ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 72-83.

УДК 517.9

О СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. КЛЯЧИН, И.В. ТРУХЛЯЕВА

Аннотация. В работе рассматриваются полиномиальные приближенные решения задачи Дирихле уравнения минимальной поверхности. Показывается, что при определенных условиях на геометрическое строение области, градиенты таких решений остаются по модулю ограниченными при увеличении степени рассматриваемых многочленов. Следствием полученных свойств является равномерная сходимость приближенных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности.

Ключевые слова: уравнение минимальной поверхности, равномерная сходимость, приближенное решение.

Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J93, 65N30

1. Введение

При численном решении краевых задач уравнений и систем уравнений с частными производными важнейшей проблемой является сходимость приближенных решений. Исследование данной задачи особенно важно для нелинейных уравнений, так как в этом случае имеется ряд трудностей, связанных в первую очередь с невозможностью использовать традиционные методы и подходы, используемые для линейных уравнений. В настоящий момент вполне актуальной является задача определения условий, при выполнении которых гарантируется равномерная сходимость приближенных решений, полученных теми или иными методами для нелинейных уравнений и систем уравнений вариационного типа. В этом случае естественно использовать вариационные методы решения краевых задач. В связи с этим возникает вопрос обоснования этих методов, который сводится к исследованию общих свойств приближенных решений (см., например, [1], [2]).

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем вопрос о сходимости приближенных решений для уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{1}$$

в области Ω с краевым условием

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

где функция $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Стоит заметить, что данная задача Дирихле для произвольной области (даже с гладкой границей) не всегда имеет решение. В случае плоских областей необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для произвольной

A.A. Klyachin, I.V.Truhlyaeva, On the convergence of almost polynomial solutions of the minimal surface.

Работа поддержана РФФИ (проект № 15-41-02517-р_поволжье_а.

Поступила 15 мая 2015 г.

непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ является условие выпуклости этой области. В пространстве размерности больше двух таким условием является неотрицательность средней кривизны границы области относительно внешней нормали. С точными формулировками и доказательствами этих результатов можно ознакомиться в работая [3]–[10]. В нашей статье мы не накладываем никаких условий на область Ω, однако предполагаем, что для данной граничной функции $\varphi(x)$ решение задачи (1)-(2) существует. Понятно, что такие функции $\varphi(x)$ имеются для произвольной области Ω.

Мы исследуем вопрос о равномерной сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности, построенных с помощью алгебраических многочленов. В работе [11] была решена подобная задача о сходимости для кусочно-линейных приближенных решений краевой задачи (1)-(2), а в работе [12] дано описание численной реализации метода конечных элементов, основанного на кусочно-линейных функциях. Далее мы приводим необходимые определения.

Предположим, что $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная область такая, что для некоторого многочлена $\psi(x,y)$, степени не более N_0 по каждой переменной, выполнено $\psi(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \partial\Omega$ и $\psi(x,y) > 0$ для $(x,y) \in \Omega$. Для натурального N обозначим через L_N множество всех многочленов вида

$$v_N(x,y) = \psi(x,y) \sum_{n,m=1}^{N} c_{nm} x^n y^m.$$

Ясно, что $v_N(x,y) = 0$ для $(x,y) \in \partial\Omega$. Предположим, что $\varphi \in C^1(\Omega)$. Рассмотрим задачу нахождения такого многочлена v_N^*, на котором достигает своего минимума интеграл площади

$$\sigma(\varphi + v_N) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N|^2}\, dxdy \to \min, \quad v_N \in L_N. \tag{3}$$

Несложно показать, что решение v_N^* задачи (3) удовлетворяет равенству

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla\varphi + \nabla v_N^*, \nabla v_N \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N^*|^2}}\, dxdy = 0 \quad \forall\, v_N \in L_N. \tag{4}$$

Теорема 1. *Решение задачи* (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Ясно, что значение площади $\sigma(\varphi + v_N)$ есть некоторая функция $\sigma(c_{11}, c_{12}, ..., c_{NN})$ от конечного числа переменных $c_{nm}, n, m = 1, \ldots, N$. Данная функция, очевидно, непрерывная. При этом

$$\lim_{|c| \to \infty} \sigma(c_{nm}) = +\infty,$$

где $|c| = \max\limits_{1 \leqslant n,m \leqslant N} |c_{nm}|$. Следовательно, существует такой набор чисел c_{nm}^*, при которых функция $\sigma(c_{11}, c_{12}, ..., c_{NN})$ принимает минимальное значение. Обозначим через v_N^* многочлен, соответствующий этому набору коэффициентов. Тогда для него выполняется условие (4).

Покажем теперь единственность. Предположим, что существует ещё функция $v_N^1 \in L_N$, которая является решением задачи (3). Для неё также выполняется равенство (4). Вычитая одно равенство из другого для $v_N = v_N^* - v_N^1$, получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\langle \nabla f^*, \nabla f^* - \nabla f^1 \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^*|^2}} - \frac{\langle \nabla f^1, \nabla f^* - \nabla f^1 \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^1|^2}} \right) dxdy = 0, \tag{5}$$

где $f^* = \varphi + v_N^*$, $f^1 = \varphi + v_N^1$.

Далее нам понадобится неравенство

$$\langle\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}},\xi-\eta\rangle \geq \frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}+|\xi||\eta|+1)}, \qquad (6)$$

которое выполняется для любых векторов $\xi,\eta\in\mathbf{R}^2$ и получается следующим образом. Для начала заметим, что

$$\sqrt{1+|\xi|^2}\geq\sqrt{1+|\eta|^2}+\frac{\langle\eta,\xi-\eta\rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}.$$

Тогда

$$\langle\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}},\xi-\eta\rangle=-\frac{\langle\xi,\eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\frac{\langle\eta,\xi-\eta\rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}\geq$$

$$\geq\sqrt{1+|\eta|^2}-\sqrt{1+|\xi|^2}-\frac{\langle\xi,\eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}=\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}-\langle\xi,\eta\rangle-1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\geq$$

$$\geq\frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}+|\xi||\eta|+1)}.$$

Таким образом, из неравенства (6) и равенства (5) следует, что

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\nabla f^*-\nabla f^1|^2}{\sqrt{1+|\nabla f^*|^2}(\sqrt{1+|\nabla f^*|^2}\sqrt{1+|\nabla f^1|^2}+|\nabla f^*||\nabla f^1|+1)}dxdy\leqslant 0.$$

Поэтому $\nabla f^*\equiv\nabla f^1$. Откуда получаем, что $\nabla v_N^*\equiv\nabla v_N^1$. Используя, что многочлены v_N^* и v_N^1 равны нулю на границе области $\partial\Omega$, имеем $v_N^*(x,y)=v_N^1(x,y)$ при всех $(x,y)\in\Omega$. Таким образом единственность доказана.

Определение. *Функцию* $f^*=\varphi+v_N^*$, $v_N^*\in L_N$, *будем называть полиномиальным решением краевой задачи* (1)–(2), *если для любого многочлена* $v_N\in L_N$ *выполнено равенство* (4).

Ниже нас будет интересовать вопрос о равномерной сходимости последовательности полиномиальных решений $\varphi+v_N^*$ при $N\to\infty$. В первую очередь мы покажем, что, при определенных условиях, градиенты этих функций остаются ограниченными постоянной, независящей от N. Это свойство позволит далее получить оценку равномерной сходимости к точному решению.

3. Оценка градиента полиномиального решения

Пусть $f\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ – решение задачи (1)-(2). Введем величину $\delta(\xi,\eta)$ для произвольных векторов $\xi,\eta\in\mathbf{R}^2$

$$\delta(\xi,\eta)=\sqrt{1+|\eta|^2}-\sqrt{1+|\xi|^2}-\frac{\langle\xi,\eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}.$$

Нетрудно заметить, что $\delta(\xi,\eta)>0$ при всех $\xi\neq\eta$. Также нам понадобится следующая полиномиальная характеристика области

$$\lambda_N=\inf_{v\in L_N}\frac{\left(\iint\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\,dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_{\Omega}|\nabla v|}>0,$$

где $|\Omega|$ – площадь области Ω. Ясно, что $0<\lambda_N\leqslant 1$. Скорость стремления к нулю величины λ_N при $N\to\infty$ будет оценена в 5-м разделе настоящей статьи.

Далее, полагая $\xi = \nabla f$, $\eta = \nabla\varphi + \nabla v_N^*$ и используя уравнение (1), получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \delta(\nabla f, \nabla\varphi + \nabla v_N^*)\, dxdy = \sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f).$$

Пользуясь неравенством (см. доказательство (6))

$$\sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \geq$$

$$\geq \frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)},$$

заключаем, что

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\, dxdy}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}(\sqrt{1+|\nabla f|^2}\sqrt{1+|\nabla\varphi + \nabla v_N^*|^2} + |\nabla f||\nabla\varphi + \nabla v_N^*| + 1)} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f).$$

Тогда из предыдущего неравенства

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\, dxdy}{\sqrt{1+|\nabla\varphi + \nabla v_N^*|^2}} \leqslant 3(1+P_0^2)(\sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f)).$$

Положим $K = \max\{\sup\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|, 1\}$ и $A_N = \sup\limits_{\Omega}|\nabla v_N^*|$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\, dxdy \leqslant 3\sqrt{1+2K^2+2A_N^2}(1+P_0^2)(\sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f)).$$

Введем обозначение $g = f - \varphi$. Ясно, что $g(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \partial\Omega$. Далее для произвольной функции $h \in C(\overline{\Omega})$ через h_N будем обозначать некоторое приближение функции h функциями из пространства L_N. Способ такого приближения в дальнейших рассуждениях не важен и будет уточнен в следующем разделе статьи. Используя данное обозначение, имеем

$$\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla f - \nabla\varphi - \nabla v_N^*|^2\, dxdy\right)^{1/2} \geq \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g_N - \nabla v_N^*|^2\, dxdy\right)^{1/2} -$$

$$-\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy\right)^{1/2}.$$

Тогда, так как $g_N - v_N^* \in L_N$, то

$$\sup\limits_{\Omega}|\nabla g_N - \nabla v_N^*| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla v_N^*|^2\, dxdy\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{\left(3(1+P_0^2)\sqrt{1+2K^2+2A_N^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N}\sqrt{\sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f)}.$$

Воспользуемся следующим неравенством

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a+x^2}} \geq \sqrt[4]{a+x^2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a+x^2}},$$

которое выполняется для $x \geq 0$ и $a > 0$. Из этого неравенства, полагая $x = \sqrt{2}A_N$, $a = 1 + 2K^2$, получаем

$$A_N \leqslant \sup_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N} \left(\iint_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\frac{3(1+P_0^2)}{|\Omega|\,\lambda_N^2} (\sigma(\varphi + v_N^*) - \sigma(f)) \right)^{1/2} + 1. \tag{7}$$

Так как функция v_N^* является решением задачи (3), то приходим к оценке

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leqslant \sup_{\Omega} |\nabla g_N| + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N} \left(\iint_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\frac{3(1+P_0^2)}{|\Omega|\,\lambda_N^2} (\sigma(\varphi + g_N) - \sigma(f)) \right)^{1/2} + 1. \tag{8}$$

Для получения окончательного неравенства заметим, что функция $\varphi + g = f$ является решением уравнения (1), и потому $a'(0) = 0$, где $a(t) = \sigma(f + t(\varphi + g_N - f))$. Тогда, полагая $f^t = f + t(\varphi + g^N - f)$,

$$\sigma(\varphi + g_N) - \sigma(f) = \int_0^1 ds \int_0^s a''(t)dt =$$

$$= \int_0^1 ds \int_0^s dt \iint_{\Omega} \frac{(1 + |\nabla f^t|^2)|\nabla f - \nabla(\varphi + g_N)|^2 - \langle \nabla f^t, \nabla f - \nabla(\varphi + g_N)\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{\Omega} |\nabla f - \nabla(\varphi + g_N)|^2 dxdy = \iint_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 dxdy.$$

Тогда из неравенства (8) приходим к оценке

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leqslant 1 + \sup_{\Omega} |\nabla g_N| +$$

$$+ \frac{1 + \sqrt{3(1+P_0^2)}}{\sqrt{|\Omega|}\,\lambda_N} \left(\iint_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy \right)^{1/2}, \tag{9}$$

итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть f – решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевому условию* (2). *Тогда, если $v_N^*(x,y) \in L_N$ – решение задачи* (3), *то выполнена оценка его градиента* (9).

Замечание. Из теоремы 2 следует, что при $N \to \infty$ градиенты приближенных решений $\varphi + v_N^*$ будут равномерно ограничены, если таковой будет величина

$$\frac{1}{\lambda_N}\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2\, dxdy\right)^{1/2},$$

а также ограниченными будут градиенты функций $g_N(x,y)$. Для выяснения этих вопросов нам нужно оценить степень приближения функции g многочленами g_N, а также выяснить как себя ведет числовая последовательность λ_N при $N \to \infty$.

4. Аппроксимация гладких функций полиномами

Пусть Ω ограниченная область с границей Γ, k – натуральное число и функция $\psi(x,y)$ удовлетворяет условиям:

1) функция ψ дифференцируема k раз, и ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Липшица;

2) $\psi(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \Gamma$ и $\psi(x,y) \neq 0$ при $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$;

3) $|\nabla\psi(x,y)| > 0$ при $(x,y) \in \Gamma$.

Тогда, как доказано в статье [13], для функции $u(x,y)$, непрерывно дифференцируемой k раз в $\overline{\Omega}$ и обращающейся в нуль на Γ, можно указать последовательность многочленов $P_N(x,y)$ степени $\leqslant N$ по каждой переменной x,y таких, что

$$||u - \psi P_N||_{C^r(\Omega)} \leqslant \frac{\delta_N(u)}{N^{k-r}}, r = 0,1,...,k, \tag{10}$$

где величина $\delta_N(u) \to 0$ при $N \to \infty$.

Далее мы будем считать, что функция $g = f - \varphi \in C^k(\Omega)$. Теперь мы уточняем способ выбора функции g_N, полагая $g_N = \psi P_N$, где приближающий многочлен выбран для функции $g = f - \varphi$. Применяя (для $r = 1$) оценки (10) для $u = f - \varphi$ в неравенстве (9), получаем

$$\sup_{\Omega} |\nabla v_N^*| \leqslant 1 + K + P_0 + \frac{2 + \sqrt{3(1+P_0^2)}}{\lambda_N}\frac{\delta_N(f-\varphi)}{N^{k-1}}. \tag{11}$$

Из этого неравенства видно, что градиенты приближенных решений будут оставаться ограниченными постоянной, независящей от N при $N \to \infty$, если величина λ_N будет стремиться к нулю не быстрее, чем $O(1/N^{k-1})$. В следующем разделе статьи мы исследуем этот вопрос.

5. Оценка величины λ_N

Приведем пример оценки снизу величины λ_N. Ясно, что

$$\lambda_N = \inf_{v \in L_N} \frac{\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_{\Omega} |\nabla v|} \geq \inf_{P} \frac{\left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla P|^2\, dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\,\sup\limits_{\Omega} |\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем $N' = N + N_0$ по каждой переменной.

Далее нам понадобится следующее неравенство А.А. Маркова (см., например, [14], §6) для многочлена $P(x)$ одной переменной степени N на отрезке $[a,b]$

$$|P'(x)| \leqslant \frac{2N^2}{b-a}\max_{[a,b]}|P(x)|.$$

Из него легко получить аналогичное неравенство для прямоугольника в случае многочлена двух переменных. Пусть $P(x,y)$ многочлен, степень которого по каждой переменной не выше чем N. Положим

$$M = \max_{[a,b]\times[c,d]}|P(x,y)|.$$

Тогда из неравенства А.А. Маркова по каждой переменной имеем

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2N^2}{b-a}\max_{[a,b]}|P(x,y)| \leqslant M\frac{2N^2}{b-a}$$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| \leqslant M\frac{2N^2}{d-c}.$$

Следовательно,

$$|\nabla P|^2 \leqslant 4N^4M^2\frac{(d-c)^2+(b-a)^2}{(b-a)^2(d-c)^2}$$

или

$$|\nabla P| \leqslant 2N^2M\frac{\sqrt{(d-c)^2+(b-a)^2}}{(b-a)(d-c)} = 2N^2M\frac{d}{S},$$

где d — диагональ прямоугольника, S — его площадь. Рассмотрим это неравенство для квадрата со стороной $a>0$. Тогда $d=a\sqrt{2}, S=a^2$. Поэтому

$$|\nabla P_N| \leqslant N^2M\frac{2\sqrt{2}}{a}.$$

Ясно, что это неравенство справедливо для любого квадрата, необязательно со сторонами, параллельными осям координат. Положим

$$\inf_P \frac{\left(\iint\limits_\Omega |P|^2\,dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{\Omega}\,\sup\limits_\Omega|P|} = \widetilde{\lambda}_N,$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем N по каждой переменной. Найдем сначала оценку $\widetilde{\lambda}_N$ для квадрата K со стороной $a>0$. Пусть $z=(x,y)\in K$ и $z_0\in K$ — такая,что $P(z_0)=\max\limits_K|P|=M$. Тогда

$$P(z_0)-P(z) \leqslant |z-z_0|\max_K|\nabla P| \leqslant N^2\frac{2\sqrt{2}}{a}M|z-z_0|.$$

Если $|z-z_0| < a/(4\sqrt{2}N^2)$, то $M-P(z) \leqslant \frac{M}{2}$. Таким образом, $P(x,y) \geq \frac{M}{2}$ для $(x,y)\in K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(z_0)$. Тогда

$$\iint\limits_K P^2(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(z_0)} P^2(z)dxdy \geq$$

$$\geq \frac{M^2}{4}\iint\limits_{K\cap B_{\frac{a}{4\sqrt{2}N^2}}(z_0)} dxdy \geq \frac{M^2}{16}\pi\frac{a^2}{32N^4}.$$

Поэтому

$$\left(\iint\limits_K P^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{Ma}{16\sqrt{2}N^2}\sqrt{\pi}.$$

Так как P произвольный допустимый многочлен, то

$$\widetilde{\lambda}_N \geq \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{N^2}.$$

Теперь применим доказанное неравенство для частных производных многочлена P, которые являются также многочленами. Следовательно,

$$\left(\iint\limits_K P_x^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \geq \widetilde{\lambda}_N \max_K |P_x|\sqrt{|K|}$$

$$\left(\iint\limits_K P_y^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \geq \widetilde{\lambda}_N \max_K |P_y|\sqrt{|K|}.$$

Отсюда

$$|\nabla P|^2 \geq \widetilde{\lambda}_N^2|K|((\max_K |P_x|)^2 + (\max_K |P_y|)^2) \geq$$

$$\geq \widetilde{\lambda}_N^2|K|(\max_K |P_x|^2 + |P_y|^2) = |K|((\max_K |\nabla P|)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{\left(\iint\limits_K |\nabla P|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}}{|K|\max\limits_K |\nabla P|} \geq \widetilde{\lambda}_N \geq \frac{1}{16N^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_N \geq \frac{1}{16N^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили нижнюю оценку величины λ_N для случая, когда областью Ω является квадрат со стороной $a > 0$. Отметим, что эта оценка от размеров квадрата не зависит. Используя неравенство (12), получим оценку для произвольной плоской области Ω.

Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный квадрат $K \subset \overline{\Omega}$, необязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой, что $z_0 \in K$. Пусть сторона квадрата $a(z_0) > 0$. Положим

$$\Delta(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0).$$

Будем предполагать, что $\Delta(\Omega) > 0$. Например, если в качестве Ω взять круг радиуса $R > 0$, то нетрудно увидеть, что для любой точки z_0 из этого круга $a(z_0) = R\sqrt{2}$. Поэтому для круга $\Delta(\Omega) = R\sqrt{2}$. В качестве другого примера приведем область, ограниченную эллипсом

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\},\ a > b.$$

В точке с координатами $(a, 0)$ эллипс имеет минимальный радиус кривизны, равный b^2/a. Отсюда легко получить, что любая точка $z_0 \in \Omega$ попадает в некоторый круг радиуса b^2/a, лежащий внутри эллипса. Поэтому для эллипса $\Delta(\Omega) \geq \sqrt{2}b^2/a$.

Через величину $\Delta(\Omega)$ легко оценить λ_N. Действительно, пусть $z_0 \in \Omega$ такая, что $\max\limits_{\Omega}|\nabla P| = |\nabla P(z_0)|$, и квадрат $K \subset \overline{\Omega}$ содержит эту точку. Тогда

$$\sqrt{\iint\limits_{\Omega}|\nabla P(x,y)|^2 dxdy} \geq \sqrt{\iint\limits_{K}|\nabla P(x,y)|^2 dxdy} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{16N^2}\sqrt{|K|}\max_K|\nabla P|.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{\Delta(\Omega)}{16N^2\sqrt{|\Omega|}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{13}$$

Таким образом, если область Ω такова, что любая ее точка может быть помещена в квадрат $K \subset \overline{\Omega}$ со стороной $\Delta(\Omega) > 0$, то справедлива оценка (13). Ясно, что если область имеет гладкую границу, то $\Delta(\Omega) > 0$. Для более общих областей вначале получим оценку величины λ_N для ромба.

Итак, пусть на плоскости с декартовыми координатами (x, y) задан ромб R с вершинами в точках

$$(0,0), \quad (a,0), \quad (a\cos\alpha, a\sin\alpha), \quad (a(1+\cos\alpha), a\sin\alpha),$$

где $\alpha \in (0, \pi/2], a > 0$. С помощью линейного преобразования

$$u = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \quad v = y$$

на плоскости с координатами (u, v) получим квадрат K с вершинами

$$(0,0), \quad (a\sin\alpha, 0), \quad (0, a\sin\alpha), \quad (a\sin\alpha, a\sin\alpha),$$

Пусть теперь $P = P(x, y)$ произвольный многочлен, степень которого по каждой переменной не превышает N. Нетрудно заметить, что

$$P_x^2 + P_y^2 = (P_u\sin\alpha)^2 + (-P_u\cos\alpha + P_v)^2 \geq (1-\cos\alpha)(P_u^2 + P_v^2).$$

Тогда из (12)

$$\frac{\left(\iint\limits_R (P_x^2+P_y^2)dxdy\right)^{1/2}}{\sqrt{|R|}\max\limits_R|\nabla P|} \geq \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sin\alpha}\cdot\frac{\left(\iint\limits_K (P_u^2+P_v^2)dudv\right)^{1/2}}{\sqrt{|R|}\max\limits_K|\nabla P|} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sin\alpha}\cdot\frac{\left(\iint\limits_R (P_u^2+P_v^2)dudv\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_K|\nabla P|}\sqrt{\frac{|K|}{|R|}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\cdot\frac{\left(\iint\limits_R (P_u^2+P_v^2)dudv\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_K|\nabla P|} \geq \sqrt{\frac{\pi(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}}\frac{1}{16N^2}.$$

Таким образом, для ромба со стороной $a > 0$ и острым углом $\alpha \in (0, \pi/2]$ выполнено неравенство

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}}\frac{1}{16N^2}. \tag{14}$$

Пусть теперь задана произвольная плоская область Ω. Обозначим через $\alpha(\Omega) \in (0, \pi/2]$ такой угол, что всякая точка области содержится в некотором ромбе $R \subset \Omega$ с острым углом $\alpha(\Omega)$. Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный по стороне ромб $R \subset \overline{\Omega}$ такой, что $z_0 \in R$. Пусть сторона этого ромба $a(z_0) > 0$. Положим

$$\Delta_1(\Omega) = \inf_{z_0\in\Omega} a(z_0) > 0.$$

Рассуждая так же, как и выше, получим неравенство

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \cdot \frac{\Delta_1(\Omega)\sin(\alpha(\Omega)/2)}{16N^2}. \tag{15}$$

Теперь, учитывая, что в L_N многочлены имеют степень не выше чем $N_0 + N$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ такова, что $\Delta_1(\Omega) > 0$ и $\alpha(\Omega) > 0$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \cdot \frac{\Delta_1(\Omega)\sin(\alpha(\Omega)/2)}{16(N+N_0)^2}. \tag{16}$$

6. Оценка равномерной сходимости

Далее мы воспользуемся методом оценки решений из работы [15]. Пусть f – решение уравнения минимальной поверхности в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Пусть v_N^* – решение задачи (3), для которого справедливо (4). Положим $f_N^* = \varphi + v_N^*$.

Мы будем предполагать, что

$$\sup_{\Omega} |\nabla f| = P_0 < +\infty.$$

Далее будем рассуждать так же, как и в работе [15]. Положим $f^t(x,y) = f_N^*(x,y) + t(f(x,y) - f_N^*(x,y))$ и $P_N^* = \sup_{\Omega} |\nabla f_N^*|$, $P_N = \max\{1, P_0, P_N^*\}$. Понятно, что $f^*|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. Отметим, что P_N, вообще говоря, зависит от N. Однако, если предположить, что $k > 2$ и для области постоянные $\Delta_1(\Omega)$ и $\alpha(\Omega)$ положительны, то из неравенств (15) и (9) следует, что при $N \to \infty$ величина P_N будет оставаться ограниченной некоторой постоянной P.

Далее, так как при $t = 0$ функция $\sigma(t) = \sigma(f^t)$ принимает минимальное значение, то $\sigma'(0) = 0$. Используя это равенство, получаем

$$\sigma(f_N^*) - \sigma(f) = \int_0^1 ds \int_0^s \sigma''(t)dt =$$

$$= \int_0^1 ds \int_0^s dt \iint_{\Omega} \frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f_N^* - \nabla f|^2 - \langle \nabla f^t, \nabla f_N^* - \nabla f\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dxdy \geq$$

$$\geq \int_0^1 ds \int_0^s dt \iint_{\Omega} \frac{|\nabla f - \nabla f_N^*|^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dxdy \geq \frac{1}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \iint_{\Omega} |\nabla f - \nabla f_N^*|^2 dxdy. \tag{17}$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре (см., например, [16], п. 7.8) для функции $h(x,y) = f(x,y) - f_N^*(x,y)$, $h|_{\partial\Omega} = 0$. Из (17) получаем

$$\sigma(f_N^*) - \sigma(f) \geq \frac{\lambda(\Omega)}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \iint_{\Omega} |h(x,y)|^2 dxdy,$$

где постоянная $\lambda(\Omega) = \pi/|\Omega|$ и $|\Omega|$ – площадь области Ω. Далее, положим $M = \sup_{\Omega} |h|$ и, не ограничивая общности, можем считать, что найдется точка $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, в которой

$h(x_0, y_0) = M$. Покажем, что круг $B_{M/2P}(z_0) \subset \Omega$. Действительно, пусть $z' \in \partial\Omega$ такая, что $|z_0 - z'| = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Тогда

$$2P|z_0 - z'| \geq h(z_0) - h(z') = M - h(z') = M.$$

Таким образом, расстояние от точки z_0 до границы $\partial\Omega$ больше чем $M/2P$. Следовательно, $B_{M/4P}(z_0) \subset \Omega$. Предположим теперь, что $z = (x, y) \in B_{M/4P}(z_0)$. Тогда

$$h(z) \geq h(z_0) - 2P|z - z_0| > M - 2P\frac{M}{4P} = M/2.$$

Мы получаем, что круг $B_{M/4P}(z_0) \subset D_M$, где

$$D_M = \{(x, y) \in \Omega : |h(x, y)| > M/2\} \subset\subset \Omega.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Omega} |h(x, y)|^2 dxdy \geq \iint\limits_{D_M} |h(x, y)|^2 dxdy \geq$$

$$\geq \iint\limits_{B_{M/4P}(z_0)} \left(\frac{M}{2}\right)^2 dxdy = \pi\frac{M^2}{4}\left(\frac{M}{4P}\right)^2 = \pi\,\frac{M^4}{64P^2}\,.$$

Таким образом,

$$\max_{\Omega} |f - f_N^*| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P^5|\Omega|(\sigma(f_N^*) - \sigma(f))\right)^{1/4}.$$

Далее, заметим, что функция v_N^* является решением задачи (3). Поэтому $\sigma(f_N^*) - \sigma(f) \leqslant \sigma(f - \varphi - g_N) - \sigma(f)$. Используя доказанное ранее неравенство

$$\sigma(f - \varphi - g_N) - \sigma(f) \leqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla g - \nabla g_N|^2 dxdy$$

и оценку (10) для $u = f - \varphi$, приходим к неравенству

$$\max_{\Omega} |f - f_N^*| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P^5|\Omega|\frac{\delta_N^2(f - \varphi)}{N^{2k-2}}\right)^{1/4}.$$

Итак, нами доказан основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть* $f \in C^k(\overline{\Omega}), k \geq 3$ *– решение уравнения минимальной поверхности* (1) *в области* Ω, *для которой* $\Delta_1(\Omega) > 0$ *и* $\alpha(\Omega) > 0$. *Пусть это решение удовлетворяет краевому условию* (2) *с функцией* $\varphi \in C^k(\overline{\Omega})$. *Рассмотрим функции* $v_N^* \in L_N$, *которые являются решениями задачи* (3). *Предположим, что* $P_0 = \sup\limits_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$ *и* $K = \sup\limits_{\Omega} |\nabla\varphi| < \infty$. *Тогда последовательность приближенных решений* $f_N^* = \varphi + v_N^*$ *равномерно сходится к* f, *при этом справедлива оценка*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f - f_N^*| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P^5|\Omega|\frac{\delta_N^2(f - \varphi)}{N^{2k-2}}\right)^{1/4},$$

где

$$P = 1 + 2K + P_0 + \frac{16\sqrt{|\Omega|}(2 + \sqrt{3(1 + P_0^2)})}{\sqrt{\pi}\Delta_1(\Omega)\sin\left(\alpha(\Omega)/2\right)}\frac{\delta_N(f - \varphi)}{N^{k-1}}(N + N_0)^2$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* 2 изд., М. — Л., 1970.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближённые методы высшего анализа.* 5 изд., Л. — М., 1962.
3. R. Finn *Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature* // J. d'Analyse Math. 1965. № 14. P. 139–160.
4. T. Rado *The problem of the least area and the problem of Plateau* // J. d'Analyse Math. Z. 1930. № 32. P. 763–796.
5. Бернштейн С.Н. *Об уравнениях вариационного исчисления* // УМН. 1941. № 8. С. 8–31.
6. Бернштейн С.Н., Петровский И.Г. *О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям* // УМН. 1941. № 8. С. 32–74.
7. J. Serrin *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables* // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1964. A264. P. 313–496.
8. G. Stampacchia *On some multiple integral problems in the calculus of variations* // Comm. Pure Appl. Math. 1963. № 16. P. 382–422.
9. H. Jenkins, J. Serrin *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension* // J. ReineAngew. Math. 1968. № 229. P. 170–187.
10. R.C. Bassanezi, U. Massari *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-regular domains* // Ann. Univ. Ferrara. 1978. № 24. P. 181–189.
11. Гацунаев М.А., Клячин А.А. *О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности*// Уфимский математический журнал. Том 6, № 3 (2014), С. 3–16.
12. Клячин А.А., Клячин В.А., Григорьева Е.Г. *Визуализация расчета формы поверхностей минимальной площади* // Научная визуализация. Электронный журнал. 2014. Т.6, №2. С. 34–42.
13. Харрик И.Ю. *О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида* // Математический сборник, 1955, Т. 37 (79), № 2.
14. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* Гостехиздат, 1949, 688 с.
15. Клячин А.А. *О скорости сходимости последовательности, доставляющей минимум в вариационной задаче* // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика, 2012. 9 с. ISSN 2222-8896.
16. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989, 464 с.

Алексей Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `klyachin-aa@yandex.ru`

Трухляева Ирина Владимировна,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `irishka2027@mail.ru`