^r_{p;\alpha,\beta}(R^+_n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R^+_n} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n)|u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пусть $\widetilde{C}^\infty_0(R^+_n)$ множество бесконечно дифференцируемых функций в R^+_n финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях x_n. Символами $\overset{\circ}{W}{}^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$, $\widetilde{W}{}^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ обозначим замыкания классов $C^\infty_0(R^+_n)$ и $\widetilde{C}^\infty_0(R^+_n)$ в пространстве $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$, соответственно.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathbb{B}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \int_{R^+_n} \sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \tag{5.1}$$

и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)'$ и заданного элемента $\Psi(x) \in \widetilde{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ требуется найти решение $U(x) \in \widetilde{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,v] = < F, v >, \ \forall v \in C^\infty_0(R^+_n),$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n). \tag{5.2}$$

Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ полуторалинейной формы (5.1) удовлетворяют условиям:

I) при $|k| = |l| = r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in R^+_n$, $\xi \in R_n$ (c — положительное число, не зависящее от x, ξ), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(y)| < \nu$$

для всех $x, y \in R^+_n$ таких, что

$$|x_i - y_i| < \frac{1}{2} \varepsilon y_n, \ i = \overline{1,n};$$

II) при $|k| + |l| \leqslant 2r - 1$ коэффициенты a_{kl} принадлежат пространству — $L_{p_{kl}}(R^+_n; \sigma_{\alpha_{kl},\beta_{kl}}(x_n))$, где числа $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, p_{kl}$ определяются соотношениями:

а) если $|k| < r, \ |l| < r$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl} &= -\frac{n}{2} + \frac{n}{p_{kl}} + n\delta_k - r + |l|, \\
\beta_{kl} &= 2r - |k| - |l| - (n-1)\delta_k + \frac{n}{2} - \frac{n}{p_{kl}}, \\
\frac{1}{p_{kl}} &= 1 - \delta_k - \varepsilon_l - \left(\frac{1}{2} - \frac{r - |l|}{n} \right)_+,
\end{aligned}$$

где числа δ_k, ε_l из интервала $(0, 1/2)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{1}{2} - \delta_k - \varepsilon_l < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{r - |k|}{n} \right\}$$

и $(\theta)_+ = \theta$, если $\theta > 0$, и $(\theta)_+ = 0$ в противном случае;

б) если $|k| = r,\ |l| \leqslant r-1$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{n}{p_{kl}} - r + |l|,$$
$$\beta_{kl} = -\frac{n}{p_{kl}} + r - |l|,$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r-|l|}{n}\right)_+,$$

а ε_0 — достаточно малое положительное число;

в) если $|k| \leqslant r-1,\ |l| = r$, то

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} - \delta_k,$$
$$\beta_{kl} = r - |k| - \frac{1}{2} + \delta_k,$$
$$\frac{1}{p_{kl}} = \frac{1}{2} - \delta_k.$$

В этих условиях число δ_k такое, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant \delta_k < \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия I), II) и пусть существует такое положительное число c_0, что*

$$c_0 \int_{R_n^+} \left(\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |v(x)|\right)^2 dx \leqslant Re\,\mathbb{B}[v,v]$$

для всех $v \in C_0^\infty(R_n^+)$.

Пусть также

$$\alpha < -\frac{1}{2},\ -\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,r\},\ \beta + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,r\},\ \beta - r \geq \gamma.$$

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'$ и любого заданного элемента $\Psi \in \widetilde{W}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ задача D имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\| \leqslant M\left\{\left\|F; \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right)'\right\| + \left\|\Psi; W^{\,r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\right\|\right\},$$

где число M не зависит от F и Ψ.

Замечание 5.1. Условие (5.2) означает, что на гиперплоскости $x_n = 0$ решение $U(x)$ задачи D имеет такие же следы, как и заданная функция $\Psi(x)$. При дополнительных ограничениях на параметры α, β, γ, так же, как в работе [9], можно выписать граничные условия на гиперплоскости $x_n = 0$ в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967. 624 с.
2. Егоров Ю.В. *Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы.* М.: Изд-во МГУ, 1985. 166 с.
3. L. Garding *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* // Math. Scand. 1953. Bd.1, No. 1. P. 55-72.
4. Кудрявцев Л.Д. *Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1959. Т. 55. С. 1-182.

5. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1981. Т.157. С.90-118.
6. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 157-183.
7. Мирошин Н.В. *Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 3. С. 455-464.
8. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия Вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4-30.
9. Исхоков С.А. *О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 641-653.
10. Исхоков С.А. *О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением* // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536-542.
11. Киприянов И.А. *О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1969. Т. 105. С. 77-88.
12. Исхоков С.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 2. С. 201-216.
13. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением* // Доклады РАН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286-289.
14. Лизоркин П.И. *Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т.156. С. 130-142.
15. M. Troizi *Theoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso* // Ric. mat. 1969. No. 18. P. 49-74.
16. V.I. Burenkov *Sobolev Spaces on Domains*. Teubner-Texte Math. V. 137. B.G.Teubner, Stuttgart. 1998. 312 p.

Сулаймон Абунасрович Исхоков,
Институт математики им. А. Джураева АН РТ,
ул. Айни, 299/4,
734063, г. Душанбе, Таджикистан
Мирнинский политехнический институт
(филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: sulaimon@mail.ru

Махмадрахим Гафурович Гадоев,
Мирнинский политехнический институт
(филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: gadoev@rambler.ru

Илья Анатольевич Якушев,
Мирнинский политехнический институт
(филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: yakushevilya@mail.ru